UVigo / E. Ing. Telecomunicación / Análisis de circuitos lineales / Tema IV: Cuadripolos 103

Tema IV: Cuadripolos

Caracterización de circuitos como cuadripolos
Parámetros característicos de cuadripolos
Obtención de parámetros característicos
Agrupaciones de cuadripolos
Inserción de un cuadripolo en un circuito

- El tratamiento como cuadripolo hace innecesario el conocimiento interno del circuito.
- El tratamiento como cuadripolo permite estudiar rápidamente la variación de la respuesta ante variaciones de la entrada.
- Los parámetros característicos pueden obtenerse a partir de medidas realizadas sobre el circuito.

Dpto. Teoría de la Señal y Comunicaciones / enrique.sanchez@uvigo.es / www.webs.uvigo.es

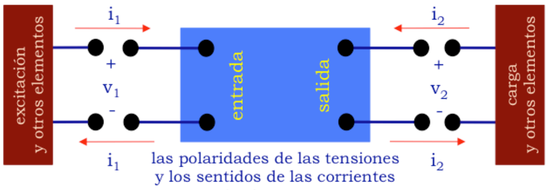
Se entiende por *multipolo* un circuito con distintos puntos o polos (*poles*) de conexión al exterior. Cada dos polos constituyen una *puerta* o un *puerto* (*port*). Un cuadripolo es un circuito con dos puertas (*two port*, en inglés). El estudio que sigue se restringe a los cuadripolos, pero gran parte de lo indicado es aplicable a circuitos de más puertas.

El concepto de cuadripolo es útil para usuarios interesados en conocer el comportamiento del circuito de puertas afuera y no en sus características internas. Se basa en tratar el circuito como si fuera una caja negra con una puerta de entrada y otra de salida, y establecer las relaciones entre tensiones y corrientes en dichas puertas mediante un juego de cuatro parámetros (*parámetros característicos*). Conocidos éstos, es inmediato obtener la variación de la respuesta del circuito ante un cambio en las condiciones de excitación sin necesidad de resolver nuevamente las ecuaciones circuitales.

Aunque no se conozca la estructura interna del circuito los parámetros característicos pueden ser determinados a partir de medidas realizadas directamente sobre el circuito.

Caracterización de circuitos como cuadripolos

Cuatro parámetros relacionan las corrientes y las tensiones en las puertas del circuito.



- El cuadripolo no contiene fuentes independientes.
- En ausencia de excitación, no hay energía almacenada en el cuadripolo.
- Consideraremos únicamente los regímenes permanentes continuo y sinusoidal (representados simultáneamente por V e I; aunque hablemos de impedancias y admitancias, si nos referimos a continua, aquéllas son resistencias y conductancias).

Con la indicación de que las polaridades de las tensiones y los sentidos de las corrientes están definidos previamente se quiere indicar que tales polaridades y sentidos son los que hay que utilizar en cualquier referencia que se haga a los parámetros característicos. De lo contrario, algunas de las expresiones matemáticas incluidas en las diapositivas siguientes son incorrectas.

UVigo / E. Ing. Telecomunicación / Análisis de circuitos lineales / Tema IV: Cuadripolos 105

Parámetros característicos de cuadripolos

Impedancia (z)	$V_1 = I_1 z_{11} + I_2 z_{12}$ $V_2 = I_1 z_{21} + I_2 z_{22}$	$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}$
Admitancia (y)	$I_1 = V_1 y_{11} + V_2 y_{12}$ $I_2 = V_1 y_{21} + V_2 y_{22}$	$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}$
Híbridos (h)	$V_1 = I_1 h_{11} + V_2 h_{12}$ $I_2 = I_1 h_{21} + V_2 h_{22}$	$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} I_1 \\ V_2 \end{bmatrix}$
Híbridos (g)	$I_1 = V_1 g_{11} + I_2 g_{12}$ $V_2 = V_1 g_{21} + I_2 g_{22}$	$\begin{bmatrix} I_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} V_1 \\ I_2 \end{bmatrix}$
Cascada o transmisión (abcd)	$V_1 = V_2 a - I_2 b$ $I_1 = V_2 c - I_2 d$	$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} V_2 \\ -I_2 \end{bmatrix}$

Cuadripolos recíprocos. Cumplen las relaciones (si cumplen una, cumplen todas) siguientes:

$$z_{12} = z_{21} \qquad y_{12} = y_{21}$$
$$h_{12} = -h_{21} \qquad g_{12} = -g_{21} \qquad ad - bc = 1$$

Cuadripolos simétricos. Son recíprocos y, además, cumplen las relaciones (si cumplen una, cumplen todas) siguientes:

$$z_{11} = z_{22} \qquad y_{11} = y_{22}$$
$$h_{11}h_{22} - h_{12}h_{21} = 1 \qquad g_{11}g_{22} - g_{12}g_{21} = 1 \qquad a = d$$

Dpto. Teoría de la Señal y Comunicaciones / enrique.sanchez@uvigo.es / www.webs.uvigo.es

Los símbolos de corrientes y tensiones denotan fasores si se está haciendo referencia al régimen sinusoidal permanente. Los símbolos de los parámetros también pueden ser escritos utilizando letras mayúsculas.

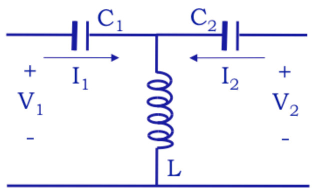
Hay más juegos de parámetros característicos además de los indicados en la diapositiva. Por ejemplo, en alta frecuencia (es decir, para frecuencias superiores a unos pocos GHz) es muy habitual utilizar los parámetros S (de *scattering*, dispersión; en este caso lo más común es emplear letras mayúsculas), que están referidos a las potencias en las puertas del circuito.

Las características de reciprocidad y simetría están relacionadas con la variación que experimenta el comportamiento del circuito si se invierten las posiciones de las puertas de entrada y salida. Para comprobar si el cuadripolo reúne o no estas características basta con ver si se cumplen las condiciones respectivas utilizando un único juego de parámetros; si las condiciones se verifican con un juego dado de parámetros, entonces se verifican siempre, sean cuales sean los parámetros que se empleen para representar el comportamiento del circuito.

Obsérvese que, en continua, los parámetros permanecen constantes aunque cambien las condiciones de la excitación, mientras que en régimen sinusoidal los parámetros cambian si lo hace la frecuencia de aquélla.

Obtención de parámetros característicos de cuadripolos

Por comparación a partir del conocimiento previo del circuito (ejemplo)



En el circuito de la figura se cumplen las ecuaciones de malla

$$V_1 = I_1\left(\frac{1}{j\omega C_1} + j\omega L\right) + I_2 j\omega L$$

$$V_2 = I_1 j\omega L + I_2\left(\frac{1}{j\omega C_2} + j\omega L\right)$$

Los parámetros z se definen mediante las expresiones

$$V_1 = I_1 z_{11} + I_2 z_{12}$$

$$V_2 = I_1 z_{21} + I_2 z_{22}$$

Comparando término a término los dos juegos de expresiones

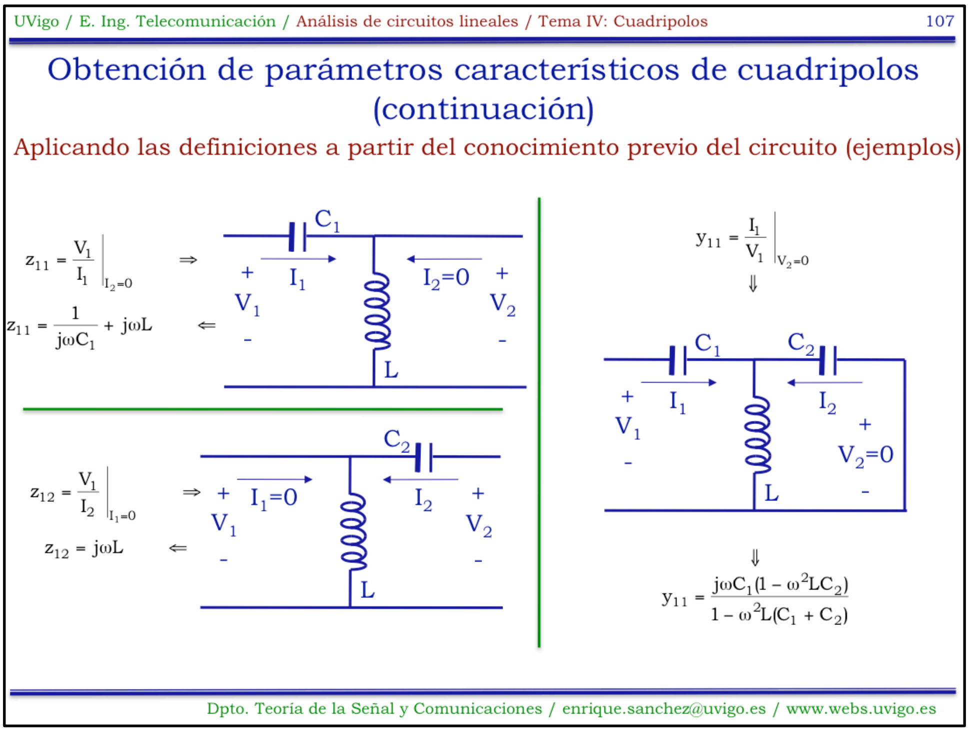
$$z_{11} = \frac{1}{j\omega C_1} + j\omega L \qquad z_{12} = j\omega L$$

$$z_{21} = j\omega L \qquad z_{22} = \frac{1}{j\omega C_2} + j\omega L$$

Obsérvese que el cuadripolo es recíproco ($z_{12} = z_{21}$).

Es simétrico si $C_1 = C_2$, ya que en ese caso $z_{11} = z_{22}$.

Aunque no se diga explícitamente se supone que el circuito funciona en régimen sinusoidal permanente, con lo que los símbolos de corrientes y tensiones, pese a no estar escritos en negrita, denotan fasores.



Para calcular y_{11} téngase en cuenta que la impedancia total del circuito en las condiciones en las que se define el parámetro es el paralelo de L y C_2 en serie con C_1 y que la admitancia total es el inverso de dicha impedancia total.

Obtención de parámetros característicos de cuadripolos (continuación)

A partir del conocimiento previo de otros parámetros (ejemplo)

Se conocen los parámetros de impedancia de un cuadripolo

$$V_1 = I_1 z_{11} + I_2 z_{12} \qquad (1a)$$
$$V_2 = I_1 z_{21} + I_2 z_{22} \qquad (1b)$$

Despejando I_1 de (1a) y sustituyendo el resultado en (1b)

$$I_1 = \frac{V_2 - I_2 z_{22}}{z_{21}} \qquad (2a)$$
$$V_1 = \frac{V_2 z_{11} + I_2(z_{12}z_{21} - z_{11}z_{22})}{z_{21}} \qquad (2b)$$

Reordenando (2)

$$V_1 = V_2 \frac{z_{11}}{z_{21}} - I_2 \frac{z_{11}z_{22} - z_{12}z_{21}}{z_{21}} \qquad (3a)$$
$$I_1 = \frac{V_2}{z_{21}} - I_2 \frac{z_{22}}{z_{21}} \qquad (3b)$$

Comparando (3) con la definición de los parámetros de transmisión

$$a = \frac{z_{11}}{z_{21}} \qquad b = \frac{z_{11}z_{22} - z_{12}z_{21}}{z_{21}}$$
$$c = \frac{1}{z_{21}} \qquad d = \frac{z_{22}}{z_{21}}$$

Este procedimiento consiste, en definitiva, en manipular las ecuaciones que definen los parámetros cuyos valores se conocen hasta obtener otras dos ecuaciones formalmente idénticas a las que definen los parámetros cuyos valores se pretende determinar, y a continuación efectuar una identificación término a término.

Obtención de parámetros característicos de cuadripolos (continuación)

A partir del conocimiento previo de otros parámetros (continuación, J. W. Nilsson)

z_{11}	y_{22}/Δ_y	a/c	Δ_h/h_{22}	$1/g_{11}$
z_{12}	$-y_{12}/\Delta_y$	Δ_{abcd}/c	h_{12}/h_{22}	$-g_{12}/g_{11}$
z_{21}	$-y_{21}/\Delta_y$	$1/c$	$-h_{21}/h_{22}$	g_{21}/g_{11}
z_{22}	y_{11}/Δ_y	d/c	$1/h_{22}$	Δ_g/g_{11}
y_{11}	z_{22}/Δ_z	d/b	$1/h_{11}$	Δ_g/g_{22}
y_{12}	$-z_{12}/\Delta_z$	$-\Delta_{abcd}/b$	$-h_{12}/h_{11}$	g_{12}/g_{22}
y_{21}	$-z_{21}/\Delta_z$	$-1/b$	h_{21}/h_{11}	$-g_{21}/g_{22}$
y_{22}	z_{11}/Δ_z	a/b	Δ_h/h_{11}	$1/g_{22}$
a	z_{11}/z_{21}	$-y_{22}/y_{21}$	$-\Delta_h/h_{21}$	$1/g_{21}$
b	Δ_z/z_{21}	$-1/y_{21}$	$-h_{11}/h_{21}$	g_{22}/g_{21}
c	$1/z_{21}$	$-\Delta_y/y_{21}$	$-h_{22}/h_{21}$	g_{11}/g_{21}
d	z_{22}/z_{11}	$-y_{11}/y_{21}$	$-1/h_{21}$	Δ_g/g_{21}

Δ_z/z_{22}	$1/y_{11}$	b/d	g_{22}/Δ_g	h_{11}
z_{12}/z_{22}	$-y_{12}/y_{11}$	Δ_{abcd}/d	$-g_{12}/\Delta_g$	h_{12}
$-z_{21}/z_{22}$	y_{21}/y_{11}	$-1/d$	$-g_{21}/\Delta_g$	h_{21}
$1/z_{22}$	Δ_y/y_{11}	c/d	g_{11}/Δ_g	h_{22}
$1/z_{11}$	Δ_y/y_{22}	c/a	h_{22}/Δ_h	g_{11}
$-z_{12}/z_{11}$	y_{12}/y_{22}	$-\Delta_{abcd}/a$	$-h_{12}/\Delta_h$	g_{12}
z_{21}/z_{11}	$-y_{21}/y_{22}$	$1/a$	$-h_{21}/\Delta_h$	g_{21}
Δ_z/z_{11}	$1/y_{22}$	b/a	h_{11}/Δ_h	g_{22}

$\Delta_z = z_{11}z_{22} - z_{12}z_{21}$ $\quad \Delta_y = y_{11}y_{22} - y_{12}y_{21}$ $\quad \Delta_{abcd} = ad - bc$ $\quad \Delta_h = h_{11}h_{22} - h_{12}h_{21}$ $\quad \Delta_g = g_{11}g_{22} - g_{12}g_{21}$

Obsérvese que, excepto en los casos de los parámetros de impedancia y admitancia (que tienen dimensiones de Ω y S, respectivamente), los distintos juegos de parámetros no son homogéneos desde un punto de vista dimensional. Así, por ejemplo, h_{11} tiene dimensiones de impedancia, mientras que h_{22}, de admitancia, y a, h_{12} y g_{12} son adimensionales.

Obtención de parámetros característicos de cuadripolos (continuación)

A partir de medidas sobre el circuito (ejemplo)

Un cuadripolo recíproco opera en régimen permanente continuo. Sobre él se realizan tres medidas:

Medida 1 :	$V_1 = 100\ \text{V}$	$I_1 = 20\ \text{A}$	$I_2 = 0\ \text{A}$
Medida 2 :	$V_1 = 0\ \text{V}$	$I_1 = 8\ \text{A}$	$V_2 = 2\ \text{V}$
Medida 3 :	$I_1 = 0\ \text{A}$	$V_2 = 3\ \text{V}$	$I_2 = 1\ \text{A}$

Se pretende determinar los parámetros de impedancia (son todos positivos).

Parámetros z

$$V_1 = I_1 z_{11} + I_2 z_{12} \qquad (1a)$$
$$V_2 = I_1 z_{21} + I_2 z_{22} \qquad (1b)$$

Condición de reciprocidad

$$z_{12} = z_{21} \qquad (2)$$

Despejando I_2 de (1b),
sustituyendo el resultado en (1a)
y sustituyendo (2) en el resultado anterior

$$V_1 = I_1\left(z_{11} - \frac{z_{12}^2}{z_{22}}\right) + V_2 \frac{z_{12}}{z_{22}} \qquad (3)$$

Medida 1 en (1a) $\Rightarrow$ $z_{11} = \dfrac{V_1 - I_2 z_{12}}{I_1} = 5\ \Omega$

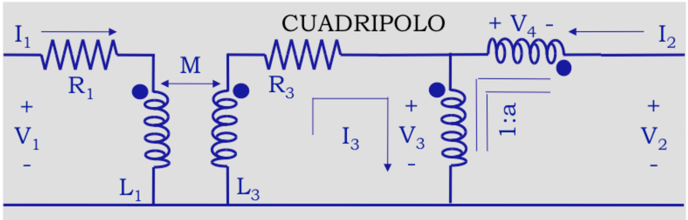
Medida 3 en (1b) $\Rightarrow$ $z_{22} = \dfrac{V_2 - I_1 z_{21}}{I_2} = 3\ \Omega$

Medida 2 en (3) $\Rightarrow$ $I_1 \dfrac{z_{12}^2}{z_{22}} - V_2 \dfrac{z_{12}}{z_{22}} + (V_1 - I_1 z_{11}) = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left| \begin{array}{l} z_{12} = z_{21} = 4\ \Omega \\ z_{12} = z_{21} = -3.75\ \Omega \text{ (no vale)} \end{array} \right.$$

En definitiva, este procedimiento consiste en sustituir los datos de las medidas en las ecuaciones que definen los parámetros que se pretende obtener hasta conseguir formular un sistema de ecuaciones del que puedan extraerse los valores de tales parámetros.

Obtención de parámetros característicos de cuadripolos (ejemplo)



El circuito funciona en régimen sinusoidal permanente a una frecuencia angular ω.
Son datos las características de todos los elementos.
¿Parámetros de impedancia?

Ecuaciones del circuito

$$V_1 = I_1(R_1 + j\omega L_1) - I_3 j\omega M \qquad (1a)$$

$$0 = -I_1 j\omega M + I_3(j\omega L_3 + R_3) + V_3 \qquad (1b)$$

$$V_3 = V_4 + V_2 \qquad (1c)$$

$$\frac{V_4}{V_3} = -a \qquad \frac{I_3 + I_2}{I_2} = -a \qquad (1d) \quad (1e)$$

Comparando (2c-d) con la definición de los parámetros z

$$z_{11} = R_1 + j\omega L_1$$

$$z_{12} = (1 + a)j\omega M$$

$$z_{21} = (1 + a)j\omega M$$

$$z_{22} = (1 + a)^2(R_3 + j\omega L_3)$$

Despejando I_3 de (1e) $\qquad I_3 = -I_2(1 + a) \qquad$ (2a)

Despejando V_4 de (1c – d) $\qquad V_3 = \dfrac{V_2}{1 + a} \qquad$ (2b)

Sustituyendo (2a – b) en (1a – b)

$$V_1 = I_1(R_1 + j\omega L_1) + I_2(1 + a)j\omega M \qquad (2c)$$

$$V_2 = I_1(1 + a)j\omega M + I_2(1 + a)^2(R_3 + j\omega L_3) \qquad (2d)$$

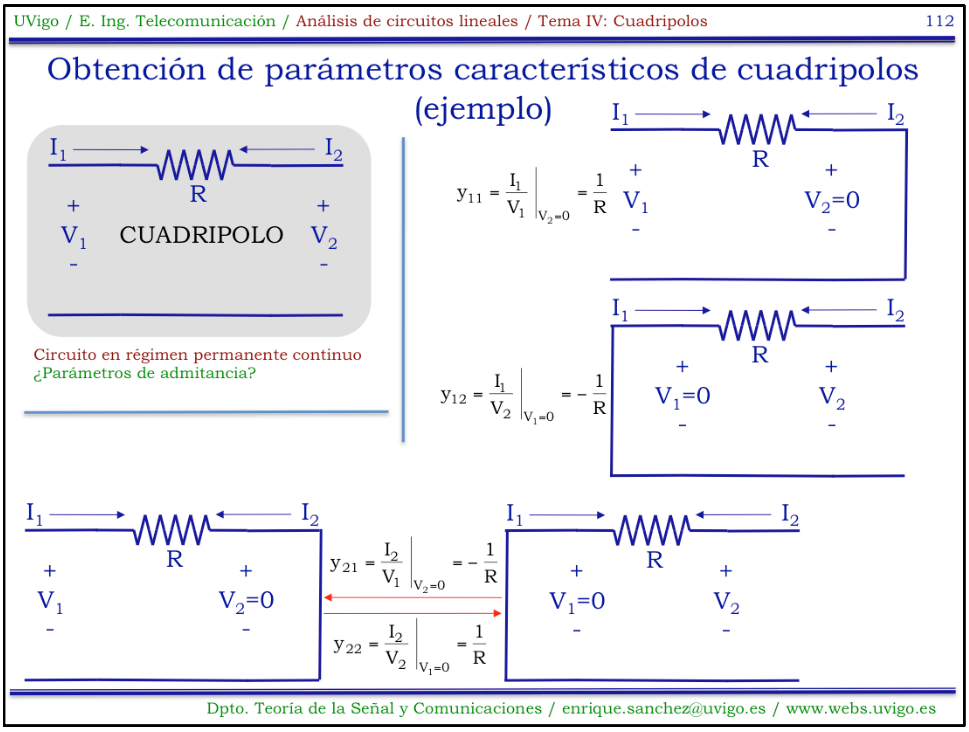
Dpto. Teoría de la Señal y Comunicaciones / enrique.sanchez@uvigo.es / www.webs.uvigo.es

Por coherencia con el resto de la presentación de este tema sigue omitiéndose la utilización de la negrita en la representación de los fasores de tensiones y corrientes que aparecen en la figura.

Cuando se trata de obtener por comparación un juego de parámetros característicos de un circuito el procedimiento consiste en definitiva en eliminar todas las corrientes y tensiones distintas de las correspondientes a las puertas de entrada y salida del cuadripolo, ya que los parámetros característicos están referidos a lo que ocurre en tales puertas.

Obsérvese que los parámetros obtenidos en el problema varían cuando lo hace la frecuencia angular de la excitación.

Incidentalmente nótese el tratamiento que recibe un transformador ideal en el que las bobinas del primario y el secundario tienen un terminal común (lo cual, dicho sea de paso, impide la reflexión de impedancias en cualquier sentido).

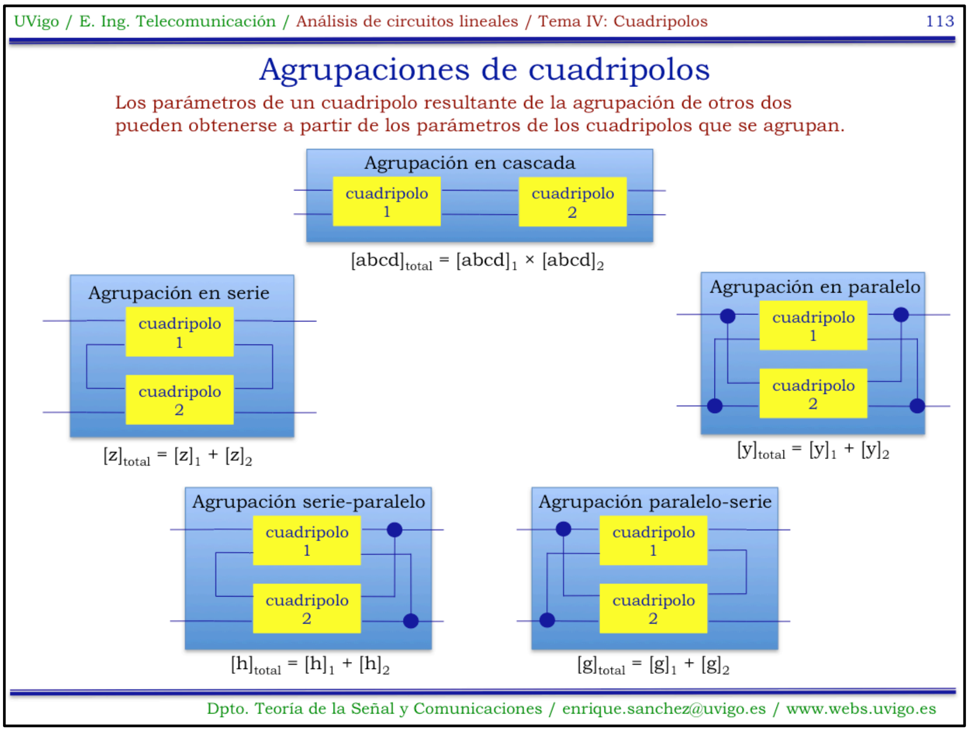


Si se quiere determinar los parámetros por comparación, las ecuaciones del circuito a utilizar son

$$V_1 = I_1R + V_2$$

$$I_1 = I_2$$

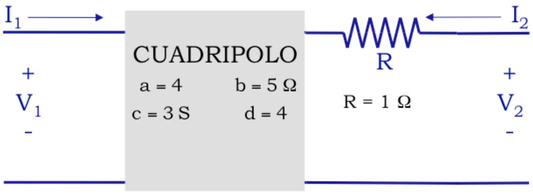
Obsérvese que, aunque los valores de los elementos pasivos sólo pueden ser positivos, los parámetros característicos de un cuadripolo pueden ser negativos.



Estrictamente hablando sólo es correcta la fórmula correspondiente a la agrupación de cuadripolos en cascada. Para que las restantes también sean válidas las corrientes de entrada y salida de los cuadripolos han de cumplir ciertas condiciones, que no se indicarán aquí por sencillez de la exposición. En cualquier caso, a todo lo largo de este texto se supondrá que tales condiciones se cumplen y que, por tanto, son válidas las fórmulas mostradas en la diapositiva.

En una agrupación de cuadripolos se cumple una determinada relación entre los parámetros característicos del conjunto y los correspondientes a los cuadripolos individuales. Ahora bien, tal relación se cumple exclusivamente para los parámetros de un único tipo. En otras palabras, y a título de ejemplo, que los parámetros abcd de una agrupación en cascada sean el resultado de multiplicar las matrices de los parámetros equivalentes en los cuadripolos individuales no implica que se verifique una relación similar para los parámetros de impedancia.

Agrupaciones de cuadripolos (ejemplo)



Circuito en régimen permanente continuo
¿Parámetros de transmisión del circuito total?

Se trata de la agrupación en cascada de dos cuadripolos. En el segundo se tiene (véase una diapositiva anterior)

$$y_{11} = 1\,\mathrm{S} \qquad y_{12} = -1\,\mathrm{S}$$
$$y_{21} = -1\,\mathrm{S} \qquad y_{22} = 1\,\mathrm{S}$$

Utilizando las tablas de conversión de parámetros

$$a = -\frac{y_{22}}{y_{21}} = 1 \qquad b = -\frac{1}{y_{21}} = 1\,\Omega$$

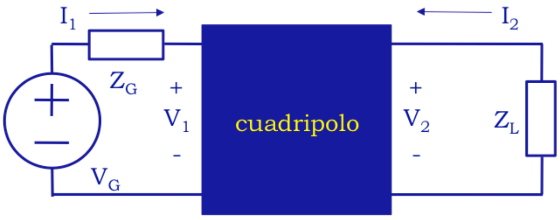
$$c = -\frac{\Delta_y}{y_{21}} = 0\,\mathrm{S} \qquad d = -\frac{y_{11}}{y_{21}} = 1$$

$$\Delta_y = y_{11}y_{22} - y_{12}y_{21}$$

AGRUPACIÓN

$$[abcd]_{total} = [abcd]_{cuad} \times [abcd]_R = \begin{bmatrix} 4 & 5\,\Omega \\ 3\,\mathrm{S} & 4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 1\,\Omega \\ 0\,\mathrm{S} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 9\,\Omega \\ 3\,\mathrm{S} & 7 \end{bmatrix}$$

Inserción de un cuadripolo en un circuito



El esquema de la figura se caracteriza por

- las ecuaciones $V_G = I_1 Z_G + V_1$, $V_2 = - I_2 Z_L$
- y dos ecuaciones correspondientes a un juego de parámetros.

A partir de las cuatro ecuaciones es posible hallar:

- Las impedancias de entrada y salida (con la salida o la entrada en cortocircuito o circuito abierto).
- Las ganancias de corriente, tensión y potencia.
- Equivalentes de Thévenin.
- Impedancia de carga para máxima potencia.
- Etcétera.

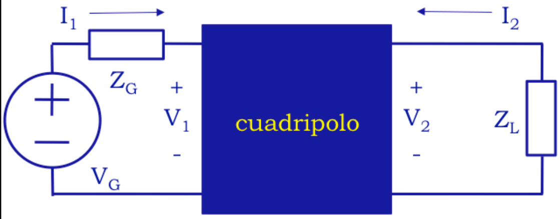
Pese a su sencillez, se trata del esquema más utilizado en la práctica para considerar un circuito como cuadripolo en el contexto de un circuito mayor. Téngase en cuenta que V_G y Z_G pueden aparecer como el circuito equivalente de Thévenin de un circuito más complejo al que se conecta la puerta de entrada del cuadripolo.

Se recomienda prestar una atención especial al hecho de que, en la segunda de las ecuaciones indicadas, la relación entre V_2 e I_2 está afectada por un signo menos.

En el cálculo del circuito equivalente de Thévenin en la puerta de salida, V_{Th} coincide con V_2, mientras que la corriente de Norton (I_N) circula en el sentido opuesto a I_2. Es decir, I_N = - I_2 con la salida en cortocircuito (obtenido sustituyendo Z_L por una conexión directa entre los terminales superior e inferior).

UVigo / E. Ing. Telecomunicación / Análisis de circuitos lineales / Tema IV: Cuadripolos 116

Inserción de un cuadripolo en un circuito (ejemplo)



Circuito en régimen sinusoidal permanente a una frecuencia angular fija.
¿V_2/V_G con la salida en circuito abierto en función de los parámetros de impedancia?

Se elimina Z_L quedando al aire los dos terminales de la puerta de salida. Por tanto, no hay corriente en dicha puerta.

Ecuaciones

$$V_G = I_1 Z_G + V_1 \quad \text{(1a)}$$
$$V_1 = I_1 z_{11} + I_2 z_{12} \quad \text{(1b)}$$
$$V_2 = I_1 z_{21} + I_2 z_{22} \quad \text{(1c)}$$
$$V_2 = - I_2 Z_L \quad \text{(1d)}$$
$$I_2 = 0 \text{ A} \quad \text{(1e)}$$

(1e) en (1b) $\quad V_1 = I_1 z_{11} \quad$ (2a)

(2a) en (1a) $\quad I_1 = \dfrac{V_G}{Z_G + z_{11}} \quad$ (2b)

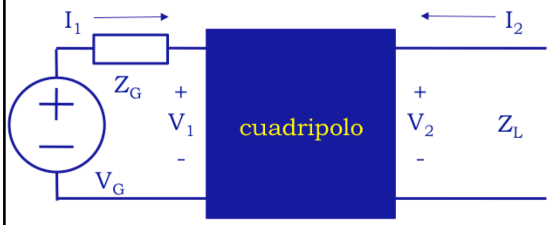
(1a) y (2b) en (1c) $\quad \dfrac{V_2}{V_G} = \dfrac{z_{21}}{Z_G + z_{11}}$

Dpto. Teoría de la Señal y Comunicaciones / enrique.sanchez@uvigo.es / www.webs.uvigo.es

Hay una quinta ecuación porque hay que incluir la condición particular (salida en circuito abierto) impuesta en el enunciado.

Obsérvese que el hecho de que I_2 sea nula no implica que también lo sea V_2 (recuérdese que en un circuito abierto la corriente es nula, pero puede haber tensión). Esto puede explicarse asumiendo que Z_L tiene un valor infinito cuando la salida está en circuito abierto, con lo que el producto de 0 por ∞ no es necesariamente nulo.

Inserción de un cuadripolo en un circuito (ejemplo)



Circuito en régimen sinusoidal permanente a una frecuencia angular fija.
¿Circuito equivalente de Thévenin en la salida en función de los parámetros hibridos h?

Ecuaciones

$$V_G = I_1 Z_G + V_1$$
$$V_1 = I_1 h_{11} + V_2 h_{12}$$
$$I_2 = I_1 h_{21} + V_2 h_{22}$$
$$V_2 = -I_2 Z_L$$

$$I_2 = 0\ \text{A} \quad \Rightarrow \quad V_2 = \frac{h_{21} V_G}{h_{12} h_{21} - h_{22}(Z_G + h_{11})} = V_{Th}$$

$$V_2 = 0\ \text{V} \quad \Rightarrow \quad I_2 = \frac{h_{21} V_G}{Z_G + h_{11}} = -I_N$$

$$Z_{Th} = \frac{V_{Th}}{I_N} = -\frac{Z_G + h_{11}}{h_{12} h_{21} - h_{22}(Z_G + h_{11})}$$