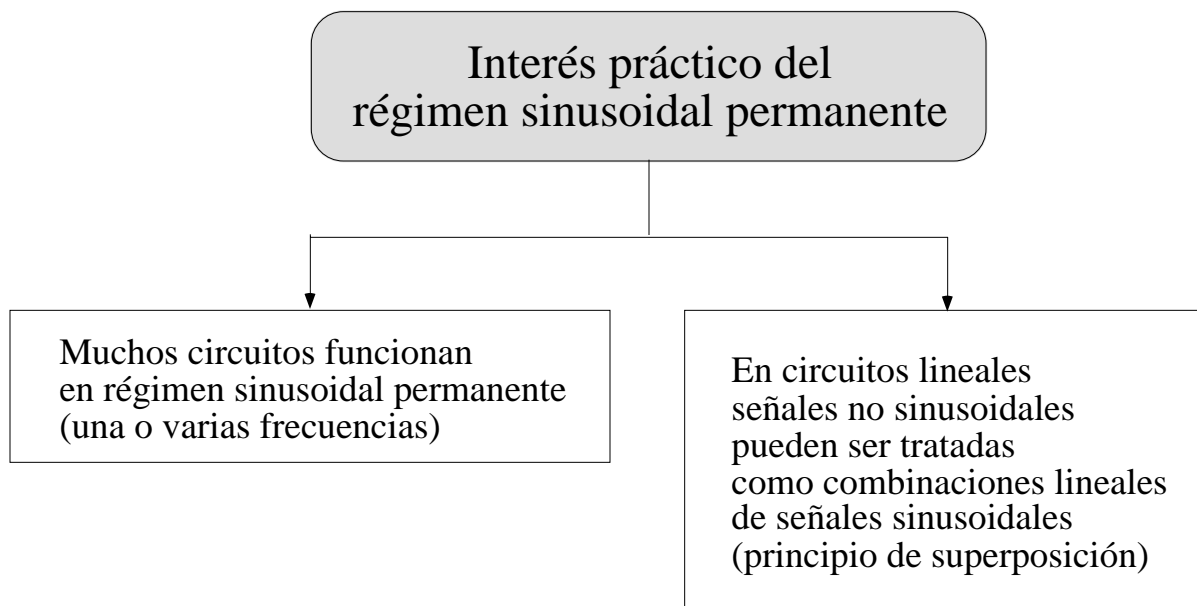

Tema III: Régimen sinusoidal permanente

Señales sinusoidales (régimen permanente)	105
Representación gráfica de señales sinusoidales (régimen permanente)	105
Caracterización matemática de señales sinusoidales (régimen permanente).....	106
Respuesta de un circuito a una excitación sinusoidal	107
Observaciones y procedimiento	108
Identidades de Euler y números complejos	109
Fasores	110
Impedancias	111
Caracterización de elementos pasivos en régimen sinusoidal	111
Relaciones funcionales en régimen sinusoidal	111
Ley de Ohm generalizada.....	111
Impedancias de elementos pasivos simples	112
Agrupación de elementos pasivos	112
Agrupación de elementos activos	112
Análisis en régimen sinusoidal	113
Ejemplo de análisis por mallas	114
Ejemplo de análisis por nudos	115
Inducción mutua	116
Caracterización de la autoinducción	116
Caracterización de la inducción mutua	117
Tensión total	117
Tensión total en régimen sinusoidal permanente	117
Ejemplo 1 de circuito con inducción mutua.....	118
Ejemplo 2 de circuito con inducción mutua.....	119
Transformadores	120
Transformador lineal	121
Reflexión de impedancias en un transformador lineal	121
Ejemplo 1 de circuito con transformador lineal	122
Ejemplo 2 de circuito con transformador lineal	123

Transformador ideal	124
Reflexión de impedancias en un transformador ideal	125
Ejemplo de circuito con transformador ideal	126
Circuitos con transformadores	127
Ejemplo 1	127
Ejemplo 2	128
Ejemplo 3	129
Observaciones	130
Potencia en régimen sinusoidal permanente	131
Definiciones	131
Valores eficaces	132
Caso particular	132
Ejemplo 1 de cálculo de potencias	133
Ejemplo 2 de cálculo de potencias	134
Equivalente Thèvenin	135
Equivalentes en régimen sinusoidal permanente	135
Obtención de la impedancia equivalente	136
Desactivación de fuentes independientes	136
Máxima transferencia de potencia	137
Casos particulares	137
Equivalente Thèvenin en régimen permanente continuo	137
Ejemplo 1 de cálculo de equivalente Thèvenin	138
Ejemplo 2 de cálculo de equivalente Thèvenin	140
Ejemplo 3 de cálculo de equivalente Thèvenin	142
Ejemplos de análisis en régimen sinusoidal	144
Ejemplo 1 de análisis en régimen sinusoidal	144
Ejemplo 2 de análisis en régimen sinusoidal	145
Ejemplo 3 de análisis en régimen sinusoidal	146
Ejemplo 4 de análisis en régimen sinusoidal	147
Ejemplo 5 de análisis en régimen sinusoidal	148
Ejemplo 6 de análisis en régimen sinusoidal	149
Ejemplo 7 de análisis en régimen sinusoidal	151
Ejercicios de repaso	153
Análisis en régimen sinusoidal / 1	153
Análisis en régimen sinusoidal / 2	154
Respuesta en frecuencia	155
Respuesta en frecuencia de resonadores ideales	156
Caracterización matemática de la respuesta en frecuencia	157
Elementos reactivos y respuesta en frecuencia	158
Ejemplo 1 de respuesta en frecuencia	159
Ejemplo 2 de respuesta en frecuencia	161
Ejemplo 3 de respuesta en frecuencia	162
Ejemplo 4 de respuesta en frecuencia	163
Ejemplo 5 de respuesta en frecuencia	165
Ejemplo 6 de respuesta en frecuencia	166
Ejemplo 7 de respuesta en frecuencia	167
Ejemplo 8 de respuesta en frecuencia	169
Ejemplo 9 de respuesta en frecuencia	170
Ejemplo 10 de respuesta en frecuencia	171

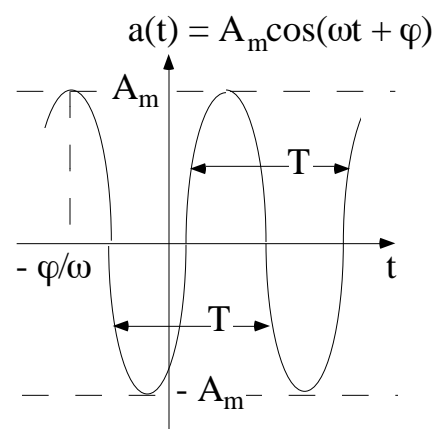
Aplicación del principio de superposición	172
Ejemplo 1 de aplicación del principio de superposición	173
Ejemplo 2 de aplicación del principio de superposición	175
Ejemplo 3 de aplicación del principio de superposición	177
Ejercicios de repaso	179
Respuesta en frecuencia	179
Aplicación del principio de superposición.....	180

Señales sinusoidales (régimen permanente)

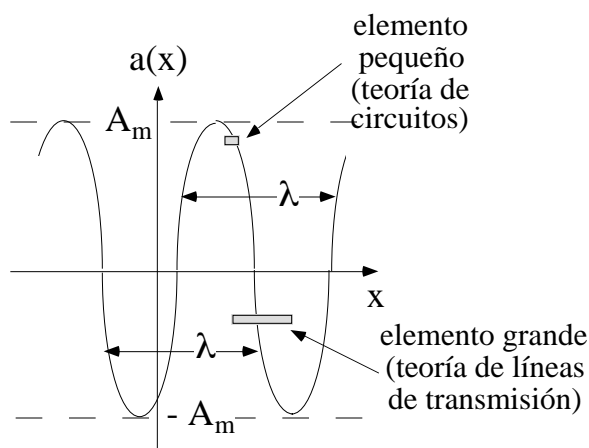


Representación gráfica de señales sinusoidales (régimen permanente)

Variación con el tiempo de la señal (a: corriente, tensión) en un punto dado de un elemento de circuito



Variación con la distancia de la señal (a: corriente, tensión) en los puntos de un elemento de circuito en un instante dado



Caracterización matemática de señales sinusoidales (régimen permanente)

Símbolo	Significado	Dimensiones
a	Corriente, tensión	A, V
A_m	Módulo, amplitud	A, V
$T = \frac{1}{f}$	Periodo; separación temporal entre dos instantes en los que las condiciones (valor y derivada) son idénticas	s
$f = \frac{1}{T}$	Frecuencia	Hz, s ⁻¹
$\omega = 2\pi f$	Frecuencia angular	rad/s, s ⁻¹
φ	Fase	rad, °
$\lambda = \frac{c}{f}$	Longitud de onda; separación longitudinal entre dos puntos en los que las condiciones (valor y derivada) son idénticas	m
c	Velocidad de la luz en el elemento (en vacío, $c = 3 \times 10^8$ m/s)	m/s

f, T, ω , λ y c son siempre positivos.

A_m puede ser positivo o negativo. Pero, recordando que

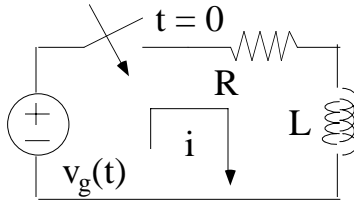
$$-|A_m|\cos(\omega t + \varphi) = |A_m|\cos(\omega t + \varphi + 180^\circ)$$

es habitual considerar que el módulo siempre es positivo e introducir, en su caso, una fase adicional de 180 °.

φ puede ser positiva o negativa. Debe tomarse la precaución de expresar el argumento de la función coseno en unidades homogéneas (radianes o grados).

En **régimen permanente** los valores de A_m , f y φ permanecen constantes durante mucho tiempo ($t \gg T$).

Respuesta de un circuito a una excitación sinusoidal



$$v_g(t) = V_m \cos(\omega t + \varphi_v)$$

El circuito de la figura ha permanecido mucho tiempo sin cambios antes del cierre del interruptor. Una vez producido éste, ya no experimenta más cambios.

Se desea obtener la respuesta del circuito para $t > 0$.

Son datos los valores de V_m , ω , φ_v , R y L .

Para $t > 0$ se tiene

$$V_m \cos(\omega t + \varphi_v) = Ri + L \frac{di}{dt} \quad \text{Ecuación diferencial que caracteriza la evolución temporal de } i \text{ para } t > 0$$

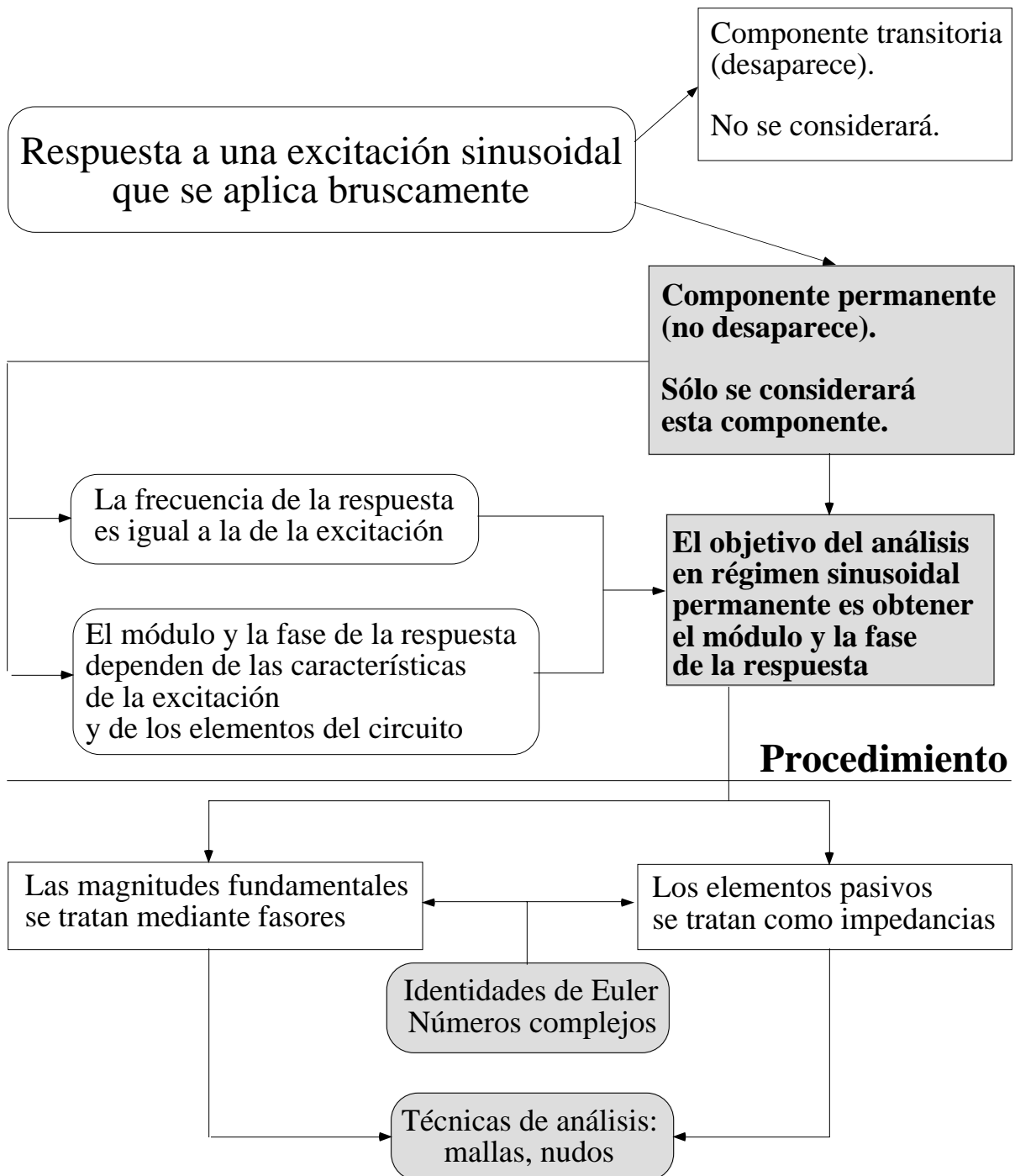
La solución de una ecuación diferencial como la indicada es de la forma

$$\begin{aligned} i(t) &= -I_m \cos(\varphi_i) e^{-t/\tau} + I_m \cos(\omega t + \varphi_i) \\ \text{respuesta} &= \text{transitorio} + \text{permanente} \\ &\quad \text{(desaparece para } t > 5\tau) \end{aligned}$$

$$I_m = \frac{V_m}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}}, \quad \varphi_i = \varphi_v - \arctg\left(\frac{\omega L}{R}\right)$$

Observaciones y procedimiento

Las siguientes observaciones se deducen del ejemplo anterior, pero tienen validez general.



Identidades de Euler y números complejos

Sean a y b dos números reales cualesquiera.

Un número complejo, z , construido a partir de tales números puede expresarse en cualquiera de las formas siguientes, que son todas equivalentes entre sí:

$$z = a + jb \equiv ke^{j\theta} \equiv k_{\angle\theta} \equiv k\cos(\theta) + jk\sin(\theta)$$

siendo

unidad de los números imaginarios

$$j = \sqrt{-1}$$

módulo de z

$$k = \sqrt{a^2 + b^2}$$

fase de z

$$\theta = \arctg\left(\frac{b}{a}\right)$$

parte real de z

$$\operatorname{Re}\{z\} = a \equiv k\cos(\theta) \equiv k\operatorname{Re}\{e^{j\theta}\} \equiv \operatorname{Re}\{ke^{j\theta}\}$$

parte imaginaria de z :

$$\operatorname{Im}\{z\} = b \equiv k\sin(\theta) \equiv k\operatorname{Im}\{e^{j\theta}\} \equiv \operatorname{Im}\{ke^{j\theta}\}$$

complejo conjugado de z :

$$z^* \equiv a - jb \equiv ke^{-j\theta}$$

$$zz^* = k^2 = a^2 + b^2$$

Sean $z_1 = k_1e^{j\theta_1} = a + jb$ y $z_2 = k_2e^{j\theta_2} = c + jd$ dos números complejos.

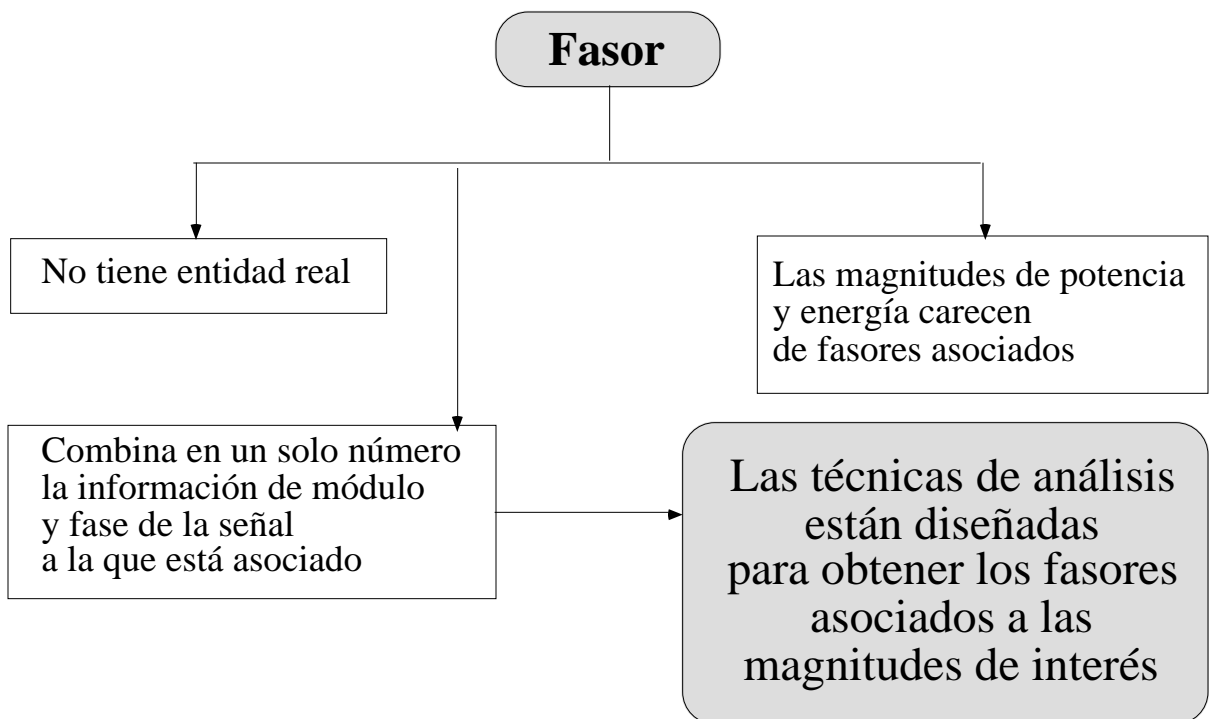
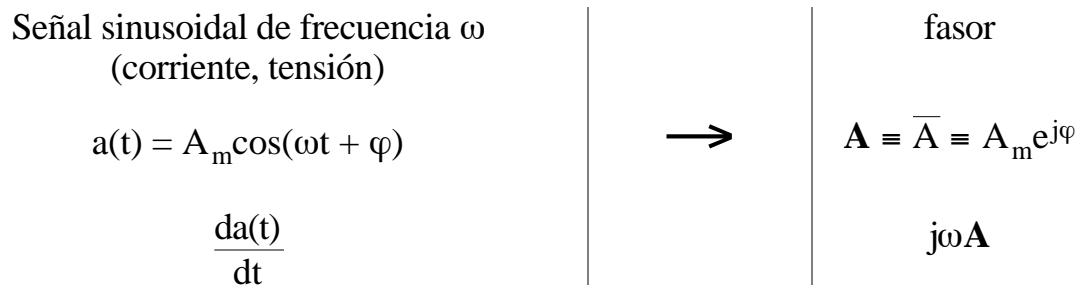
Se verifica

$$z_1z_2 = (k_1k_2)_{\angle\theta_1 + \theta_2} = (ac - bd) + j(ad + bc)$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \left(\frac{k_1}{k_2}\right)_{\angle\theta_1 - \theta_2} = \frac{(a + jb)(c - jd)}{(c + jd)(c - jd)} = \frac{(ac + bd) + j(bc - ad)}{c^2 + d^2}$$

Fasores

Un fasor es un parámetro (complejo, en general) que se asocia a una magnitud temporal de acuerdo con el siguiente esquema:

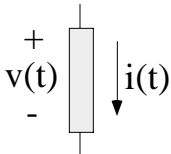


Obtenido un fasor, la expresión temporal (que es lo único que tiene entidad real) correspondiente se determina como sigue:

$$\begin{aligned}
 a(t) &= A_m \operatorname{Re}\left\{e^{j(\omega t + \varphi)}\right\} = \operatorname{Re}\left\{A_m e^{j(\omega t + \varphi)}\right\} = \\
 &= \operatorname{Re}\left\{A_m e^{j\varphi} e^{j\omega t}\right\} = \operatorname{Re}\left\{\mathbf{A} e^{j\omega t}\right\}
 \end{aligned}$$

Impedancias

Caracterización de elementos pasivos en régimen sinusoidal

Elemento (R, L, C)	Corriente y tensión reales (expresiones temporales)	Fasores asociados
	$v(t) = V_m \cos(\omega t + \varphi_v)$ $i(t) = I_m \cos(\omega t + \varphi_i)$	$\mathbf{V} = V_m e^{j\varphi_v}$ $\mathbf{I} = I_m e^{j\varphi_i}$

Relaciones funcionales en régimen sinusoidal

Elemento	Relación funcional	Relación funcional en expresión fasorial	Relación entre fases
R	$v(t) = Ri(t)$	$\mathbf{V} = R\mathbf{I}, \mathbf{I} = \frac{\mathbf{V}}{R}$	$\varphi_v = \varphi_i$
L	$v(t) = L \frac{di(t)}{dt}$	$\mathbf{V} = j\omega L\mathbf{I}, \mathbf{I} = \frac{\mathbf{V}}{j\omega L}$	$\varphi_v = \varphi_i + 90^\circ$
C	$i(t) = C \frac{dv(t)}{dt}$	$\mathbf{I} = j\omega C\mathbf{V}, \mathbf{V} = \frac{\mathbf{I}}{j\omega C}$	$\varphi_v = \varphi_i - 90^\circ$

Las relaciones funcionales están afectadas por un signo menos si la relación entre la polaridad de la tensión y el sentido de la corriente no es la indicada.

Ley de Ohm generalizada

La relación funcional de cualquier elemento pasivo en régimen sinusoidal puede expresarse como

$$\mathbf{V} = Z\mathbf{I} = \frac{\mathbf{I}}{Y}, \mathbf{I} = Y\mathbf{V} = \frac{\mathbf{V}}{Z}, Y \equiv \frac{1}{Z}$$

Impedancias de elementos pasivos simples

Elemento	Z (impedancia)	Y (admitancia)
R	R	$\frac{1}{R}$
L	$j\omega L$	$\frac{1}{j\omega L}$
C	$\frac{1}{j\omega C} = \frac{-j}{\omega C}$	$j\omega C$

Agrupación de elementos pasivos

En régimen sinusoidal se puede agrupar elementos pasivos de distinta naturaleza.

Agrupación en serie	Agrupación en paralelo
$Z_{eq} = Z_1 + Z_2 + \dots + Z_n$ $\frac{1}{Y_{eq}} = \frac{1}{Y_1} + \frac{1}{Y_2} + \dots + \frac{1}{Y_n}$	$\frac{1}{Z_{eq}} = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} + \dots + \frac{1}{Z_n}$ $Y_{eq} = Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n$

La agrupación de elementos de distinta naturaleza da origen a impedancias (admitancias) complejas, con lo que, en general,

Impedancia: $Z[\Omega] = R + jX$

$R[\Omega]$: resistencia

$X[\Omega]$: reactancia

Admitancia: $Y[S] = G + jB$

$G[S]$: conductancia

$B[S]$: susceptancia

Agrupación de elementos activos

Agrupación de fuentes de corriente en paralelo (suma algebraica)

Agrupación de fuentes de tensión en serie (suma algebraica)

$$I_{eq} = I_1 + I_2 + \dots + I_n$$

$$V_{eq} = V_1 + V_2 + \dots + V_n$$

Fuentes independientes, de idéntica naturaleza, y de la misma frecuencia.

Análisis en régimen sinusoidal

El circuito se caracteriza en términos de fasores e impedancias.

Pueden aplicarse las **leyes de Kirchhoff**

$$\sum_{k=1}^{k=n} \mathbf{V}_k = 0 \text{ (suma algebraica; n: número de elementos en una malla)}$$

$$\sum_{k=1}^{k=n} \mathbf{I}_k = 0 \text{ (suma algebraica; n: número de elementos en un nudo)}$$

o procedimientos derivados de aquéllas.

Agrupación de elementos.

Divisores.

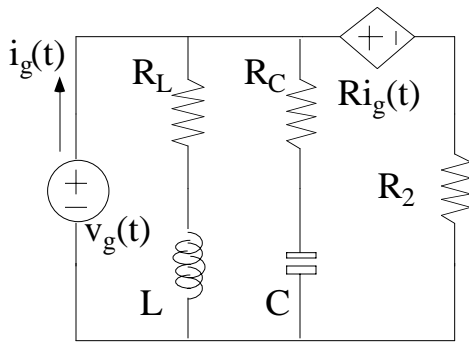
Circuitos equivalentes.

Análisis por mallas o por nudos.

Si el circuito es lineal, se puede aplicar el **principio de superposición**.

Obtenidos los fasores correspondientes a las corrientes y tensiones de interés, se deducen las correspondientes expresiones temporales.

Ejemplo de análisis por mallas



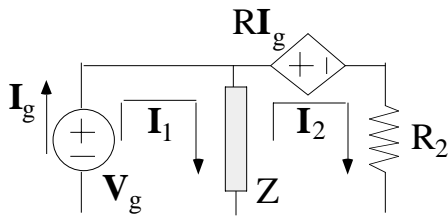
$$v_g(t) = V_m \cos(\omega t + \varphi_v)$$

El circuito de la figura funciona en régimen sinusoidal permanente.

Se desea obtener la expresión temporal de la potencia en R_2 .

$$\begin{aligned} V_m &= 1.41 \text{ V}, \omega = 1 \text{ Mrad/s}, \varphi_v = 45^\circ \\ R &= 1 \Omega, R_L = 3 \Omega, R_C = 1 \Omega, R_2 = 1 \Omega \\ L &= 1 \mu\text{H}, C = 1 \mu\text{F} \end{aligned}$$

Caracterización en términos de fasores e impedancias.
Simplificación del circuito.



$$\begin{aligned} \mathbf{V}_g &= V_m e^{j\varphi_v} = 1 + j \text{ V} \\ \mathbf{Z}_L &= R_L + j\omega L = 3 + j \Omega \\ \mathbf{Z}_C &= R_C + \frac{1}{j\omega C} = 1 - j \Omega \end{aligned}$$

$$\frac{1}{\mathbf{Z}} = \frac{1}{\mathbf{Z}_L} + \frac{1}{\mathbf{Z}_C} \Rightarrow \mathbf{Z} = \frac{\mathbf{Z}_L \mathbf{Z}_C}{\mathbf{Z}_L + \mathbf{Z}_C} = 1 - j0.5 \Omega$$

Ecuaciones de malla

$$\mathbf{V}_g = \mathbf{I}_1 \mathbf{Z} - \mathbf{I}_2 \mathbf{Z}$$

$$0 = -\mathbf{I}_1 \mathbf{Z} + \mathbf{I}_2 (\mathbf{Z} + R_2) + \mathbf{I}_g R$$

Ecuación adicional para la fuente dependiente

$$\mathbf{I}_g = \mathbf{I}_1$$

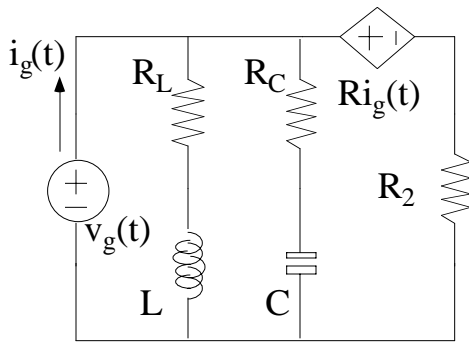
Resolviendo el sistema formado por las tres últimas ecuaciones se obtiene

$$\mathbf{I}_2 = 0.3 - j0.1 \text{ A} \Rightarrow i_2(t) = \text{Re}\left\{\mathbf{I}_2 e^{j\omega t}\right\} = 0.32 \cos\left[10^6 t + \arctg(-0.33)\right] \text{ A (t en s)}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_2 &= R_2 \mathbf{I}_2 = 0.3 - j0.1 \text{ V} \Rightarrow \\ \Rightarrow v_2(t) &= \text{Re}\left\{\mathbf{V}_2 e^{j\omega t}\right\} = 0.32 \cos\left[10^6 t + \arctg(-0.33)\right] \text{ V (t en s)} \end{aligned}$$

$$p_2(t) = v_2(t) i_2(t) = 0.1 \cos^2[10^6 t + \arctg(-0.33)] \text{ W (t en s)}$$

Ejemplo de análisis por nudos



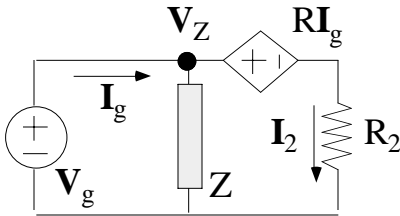
$$v_g(t) = V_m \cos(\omega t + \varphi_v)$$

El circuito de la figura funciona en régimen sinusoidal permanente.

Se desea obtener la expresión temporal de la potencia en R_2 .

$$\begin{aligned} V_m &= 1.41 \text{ V}, \omega = 1 \text{ Mrad/s}, \varphi_v = 45^\circ \\ R &= 1 \Omega, R_L = 3 \Omega, R_C = 1 \Omega, R_2 = 1 \Omega \\ L &= 1 \mu\text{H}, C = 1 \mu\text{F} \end{aligned}$$

Caracterización en términos de fasores e impedancias.
Simplificación del circuito.



$$\begin{aligned} \mathbf{V}_g &= V_m e^{j\varphi_v} = 1 + j \text{ V} \\ \mathbf{Z}_L &= R_L + j\omega L = 3 + j \Omega \\ \mathbf{Z}_C &= R_C + \frac{1}{j\omega C} = 1 - j \Omega \end{aligned}$$

$$\frac{1}{\mathbf{Z}} = \frac{1}{\mathbf{Z}_L} + \frac{1}{\mathbf{Z}_C} \Rightarrow \mathbf{Z} = \frac{\mathbf{Z}_L \mathbf{Z}_C}{\mathbf{Z}_L + \mathbf{Z}_C} = 1 - j0.5 \Omega$$

Ecuación de nudo

$$\mathbf{I}_g = \frac{\mathbf{V}_Z}{\mathbf{Z}} + \mathbf{I}_2$$

Ecuaciones adicionales para las fuentes

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_Z &= \mathbf{V}_g \\ \mathbf{V}_Z &= R \mathbf{I}_g + R_2 \mathbf{I}_2 \end{aligned}$$

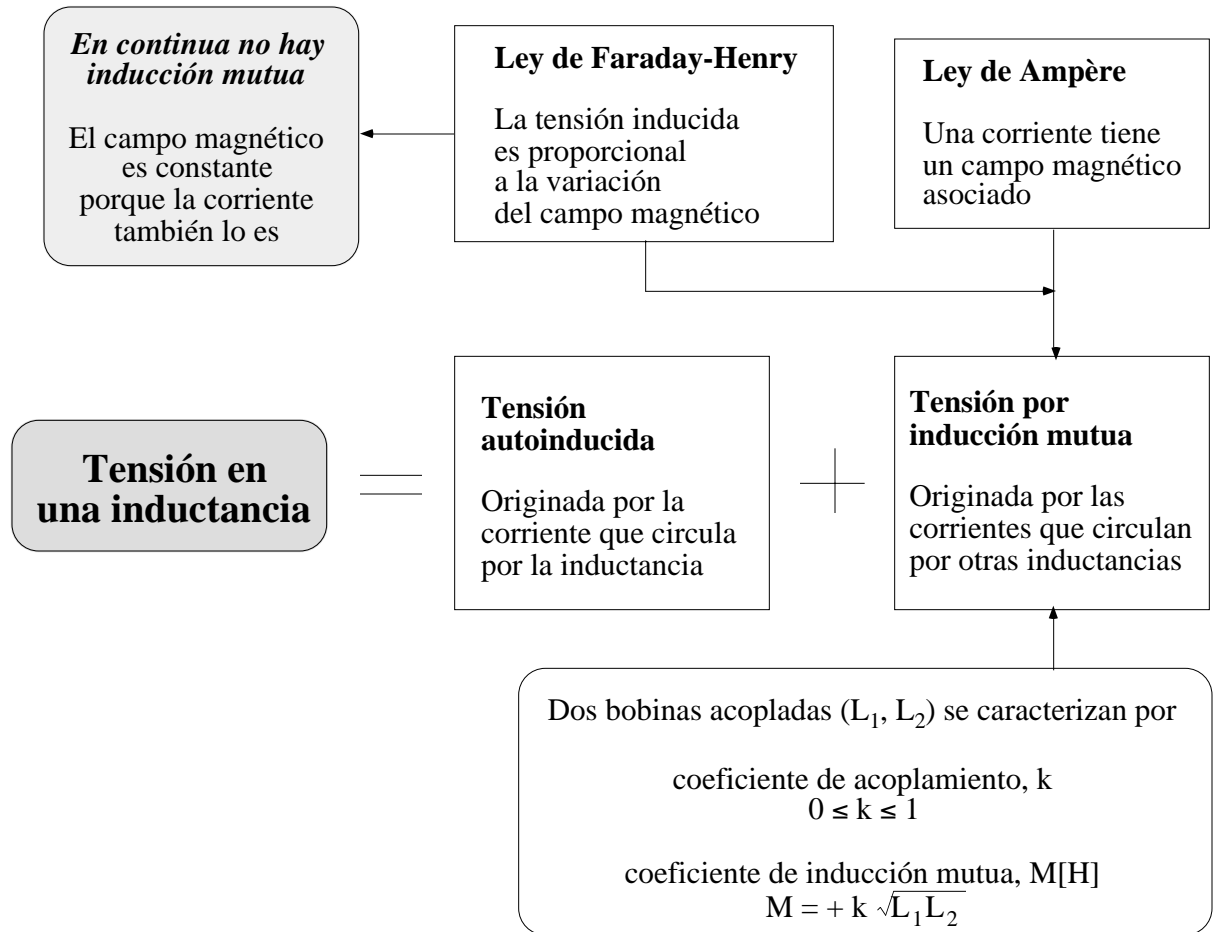
Resolviendo el sistema formado por las tres últimas ecuaciones se obtiene

$$\mathbf{I}_2 = 0.3 - j0.1 \text{ A} \Rightarrow i_2(t) = \text{Re}\left\{\mathbf{I}_2 e^{j\omega t}\right\} = 0.32 \cos\left[10^6 t + \arctg(-0.33)\right] \text{ A (t en s)}$$

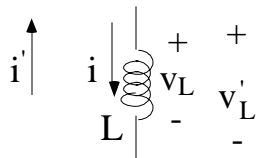
$$\begin{aligned} \mathbf{V}_2 &= R_2 \mathbf{I}_2 = 0.3 - j0.1 \text{ V} \Rightarrow \\ \Rightarrow v_2(t) &= \text{Re}\left\{\mathbf{V}_2 e^{j\omega t}\right\} = 0.32 \cos\left[10^6 t + \arctg(-0.33)\right] \text{ V (t en s)} \end{aligned}$$

$$p_2(t) = v_2(t) i_2(t) = 0.1 \cos^2[10^6 t + \arctg(-0.33)] \text{ W (t en s)}$$

Inducción mutua



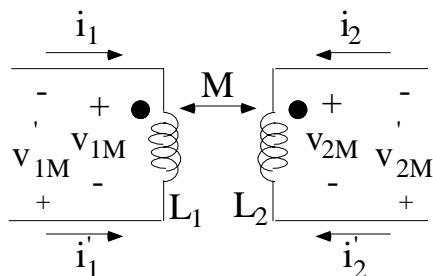
Caracterización de la autoinducción



$$v_L = L \frac{di}{dt} = -L \frac{di'}{dt} = -v'_L$$

Caracterización de la inducción mutua

Si la corriente entra en (sale de) una de las bobinas por el terminal marcado con el punto, la tensión inducida en la otra bobina es positiva (negativa) en el terminal marcado con el punto.



$$v_{1M} = M \frac{di_2}{dt} = -M \frac{di_2'}{dt} = -v'_{1M}$$

$$v_{2M} = M \frac{di_1}{dt} = -M \frac{di_1'}{dt} = -v'_{2M}$$

Tensión total

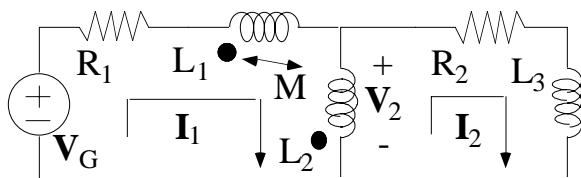
En L_1	En L_2
$v_1 = v_{1L} + v_{1M} = v_{1L} - v'_{1M} =$ $= -v'_{1L} + v_{1M} = -v'_{1L} - v'_{1M} = -v'_1$	$v_2 = v_{2L} + v_{2M} = v_{2L} - v'_{2M} =$ $= -v'_{2L} + v_{2M} = -v'_{2L} - v'_{2M} = -v'_2$

Tensión total en régimen sinusoidal permanente

En L_1	En L_2
$\mathbf{V}_1 = \mathbf{V}_{1L} + \mathbf{V}_{1M} = \mathbf{V}_{1L} - \mathbf{V}'_{1M} =$ $= -\mathbf{V}'_{1L} + \mathbf{V}_{1M} = -\mathbf{V}'_{1L} - \mathbf{V}'_{1M} = -\mathbf{V}'_1$	$\mathbf{V}_2 = \mathbf{V}_{2L} + \mathbf{V}_{2M} = \mathbf{V}_{2L} - \mathbf{V}'_{2M} =$ $= -\mathbf{V}'_{2L} + \mathbf{V}_{2M} = -\mathbf{V}'_{2L} - \mathbf{V}'_{2M} = -\mathbf{V}'_2$

La impedancia asociada a la inducción mutua es $j\omega M$

Ejemplo 2 de circuito con inducción mutua



Se desea obtener los valores de k y V_2 .

$$V_G = 9 + j30 \text{ V}$$

$$R_1 = 3 \Omega, R_2 = 5 \Omega$$

$$\omega L_1 = 1 \Omega, \omega L_2 = 4 \Omega, \omega L_3 = 1 \Omega$$

$$\omega M = 1 \Omega$$

El circuito de la figura funciona en régimen sinusoidal permanente a una frecuencia angular ω .

$$k = \frac{\omega M}{\sqrt{(\omega L_1)(\omega L_2)}} = 0.5$$

$$V_G = I_1(R_1 + j\omega L_1 + j\omega L_2) - I_2 j\omega L_2 \quad - \quad I_1 j\omega M \quad - \quad (I_1 - I_2)j\omega M$$

mallá 1 sin inducción mutua **L₁ en L₂** **L₂ en L₁**

$$0 = -I_1 j\omega L_2 + I_2(j\omega L_2 + R_2 + j\omega L_3) \quad + \quad I_1 j\omega M$$

mallá 2 sin inducción mutua **L₁ en L₂**

Resolviendo el sistema formado por las dos últimas ecuaciones se obtiene

$$I_1 = 5 + j5 \text{ A}, I_2 = j3 \text{ A}$$

con lo que

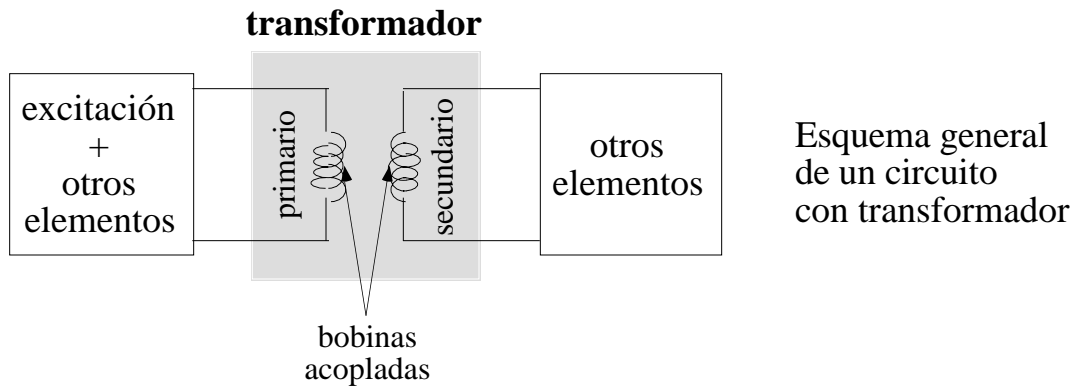
$$V_2 = (I_1 - I_2)j\omega L_2 - I_1 j\omega M = -3 + j15 \text{ V}$$

Obsérvese que se obtendría el mismo resultado si se hace

$$V_2 = I_2(R_2 + j\omega L_3) = -3 + j15 \text{ V}$$

Transformadores

Son dispositivos que incluyen dos inductancias acopladas electromagnéticamente (es decir, están afectadas por un fenómeno de inducción mutua).



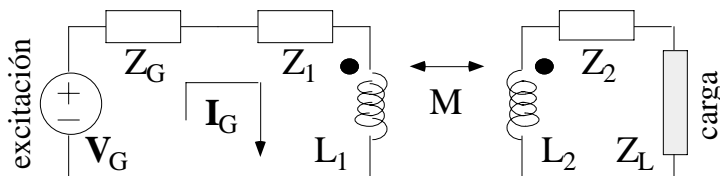
Un transformador modifica las condiciones en las que una excitación afecta a una carga (conjunto de elementos pasivos) con relación a las que existen en ausencia de aquél.

Un transformador no funciona como tal en continua, ya que en tales condiciones no hay fenómenos de inducción mutua. Las inductancias que lo constituyen se comportan como cortocircuitos.

Una aplicación de los transformadores es eliminar la componente continua en una señal que incluye esa componente además de otras.

Transformador lineal

El transformador lineal está constituido exclusivamente por dos bobinas afectadas por un fenómeno de inducción mutua como el ya considerado.



Esquema general de un circuito con un transformador lineal (régimen sinusoidal)

Z_G : impedancia asociada a la excitación

Z_1 : impedancia de pérdidas asociada al primario del transformador

Z_2 : impedancia de pérdidas asociada al secundario del transformador

Z_L : impedancia de carga

Reflexión de impedancias en un transformador lineal

Utilizando la siguiente nomenclatura

Impedancia total en el circuito del secundario

$$Z_S = Z_L + Z_2 + j\omega L_2$$

Impedancia reflejada en el primario

$$Z_R = \frac{(\omega M)^2}{Z_S}$$

Impedancia total en el circuito del primario (excluida la excitación)

$$Z_P = Z_R + j\omega L_1 + Z_1$$

puede demostrarse que se verifica
(independientemente de las posiciones de los puntos en las bobinas)

$$\mathbf{V}_G = \mathbf{I}_G(Z_G + Z_P)$$

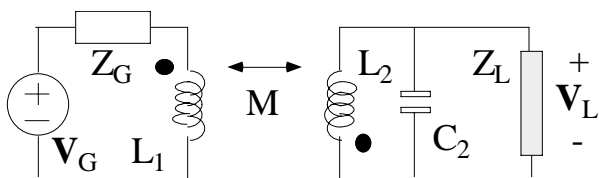
Obsérvese que el transformador altera las condiciones en que la excitación *ve* la carga.

Si no estuviera el transformador (con sus impedancias de pérdidas asociadas), lo que *vería* la excitación sería

$$\mathbf{V}_G = \mathbf{I}_G(Z_G + Z_L)$$

teniendo \mathbf{I}_G valores diferentes en ambos casos.

Ejemplo 1 de circuito con transformador lineal



Se desea obtener V_L .

$$V_G = 1 + j \text{ V}$$

$$Z_G = 0.75 \Omega, Z_L = 1 + j \Omega$$

$$\omega L_1 = 1 \Omega, \omega L_2 = 1 \Omega, \omega M = 0.5 \Omega$$

$$\omega C_2 = 1 \text{ S}$$

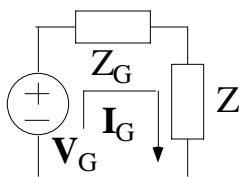
El circuito de la figura funciona en régimen sinusoidal permanente a una frecuencia angular ω .

El circuito puede ser resuelto como en cualquiera de los casos de circuitos con inducción mutua considerados anteriormente.

Un procedimiento alternativo es el que se detalla seguidamente.

Se utilizan las propiedades de reflexión de impedancias para obtener la corriente en el circuito del primario.

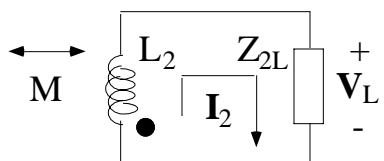
Obsérvese que, por estar afectada por inducción mutua, L_2 no está en paralelo con C_2 y Z_L , sino en serie.



$$Z_S = j\omega L_2 + \left[\left(\frac{1}{j\omega C_2} \right) // Z_L \right] = 1 \Omega$$

$$Z_R = \frac{(\omega M)^2}{Z_S} = 0.25 \Omega, Z = j\omega L_1 + Z_R = 0.25 + j \Omega$$

$$V_G = I_G(Z_G + Z) \Rightarrow I_G = 1 \text{ A}$$



Por otro lado, considerando el circuito completo (agrupando impedancias en el secundario) la ecuación correspondiente a la parte que incluye el secundario es

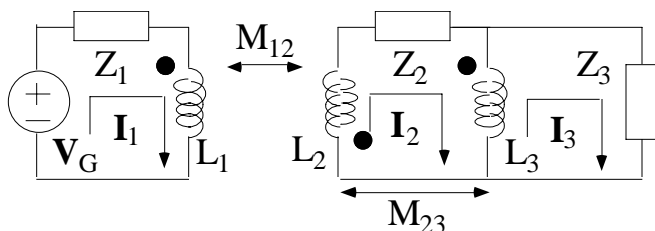
$$\frac{1}{Z_{2L}} = j\omega C_2 + \frac{1}{Z_L} \Rightarrow Z_{2L} = 1 - j \Omega$$

$$0 = I_G j\omega M + I_2(j\omega L_2 + Z_{2L}) \Rightarrow I_2 = -j0.5 \text{ A}$$

En consecuencia,

$$V_L = I_2 Z_{2L} = -0.5 - j0.5 \text{ V}$$

Ejemplo 2 de circuito con transformador lineal



El circuito de la figura funciona en régimen sinusoidal permanente a una frecuencia angular ω .

Se desea obtener las corrientes de malla y la impedancia total del circuito del secundario.

$$V_G = -j54 \text{ V}$$

$$Z_1 = 2 - j4 \ \Omega, \quad Z_2 = 8 - j65 \ \Omega, \quad Z_3 = 23 - j36 \ \Omega$$

$$\omega L_1 = 4 \ \Omega, \quad \omega L_2 = 9 \ \Omega, \quad \omega L_3 = 36 \ \Omega$$

$$\omega M_{12} = 4 \ \Omega, \quad \omega M_{23} = 10 \ \Omega$$

$$V_G = I_1(Z_1 + j\omega L_1) + I_2 j\omega M_{12}$$

$$0 = I_2(j\omega L_2 + Z_2 + j\omega L_3) - I_3 j\omega L_3 + I_1 j\omega M_{12} + I_2 j\omega M_{23} + (I_2 - I_3)j\omega M_{23}$$

$$0 = -I_2 j\omega L_3 + I_3(j\omega L_3 + Z_3) - I_2 j\omega M_{23}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones se obtiene

$$I_1 = -j25 \text{ A}, \quad I_2 = -1 \text{ A}, \quad I_3 = -j2 \text{ A}$$

La impedancia total del circuito del secundario podría ser calculada agrupando las impedancias que aparecen en aquél. Sin embargo, esto es difícil por la presencia de fenómenos de inducción mutua.

Un procedimiento alternativo es el que se detalla seguidamente.

Aplicando reflexión de impedancias se tiene

$$V_G = I_1(Z_1 + j\omega L_1 + Z_R) \Rightarrow Z_R = 0.16 \ \Omega$$

$$Z_R = \frac{(\omega M_{12})^2}{Z_S} \Rightarrow Z_S = 100 \ \Omega$$

Transformador ideal

Es un transformador lineal llevado al límite:

$$k = 1$$

$$L_1 = \infty \quad H = L_2$$

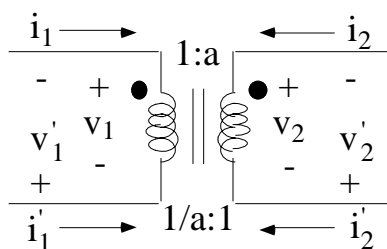
Pese a estas condiciones extremas, los transformadores más utilizados en la práctica suelen aproximarse al tipo ideal (es posible obtener valores de k superiores a 0.99, y valores de inductancia suficientemente altos).

La condición sobre el valor de las inductancias impide aplicar el tratamiento matemático correspondiente a otros fenómenos de inducción mutua.

A cambio, y suponiendo que el transformador está constituido por dos bobinas, se utiliza la **relación de transformación** definida como

$$a = \frac{n_2}{n_1}$$

n_i : número de espiras de la bobina i ($i = 1, 2$)



El transformador ideal se denota con dos rayas entre las bobinas, e indicando la relación de transformación (en cualquiera de las dos formas mostradas en la figura)

Las tensiones engloban los fenómenos de autoinducción y de inducción mutua.

Se verifica

$$\left| \frac{v_2}{v_1} \right| = a = \left| \frac{i_1}{i_2} \right|$$

La relación de tensiones (corrientes) es positiva (negativa) si ambas tienen la misma polaridad en los puntos (si ambas entran o salen simultáneamente por los puntos).

$$v_2 = av_1 = -av'_1, \quad v'_2 = av_1 = -av_2$$

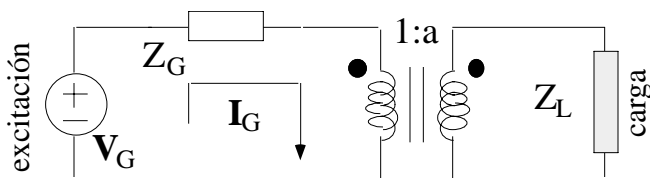
$$i_1 = -ai_2 = ai'_2, \quad i'_1 = -ai'_2 = ai_2$$

En régimen sinusoidal permanente

$$\mathbf{V}_2 = a\mathbf{V}_1 = -a\mathbf{V}'_1, \quad \mathbf{V}'_2 = a\mathbf{V}_1 = -a\mathbf{V}_2$$

$$\mathbf{I}_1 = -a\mathbf{I}_2 = a\mathbf{I}'_2, \quad \mathbf{I}'_1 = -a\mathbf{I}'_2 = a\mathbf{I}_2$$

Reflexión de impedancias en un transformador ideal



Esquema general de un circuito con transformador ideal (régimen sinusoidal)

Z_G : impedancia asociada a la excitación

Z_L : impedancia de carga

Utilizando la siguiente nomenclatura

Impedancia reflejada en el primario

$$Z_R = \frac{Z_L}{a^2}$$

puede demostrarse que se verifica
(independientemente de las posiciones de los puntos en las bobinas)

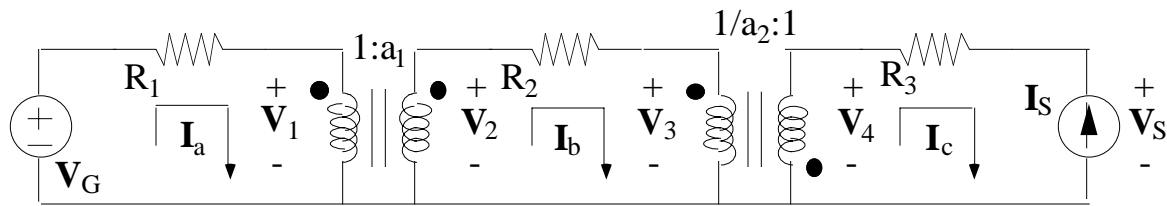
$$\mathbf{V}_G = \mathbf{I}_G(Z_G + Z_R)$$

Obsérvese que el transformador altera las condiciones en que la excitación *ve* la carga.
Si no estuviera el transformador, lo que *vería* el transformador sería

$$\mathbf{V}_G = \mathbf{I}_G(Z_G + Z_L)$$

teniendo \mathbf{I}_G valores diferentes en ambos casos.

Ejemplo de circuito con transformador ideal



El circuito de la figura funciona en régimen sinusoidal permanente.
Se desea obtener el valor de V_S .

$$\begin{aligned} V_G &= 600 \text{ V}, I_S = 12 \text{ A}, a_1 = 6, a_2 = 0.33 \\ R_1 &= 24 \text{ } \Omega, R_2 = 18 \text{ } \Omega, R_3 = 2 \text{ } \Omega \end{aligned}$$

Ecuaciones de malla

$$V_G = I_a R_1 + V_1$$

$$V_2 = I_b R_2 + V_3$$

$$V_4 = I_c R_3 + V_S$$

Ecuación adicional para la fuente de corriente

$$I_c = -I_S$$

Ecuaciones de los transformadores

$$V_2 = a_1 V_1, I_a = a_1 I_b$$

$$V_4 = -a_2 V_3, I_b = -a_2 I_c$$

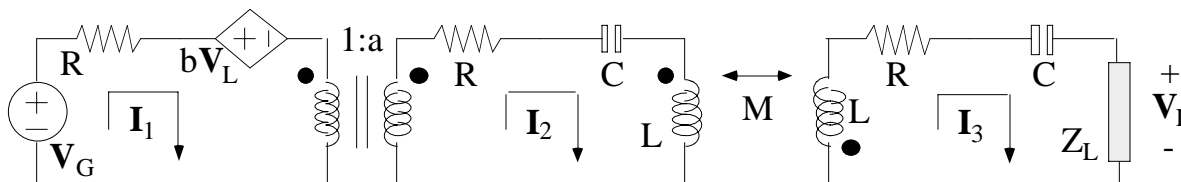
Resolviendo el sistema de ecuaciones se obtiene

$$V_S = 0 \text{ V}$$

Cada transformador ideal introduce dos ecuaciones adicionales en el análisis.

Circuitos con transformadores

Ejemplo 1



El circuito de la figura, en cuya representación se ha utilizado notación fasorial, funciona en régimen sinusoidal permanente a una frecuencia angular ω . Son datos las características de todos los elementos y el valor de la frecuencia. Se desea formular un sistema de ecuaciones que caracterice completamente el circuito.

Que el circuito quede completamente caracterizado significa que se conozcan las corrientes y las tensiones en todos los elementos.

Para obtener estas magnitudes puede plantearse un sistema en el que figuren las ecuaciones de malla, la ecuación adicional de la fuente dependiente y las ecuaciones adicionales del transformador ideal.

Pero, haciendo uso de las propiedades de reflexión de impedancias, puede plantearse un sistema más sencillo, como es el siguiente.

$$V_G = \left\{ R + \frac{1}{a^2} \left[R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C} + \frac{(\omega M)^2}{R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C} + Z_L} \right] \right\} I_1 + b Z_L I_3$$

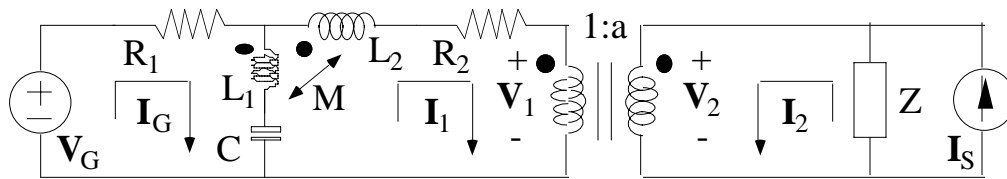
$\xleftarrow{\text{impedancia reflejada en el primario del lineal}}$
 $\xleftarrow{\text{impedancia reflejada en el primario del ideal}}$

$$I_1 = a I_2$$

$$0 = I_3 \left(R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C} + Z_L \right) + I_2 j\omega M$$

Conocidas las corrientes, es posible determinar cualquier otra magnitud.

Ejemplo 2



El circuito de la figura, en cuya representación se ha utilizado notación fasorial, funciona en régimen sinusoidal permanente a una frecuencia angular ω .

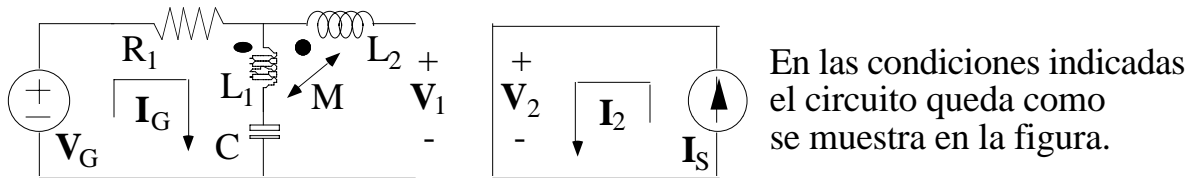
Son datos las características de todos los elementos y el valor de la frecuencia; en particular, $a = 0$.

Se desea obtener los valores de I_G , I_2 y V_1 .

$$a = 0 \Rightarrow \begin{cases} V_2 = aV_1 = 0 \text{ V} & \text{El secundario del ideal es un cortocircuito} \\ I_1 = -aI_2 = 0 \text{ A} & \text{El primario del ideal es un circuito abierto} \end{cases}$$

El cortocircuito cancela el efecto de Z
(el paralelo de un cortocircuito con cualquier impedancia es el propio cortocircuito).

$$I_1 = 0 \text{ A} \Rightarrow \begin{cases} \text{No hay efecto inductivo de } L_2 \text{ en } L_1 \\ \text{No hay caída de tensión en } R_2 \end{cases}$$

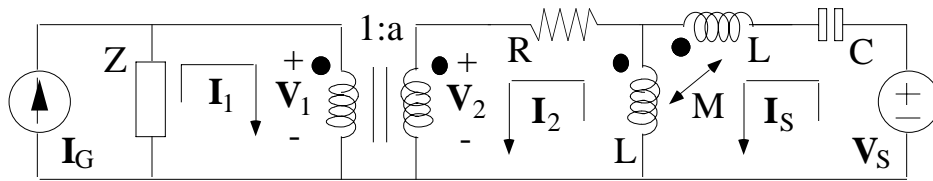


$$I_2 = I_S$$

$$I_G = \frac{V_G}{R_1 + j\omega L_1 + \frac{1}{j\omega C}}$$

$$V_1 = -I_G j\omega M + I_G \left(j\omega L_1 + \frac{1}{j\omega C} \right)$$

Ejemplo 3



El circuito de la figura, en cuya representación se ha utilizado notación fasorial, funciona en régimen sinusoidal permanente a una frecuencia angular ω .

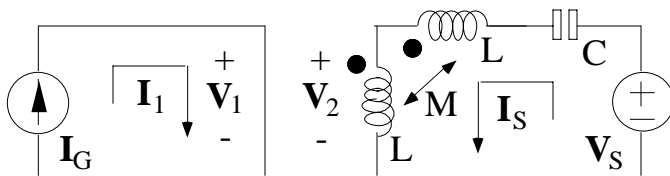
Son datos las características de todos los elementos y el valor de la frecuencia; en particular, $a = \infty$.

Se desea obtener los valores de I_1 , I_S y V_2 .

$$a = \infty \Rightarrow \begin{cases} V_1 = \frac{V_2}{a} = 0 \text{ V} & \text{El primario del ideal es un cortocircuito} \\ I_2 = -\frac{I_1}{a} = 0 \text{ A} & \text{El secundario del ideal es un circuito abierto} \end{cases}$$

El cortocircuito cancela el efecto de Z .

$$I_2 = 0 \text{ A} \Rightarrow \text{No hay caída de tensión en } R$$



En las condiciones indicadas el circuito queda como se muestra en la figura.

$$I_1 = I_G$$

$$V_S = I_S \left(\frac{1}{j\omega C} + j\omega L + j\omega L \right) - I_S j\omega M - I_S j\omega M \Rightarrow I_S = \frac{V_S}{\frac{1}{j\omega C} + j2\omega L - j2\omega M}$$

$$V_2 = I_S j\omega L - I_S j\omega M$$

Observaciones

No se puede reflejar impedancias en un transformador (lineal o ideal) cuando

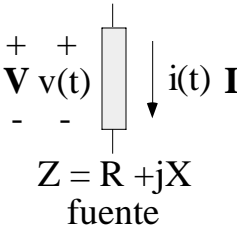
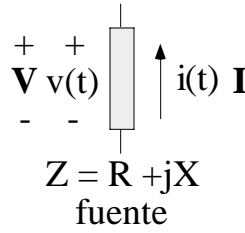
Los circuitos del primario y el secundario comparten uno o más elementos.

Hay una fuente (dependiente o independiente) en la parte del circuito que se pretende reflejar en la otra.

Que la corriente sea nula en un elemento no implica que la tensión en él también haya de serlo.

Potencia en régimen sinusoidal permanente

Definiciones

	 <p style="text-align: center;">$Z = R + jX$ fuente</p>	 <p style="text-align: center;">$Z = R + jX$ fuente</p>
Potencia instantánea (potencia real), [W]	$p(t) = v(t)i(t) = \operatorname{Re}\left\{\mathbf{V}e^{j\omega t}\right\}\operatorname{Re}\left\{\mathbf{I}e^{j\omega t}\right\}$	$p(t) = -v(t)i(t) = -\operatorname{Re}\left\{\mathbf{V}e^{j\omega t}\right\}\operatorname{Re}\left\{\mathbf{I}e^{j\omega t}\right\}$
Potencia compleja [VA, voltio-amperio]	$S = \frac{\mathbf{V}\mathbf{I}^*}{2} = P + jQ$	$S = -\frac{\mathbf{V}\mathbf{I}^*}{2} = P + jQ$
Potencia aparente [VA, voltio-amperio]	$ S = \left \frac{\mathbf{V}\mathbf{I}^*}{2}\right = P + jQ $	$ S = \left -\frac{\mathbf{V}\mathbf{I}^*}{2}\right = P + jQ $
Potencia media [W]	$P = \operatorname{Re}\{S\}$	$P = \operatorname{Re}\{S\}$
Potencia reactiva [VAR, voltio-amperio reactivo]	$Q = \operatorname{Im}\{S\}$	$Q = \operatorname{Im}\{S\}$
Potencia media en una impedancia resistiva pura $Z = R$	$P = \frac{ \mathbf{V} ^2}{2R} = \frac{ \mathbf{I} ^2 R}{2}$	$P = \frac{ \mathbf{V} ^2}{2R} = \frac{ \mathbf{I} ^2 R}{2}$
Potencia reactiva en una impedancia reactiva pura $Z = jX$	$Q = \frac{ \mathbf{V} ^2}{2X} = \frac{ \mathbf{I} ^2 X}{2}$	$Q = \frac{ \mathbf{V} ^2}{2X} = \frac{ \mathbf{I} ^2 X}{2}$

S, P y Q no son fasores.

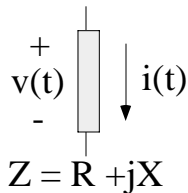
$$p(t) \neq \operatorname{Re}\left\{S e^{j\omega t}\right\}$$

Valores eficaces

Valor eficaz de una función $f(t)$ de periodo T		$F_{\text{eff}} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_T f(t) dt}$
En régimen sinusoidal permanente	Tensión eficaz	$V_{\text{eff}} = \frac{V_m}{\sqrt{2}} = \frac{ V }{\sqrt{2}}$
	Corriente eficaz	$I_{\text{eff}} = \frac{I_m}{\sqrt{2}} = \frac{ I }{\sqrt{2}}$
	Fasor eficaz de tensión	$\mathbf{V}_{\text{eff}} = \frac{\mathbf{V}}{\sqrt{2}}$
	Fasor eficaz de corriente	$\mathbf{I}_{\text{eff}} = \frac{\mathbf{I}}{\sqrt{2}}$
	Potencia compleja	$S_{\text{eff}} = \mathbf{V}_{\text{eff}} \mathbf{I}_{\text{eff}}^*$

También se utiliza rms (root mean square, valor cuadrático medio) en vez de eff.

Caso particular



$$v(t) = V_m \cos(\omega t + \varphi)$$

$$i(t) = I_m \cos(\omega t)$$

$\cos(\varphi)$: factor de potencia

$$P = \frac{V_m I_m \cos(\varphi)}{2}$$

$$Q = \frac{V_m I_m \sin(\varphi)}{2}$$

$$p(t) = P + P \cos(2\omega t) - Q \sin(2\omega t)$$

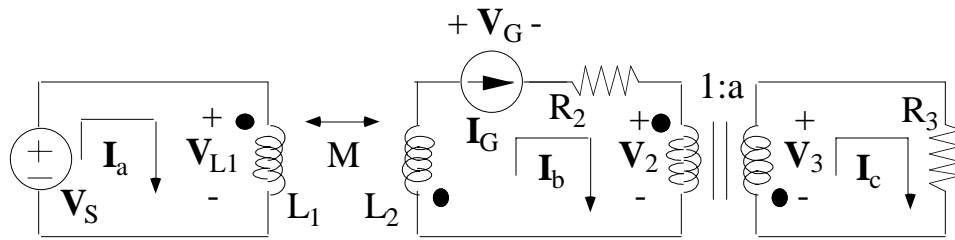
$$Z = R \ (\varphi = 0^\circ) \Rightarrow p(t) = P + P \cos(2\omega t) \geq 0 \text{ W para todo } t$$

$$Z = j\omega L \ (\varphi = 90^\circ) \Rightarrow p(t) = -Q \sin(2\omega t)$$

$$Z = -\frac{j}{\omega C} \ (\varphi = -90^\circ) \Rightarrow p(t) = -Q \sin(2\omega t)$$

En general, la frecuencia de la potencia es el doble de la excitación, una resistencia siempre absorbe energía, y una inductancia y una capacidad absorben y liberan energía.

Ejemplo 1 de cálculo de potencias



El circuito de la figura, en cuya representación se ha utilizado notación fasorial, funciona en régimen sinusoidal permanente.

Se desea obtener las potencias instantánea, compleja, media y reactiva en la bobina del primario del transformador lineal.

$$\begin{aligned} V_S &= 2 + j2 \text{ V}, I_G = -j2, \omega = 100 \text{ krad/s} \\ R_2 &= 5 \Omega, R_3 = 4 \Omega \\ L_1 &= 10 \mu\text{H}, L_2 = 50 \mu\text{H}, M = 10 \mu\text{H}, a = 2 \end{aligned}$$

Ecuaciones de malla

$$\begin{aligned} V_S &= I_a j\omega L_1 + I_b j\omega M \\ -V_G &= I_a j\omega M + I_b (j\omega L_2 + R_2) + V_2 \\ V_3 &= I_c R_3 \end{aligned}$$

Ecuación adicional para la fuente de corriente

$$I_b = I_G$$

Ecuaciones del transformador ideal

$$I_b = -a I_c, V_3 = -a V_2$$

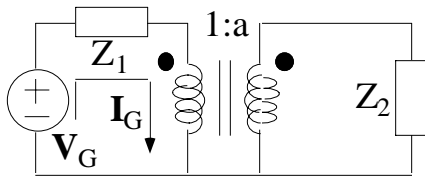
$$I_a = 2 \text{ A} \Rightarrow i_a(t) = \text{Re}\left\{ I_a e^{j\omega t} \right\} = 2 \cos(10^5 t \text{ rad}) \text{ A}, t \text{ en s}; I_b = -j2 \text{ A}; I_c = j \text{ A}$$

$$\begin{aligned} I_a j\omega L_1 + I_b j\omega M &= V_{L1} = V_S = 2 + j2 \text{ V} \Rightarrow \\ \Rightarrow v_{L1}(t) &= \text{Re}\left\{ V_{L1} e^{j\omega t} \right\} = 2\sqrt{2} \cos\left(10^5 t + \frac{\pi}{4} \text{ rad}\right) \text{ V}, t \text{ en s} \end{aligned}$$

$$p_{L1}(t) = v_{L1}(t) i_a(t) = 4\sqrt{2} \cos(10^5 t \text{ rad}) \cos\left(10^5 t + \frac{\pi}{4} \text{ rad}\right) \text{ W}, t \text{ en s}$$

$$S = \frac{V_{L1} I_a^*}{2} = 2 + j2 \text{ VA}, P = \text{Re}\{S\} = 2 \text{ W}, Q = \text{Im}\{S\} = 2 \text{ VAR}$$

Ejemplo 2 de cálculo de potencias



El circuito de la figura, en cuya representación se ha utilizado notación fasorial, funciona a una frecuencia angular ω conocida.

Se desea obtener las potencias instantánea, compleja, media y reactiva en la fuente.

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_G &= 2 - j2 \text{ V}, a = 10 \\ Z_1 &= 1 \ \Omega, Z_2 = -j100 \ \Omega \end{aligned}$$

Reflejando impedancias en el transformador,

$$\mathbf{V}_G = \mathbf{I}_G \left(Z_1 + \frac{Z_2}{a^2} \right) \Rightarrow \mathbf{I}_G = 2 \text{ A}$$

$$\mathbf{V}_G = 2 - j2 \text{ V} \Rightarrow v_G(t) = \text{Re} \left\{ \mathbf{V}_G e^{j\omega t} \right\} = 2\sqrt{2} \cos(\omega t - 45^\circ) \text{ V}$$

$$\mathbf{I}_G = 2 \text{ A} \Rightarrow i_G(t) = \text{Re} \left\{ \mathbf{I}_G e^{j\omega t} \right\} = 2 \cos(\omega t) \text{ A}$$

$$p_G(t) = -v_G(t)i_G(t) = -4\sqrt{2} \cos(\omega t - 45^\circ) \cos(\omega t) \text{ W}$$

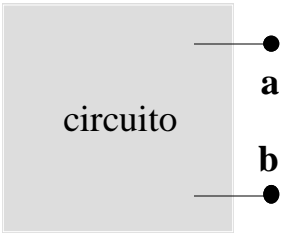
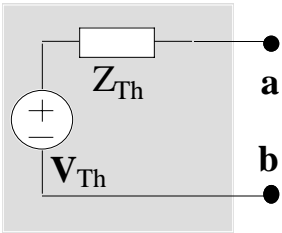
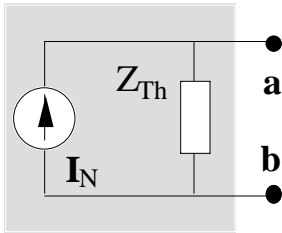
$$S_G = -\frac{\mathbf{V}_G \mathbf{I}_G^*}{2} = -2 + j2 \text{ VA}, P = \text{Re}\{S_G\} = -2 \text{ W}, Q = \text{Im}\{S_G\} = 2 \text{ VAR}$$

Equivalente Thèvenin

Dado un circuito, su comportamiento hacia el exterior desde la perspectiva de dos cualesquiera de sus terminales puede ser caracterizado indistintamente mediante el circuito equivalente de Thèvenin o el circuito equivalente de Norton.

Un circuito tiene tantos equivalentes (de Thèvenin o Norton) distintos como pares distintos de terminales se elijan en él.

Equivalentes en régimen sinusoidal permanente

Circuito original	Equivalente de Thèvenin	Equivalente de Norton
Ha de especificarse el orden de los terminales; en este caso, de a a b	El positivo de la fuente apunta al terminal citado primero (a)	La corriente sale de la fuente hacia el terminal citado primero (a)
		

El equivalente queda completamente definido cuando se conocen dos de las tres magnitudes que se citan seguidamente.

V_{Th} Generador equivalente de Thèvenin.
Es igual a la tensión entre **a** y **b** cuando están en circuito abierto.

I_N Generador equivalente de Norton.
Es igual a la corriente que circula desde **a** hacia **b** cuando ambos están en cortocircuito.

Z_{Th} Impedancia equivalente de Thèvenin.

$$Z_{Th} = \frac{V_{Th}}{I_N}$$

Obtención de la impedancia equivalente

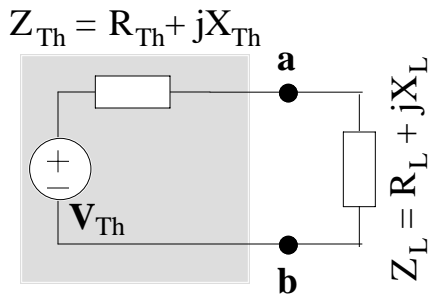
Además del procedimiento general indicado anteriormente, hay otras dos posibilidades para obtener la impedancia equivalente de Thèvenin.

El circuito no contiene fuentes dependientes	El circuito contiene fuentes dependientes
Se desactivan las fuentes independientes	Se desactivan las fuentes independientes
Se calcula la impedancia total entre a y b (Z_{ab})	Se aplica un generador auxiliar V_{aux} entre a y b (positivo en a)
$Z_{Th} = Z_{ab}$	Se calcula la corriente I_{aux} que proporciona tal generador (saliente por a)
	$Z_{Th} = \frac{V_{aux}}{I_{aux}}$

Desactivación de fuentes independientes

Fuente de tensión	Fuente de corriente
Se sustituye por un cortocircuito	Se sustituye por un circuito abierto

Máxima transferencia de potencia



A un circuito caracterizado por su equivalente Thèvenin se le conecta una carga Z_L .

Si

la potencia media en la carga es la máxima posible, y vale

$$Z_L = Z_{Th}^* \Leftrightarrow R_L = R_{Th}, X_L = -X_{Th}$$

$$P_L = P_{\max} = \frac{|V_{Th}|^2}{8R_{Th}}$$

Casos particulares

R_L y X_L no pueden tomar valores cualesquiera, sino unos fijados previamente

La fase de Z_L no puede ser cualquiera, sino una fijada previamente

Se escoge el valor de X_L lo más próximo posible a $-X_{Th}$

Se escoge $|Z_L|$ lo más próximo posible a $|Z_{Th}|$

Se escoge el valor de R_L lo más próximo posible a

$$\sqrt{R_{Th}^2 + (X_L + X_{Th})^2}$$

En ninguno de los dos casos se obtiene la máxima potencia media en la carga, pero sí la máxima posible en función de las restricciones indicadas.

Equivalente Thèvenin en régimen permanente continuo

Vale todo lo que se acaba de indicar con las siguientes excepciones:

Se hace referencia a fuentes reales y no a fasores.

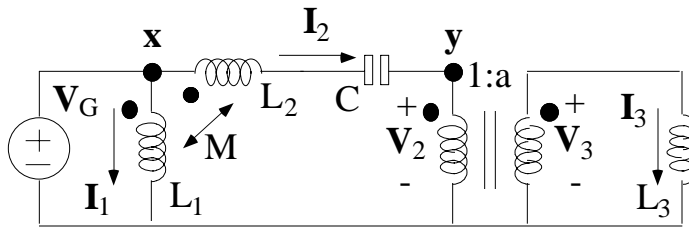
No hay impedancias, sino sólo resistencias.

La resistencia de carga para máxima transferencia de potencia es $R_L = R_{Th}$.

La máxima potencia posible en la carga es

$$P_{\max} = \frac{V_{Th}^2}{4R_{Th}}$$

Ejemplo 1 de cálculo de equivalente Thèvenin

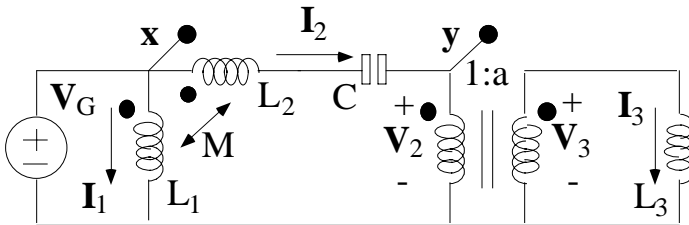


El circuito de la figura, en cuya representación se ha utilizado notación fasorial (\mathbf{I}_1 , \mathbf{I}_2 e \mathbf{I}_3 son corrientes de rama), funciona en régimen sinusoidal permanente.

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_G &= j5 \text{ V}, \omega = 100 \text{ krad/s}, a = 2 \\ L_1 &= 40 \mu\text{H}, L_2 = 20 \mu\text{H}, L_3 = 160 \mu\text{H} \\ M &= 10 \mu\text{H}, C = 5 \mu\text{F} \end{aligned}$$

Se desea obtener el equivalente Thèvenin entre \mathbf{x} e \mathbf{y} .

Cálculo de la tensión de circuito abierto



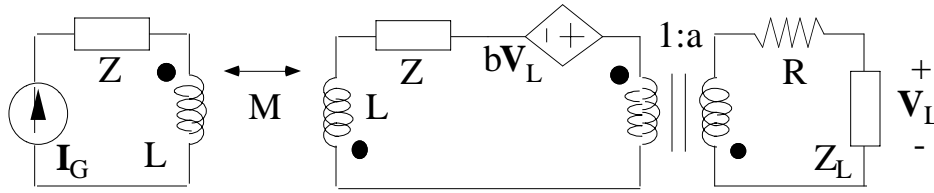
Se considera el circuito tal y como está.

Obsérvese que, desde la perspectiva externa, los terminales \mathbf{x} e \mathbf{y} están en circuito abierto.

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_G &= \mathbf{I}_1 j\omega L_1 + \mathbf{I}_2 j\omega M \\ \mathbf{V}_G &= \mathbf{I}_1 j\omega M + \mathbf{I}_2 \left(j\omega L_2 + \frac{1}{j\omega C} \right) + \mathbf{V}_2 \\ \mathbf{V}_3 &= \mathbf{I}_3 j\omega L_3 \\ \mathbf{V}_3 &= a\mathbf{V}_2, \mathbf{I}_2 = a\mathbf{I}_3 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} \mathbf{I}_1 &= 1 \text{ A} \\ \mathbf{I}_2 &= 1 \text{ A} \\ \mathbf{I}_3 &= 0.5 \text{ A} \end{aligned}$$

$$\mathbf{V}_{\text{Th}} \equiv \mathbf{V}_{xy} = \mathbf{I}_2 \left(j\omega L_2 + \frac{1}{j\omega C} \right) + \mathbf{I}_1 j\omega M = j \text{ V}$$

Ejemplo 2 de cálculo de equivalente Thèvenin



El circuito de la figura, en cuya representación se ha utilizado notación fasorial, funciona en régimen sinusoidal permanente.

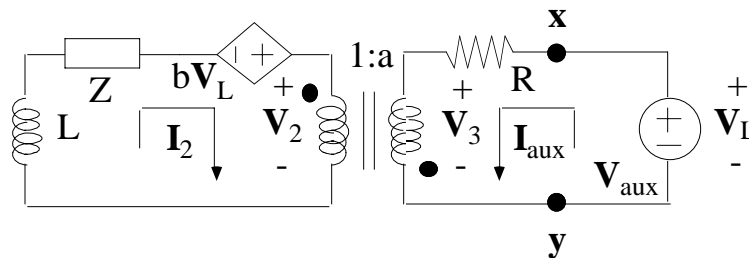
Se desea determinar el valor que ha de tener Z_L para que en tal impedancia se disipe la máxima potencia media posible, sabiendo que, para realizarla, sólo se dispone de impedancias de módulo entero y 45° de fase.

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_G &= -j5 \text{ A}, \quad a = 2, \quad b = 0.25 \\ R &= 1 \ \Omega, \quad \omega L = 2 \ \Omega, \quad \omega M = 1 \ \Omega, \quad Z = 1 - j2 \ \Omega \end{aligned}$$

Puesto que se hace referencia a máxima potencia media posible, la solución consistirá en la obtención de la impedancia equivalente de Thèvenin.

El cálculo se hace prescindiendo de Z_L , ya que es la impedancia a determinar.

Dado que sólo interesa hallar la impedancia de Thèvenin, no es necesario aplicar el procedimiento general para calcular el equivalente. Ya que el circuito contiene una fuente dependiente, se utiliza el procedimiento consistente en desactivar fuentes independientes y aplicar un generador auxiliar. En consecuencia, el circuito a considerar es el mostrado en la figura que sigue.



La desactivación de la fuente de corriente (sustitución por un circuito abierto) hace que no circule corriente por el primario del transformador lineal, con lo que no hay efectos de inducción mutua en éste.

En el cálculo de impedancias de Thèvenin es indiferente el orden de los terminales entre los que ha de conectarse. En este caso se elige arbitrariamente el orden **xy**, con lo que el positivo del generador auxiliar apunta hacia **x** y la corriente correspondiente ha de salir por este terminal (es decir, el sentido de \mathbf{I}_{aux} está determinado unívocamente).

Se mantiene la indicación de V_L , puesto que denota la tensión entre x e y .

En el circuito se verifica (obsérvese la posición de a en el transformador ideal)

$$\begin{aligned}V_L &= V_{\text{aux}} \\0 &= \mathbf{I}_2(j\omega L + Z) - bV_L + V_2 \\V_{\text{aux}} &= \mathbf{I}_{\text{aux}}R + V_3 \\V_3 &= -aV_2, \mathbf{I}_2 = a\mathbf{I}_{\text{aux}}\end{aligned}$$

Se trata de un sistema de cinco ecuaciones con seis incógnitas (dos corrientes y cuatro tensiones).

Puede superarse esta dificultad asignando un valor (cualquiera) a V_{aux} , pero también puede manipularse el sistema para eliminar las restantes incógnitas y llegar a la relación

$$Z_{\text{Th}} = \frac{V_{\text{aux}}}{\mathbf{I}_{\text{aux}}} = \frac{a(j\omega L + Z) + \frac{R}{a}}{b + \frac{1}{a}} = 3.33 \Omega$$

Dependiendo de los valores que se asignen a V_{aux} , así serán los obtenidos para \mathbf{I}_{aux} , pero el cociente entre ambas es idéntico en cualquier caso

Para obtener la máxima potencia media posible, habría que hacer

$$Z_L = Z_{\text{Th}}^* = 3.33 \Omega$$

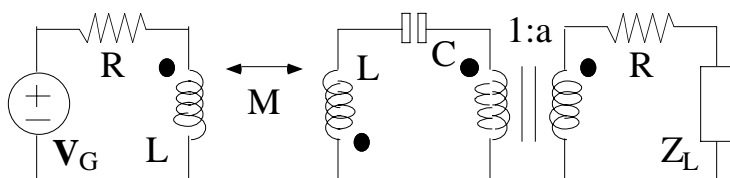
Sin embargo, el enunciado indica que sólo se dispone de impedancias del tipo

$$1 \angle 45^\circ \Omega, 2 \angle 45^\circ \Omega, 3 \angle 45^\circ \Omega, 4 \angle 45^\circ \Omega, \dots$$

En este caso, y siguiendo las recomendaciones indicadas anteriormente para el caso de limitación en fase de las impedancias disponibles, se elegirá la impedancia cuyo módulo esté más próximo al resultante del cálculo. En consecuencia,

$$Z_L = 3 \angle 45^\circ \Omega = \sqrt{2}(1.5 + j1.5) \Omega$$

Ejemplo 3 de cálculo de equivalente Thèvenin



El circuito de la figura funciona en régimen sinusoidal permanente.

Se desea determinar el valor de Z_L para obtener en ella la máxima potencia media posible.

$$V_G = 4 - j2V, \omega = 1 \text{ Mrad/s}, a = 2$$

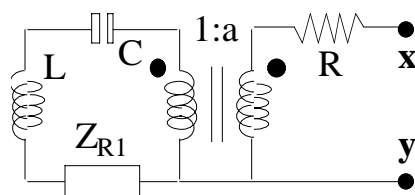
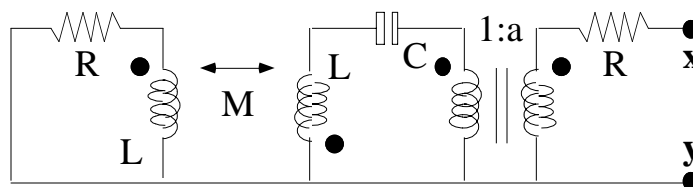
$$R = 1 \Omega, L = 1 \mu\text{H}, M = 0.5 \mu\text{H}, C = 1 \mu\text{F}$$

Para realizar la impedancia de máxima transferencia de potencia sólo se dispone de impedancias cuyas partes reales e imaginarias únicamente pueden ser múltiplos enteros de 0.4Ω .

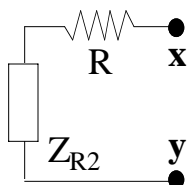
Hay que calcular la impedancia equivalente de Thèvenin prescindiendo de Z_L .

Se utilizará el procedimiento consistente en desactivar la fuente independiente (sustituirla por un cortocircuito) y agrupar impedancias, ya que no hay fuentes dependientes.

En el proceso de agrupar impedancias se utilizarán las propiedades de reflexión de impedancias (obsérvese la disposición del transformador ideal).



$$Z_{R1} = \frac{(\omega M)^2}{R + j\omega L} = \frac{0.25}{1 + j} \Omega$$



$$Z_{R2} = a^2 \left(Z_{R1} + j\omega L + \frac{1}{j\omega C} \right) = \frac{1}{1 + j} \Omega$$

La reflexión de impedancias en el transformador lineal es simétrica; en el ideal, no

$$Z_{Th} = Z_{xy} = R + Z_{R2} = 1.5 - j0.5 \Omega$$

Para obtener la máxima potencia media posible, habría que hacer

$$Z_L = Z_{Th}^* = 1.5 + j0.5 \Omega$$

Sin embargo, el enunciado indica que se dispone de impedancias limitadas.
En este caso, y siguiendo las recomendaciones indicadas anteriormente, se tiene

$$X_L \text{ ha de escogerse lo más próxima posible a } -X_{Th}$$

$$X_L = 0.4 \Omega$$

$$R_L \text{ ha de escogerse lo más próxima posible a } \sqrt{R_{Th}^2 + (X_L + X_{Th})^2} = 1.503 \Omega$$

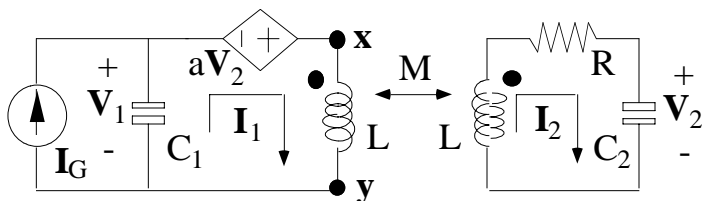
$$R_L = 1.6 \Omega$$

Es decir,

$$Z_L = 1.6 + j0.4 \Omega$$

Ejemplos de análisis en régimen sinusoidal

Ejemplo 1 de análisis en régimen sinusoidal



El circuito de la figura, en cuya representación se ha utilizado notación fasorial, funciona en régimen sinusoidal permanente.

$$\begin{aligned} I_G &= 1 \text{ A}, \omega = 1 \text{ krad/s}, a = 0.5 \\ L &= 1 \text{ mH}, M = 0.5 \text{ mH}, R = 0.5 \Omega \\ C_1 &= 1.5 \text{ mF}, C_2 = 1 \text{ mF} \end{aligned}$$

Se desea obtener la impedancia entre x e y, y la potencia media en R.

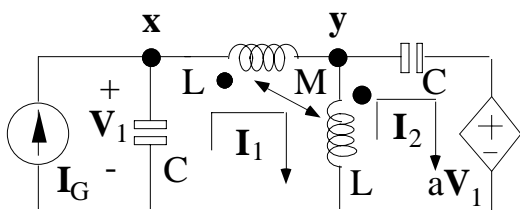
$$\begin{aligned} V_1 &= \frac{I_G - I_1}{j\omega C_1} \\ V_1 + aV_2 &= I_1 j\omega L - I_2 j\omega M \\ 0 &= -I_1 j\omega M + I_2 \left(j\omega L + R + \frac{1}{j\omega C_2} \right) \\ V_2 &= \frac{I_2}{j\omega C_2} \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} I_1 &= -2 \text{ A} \\ I_2 &= -j2 \text{ A} \end{aligned}$$

$$V_{xy} = I_1 j\omega L - I_2 j\omega M = -1 - j2 \text{ V} \Rightarrow Z_{xy} = \frac{V_{xy}}{I_1} = 0.5 + j \Omega$$

$$\text{Alternativamente, } Z_{xy} = j\omega L + \frac{(\omega M)^2}{j\omega L + R + \frac{1}{j\omega C_2}} = 0.5 + j \Omega$$

$$P_R = \frac{|I_2|^2 R}{2} = 1 \text{ W}$$

Ejemplo 2 de análisis en régimen sinusoidal



$$\begin{aligned} I_G &= 1 \text{ A}, \omega = 1 \text{ krad/s}, a = 0.5 \\ L &= 1 \text{ mH}, M = 0.5 \text{ mH}, C = 1 \text{ mF} \end{aligned}$$

El circuito de la figura, en cuya representación se ha utilizado notación fasorial, funciona en régimen sinusoidal permanente.

Se desea obtener la impedancia entre x e y , y la potencia instantánea en la fuente independiente.

$$\begin{aligned} V_1 &= \frac{I_G - I_1}{j\omega C} \\ V_1 &= I_1(j\omega L + j\omega L) - I_2 j\omega L + I_1 j\omega M + (I_1 - I_2)j\omega M \\ 0 &= -I_1 j\omega L + I_2 \left(j\omega L + \frac{1}{j\omega C} \right) + aV_1 - I_1 j\omega M \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} I_1 &= -0.5 \text{ A} \\ I_2 &= 0 \text{ A} \end{aligned}$$

$$V_{xy} = I_1 j\omega L + (I_1 - I_2)j\omega M = -j0.75 \text{ V} \Rightarrow Z_{xy} = \frac{V_{xy}}{I_1} = j1.5 \Omega$$

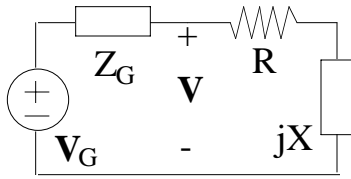
En este caso no es posible aplicar la propiedad de reflexión de impedancias, ya que una de las inductancias del *transformador* está compartida por el primario y el secundario

$$V_1 = \frac{I_G - I_1}{j\omega C} = -j1.5 \text{ V} \Rightarrow v_1(t) = 1.5 \cos(\omega t - 90^\circ) \text{ V} \quad (\omega = 1 \text{ krad/s})$$

$$I_G = 1 \text{ A} \Rightarrow i_G(t) = \cos(\omega t) \text{ A} \quad (\omega = 1 \text{ krad/s})$$

$$p_G(t) = -v_1(t)i_G(t)$$

Ejemplo 3 de análisis en régimen sinusoidal



El circuito de la figura, en cuya representación se ha utilizado notación fasorial, funciona en régimen sinusoidal permanente.

Se desea obtener V_G .

$$R = 3 \text{ k}\Omega$$

$$Z_G = 300 + j21 \text{ k}\Omega$$

$$\mathbf{V} = V_m e^{j\varphi}, V_m = 5 \text{ V}$$

$$\varphi = \arctg\left(\frac{4}{3}\right), \varphi \in \text{primer cuadrante}$$

X absorbe 2 mVAR
y minimiza la potencia media en R

Designando por \mathbf{I} la corriente en el circuito (sale por el positivo de la fuente),

$$\mathbf{I} = \frac{\mathbf{V}}{R + jX} \Rightarrow |\mathbf{I}| = \frac{V_m}{\sqrt{R^2 + X^2}}; \mathbf{V}_G = \mathbf{I}Z_G + \mathbf{V} \quad (1)$$

$$\begin{array}{l} V_m = \sqrt{\text{Re}^2\{\mathbf{V}\} + \text{Im}^2\{\mathbf{V}\}} \\ \varphi = \arctg\left(\frac{4}{3}\right) \\ \varphi \in \text{primer cuadrante} \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} \text{Re}\{\mathbf{V}\} = 3 \text{ V} \\ \text{Im}\{\mathbf{V}\} = 4 \text{ V} \end{array} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{V} = 3 + j4 \text{ V} \quad (2)$$

$$Q_X = \frac{|\mathbf{I}|^2 X}{2} = \frac{V_m^2 X}{2(R^2 + X^2)}$$

Sabiendo que $Q_X = 2 \text{ mVAR}$

(positiva, porque el enunciado indica que es potencia absorbida),
la última ecuación proporciona dos posibles valores para X

$$X = 4 \text{ k}\Omega, X = 2.25 \text{ k}\Omega$$

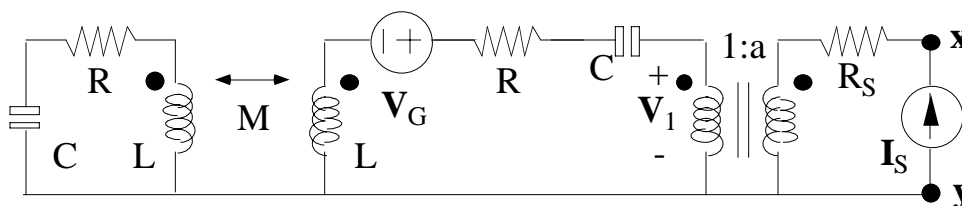
Para determinar cuál es el correcto,
se considera el dato sobre la potencia en la resistencia

$$P_R = \frac{|\mathbf{I}|^2 R}{2} = \frac{V_m^2 R}{2(R^2 + X^2)}$$

$$P_R \text{ mínima} \Rightarrow |\mathbf{I}| \text{ mínima} \Rightarrow X \text{ máxima} \Rightarrow X = 4 \text{ k}\Omega \quad (3)$$

Sustituyendo (2-3) en (1), $\mathbf{I} = 1 \text{ mA}$, $\mathbf{V}_G = 303 + j25 \text{ V}$

Ejemplo 4 de análisis en régimen sinusoidal



El circuito de la figura, en cuya representación se ha utilizado notación fasorial, funciona en régimen sinusoidal permanente.

Se desea obtener el equivalente Thèvenin entre x e y .

$$\begin{aligned} V_G &= 10 \text{ V}, I_S = j \text{ A}, \omega = 100 \text{ krad/s}, a = 5 \\ R_S &= 50 \text{ } \Omega, R = 1 \text{ } \Omega, C = 5 \text{ } \mu\text{F}, L = 20 \text{ } \mu\text{H}, M = 10 \text{ } \mu\text{H} \end{aligned}$$

El cálculo ha de hacerse teniendo en cuenta la presencia de la fuente de corriente, ya que es dato. Es decir, si hubiera que colocar entre x e y la impedancia de máxima potencia, ésta se colocaría en paralelo con la fuente de corriente.

Para el cálculo puede utilizarse el procedimiento general. Pero es más sencillo aplicar un procedimiento alternativo, basado en las propiedades de los transformadores, y en los procedimientos particulares para obtener la impedancia equivalente.

Tensión de circuito abierto

Considerando el circuito tal y como está, y observando que la corriente en el secundario del transformador ideal es la proporcionada por la fuente,

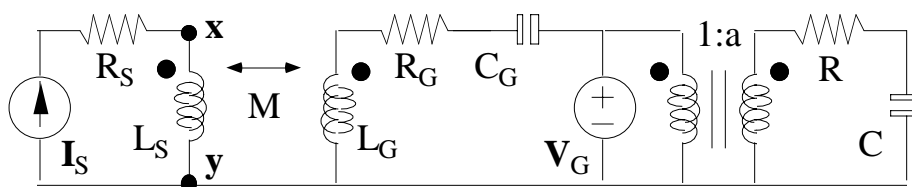
$$\begin{aligned} V_G &= -a I_S \left[\frac{(\omega M)^2}{\frac{1}{j\omega C} + R + j\omega L} + j\omega L + R + \frac{1}{j\omega C} \right] + V_1 \Rightarrow V_1 = 10 + j10 \text{ V} \\ V_{Th} &= V_{xy} = a V_1 + I_S R = 50 + j100 \text{ V} \end{aligned}$$

Impedancia equivalente

Desactivando las fuentes, y reflejando y agrupando impedancias,

$$Z_{Th} = Z_{xy} = R_S + a^2 \left[\frac{1}{j\omega C} + R + j\omega L + \frac{(\omega M)^2}{\frac{1}{j\omega C} + R + j\omega L} \right] = 100 \text{ } \Omega$$

Ejemplo 5 de análisis en régimen sinusoidal



El circuito de la figura, en cuya representación se ha utilizado notación fasorial, funciona en régimen sinusoidal permanente.

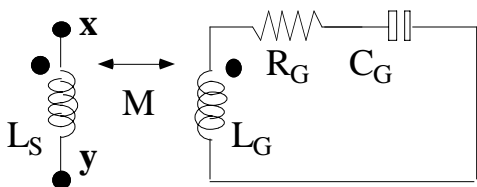
Se desea calcular la impedancia que hay que colocar entre x e y para que en ella se disipe la máxima potencia media posible.

$$V_G = -1 + j \text{ V}, I_S = 1 \text{ A}, \omega = 100 \text{ krad/s}, a = 2$$

$$R_S = 1 \ \Omega, R_G = 1 \ \Omega, R = 1 \ \Omega$$

$$L_S = 20 \ \mu\text{H}, L_G = 20 \ \mu\text{H}, M = 10 \ \mu\text{H}, C_G = 5 \ \mu\text{F}, C = 10 \ \mu\text{F}$$

El cálculo ha de hacerse teniendo en cuenta L_S , ya que es dato.



Desactivando las fuentes, el circuito queda como se muestra en la figura adjunta (el cortocircuito de la fuente de tensión anula el transformador ideal, y el circuito abierto de la fuente de corriente cancela el efecto de R_S).

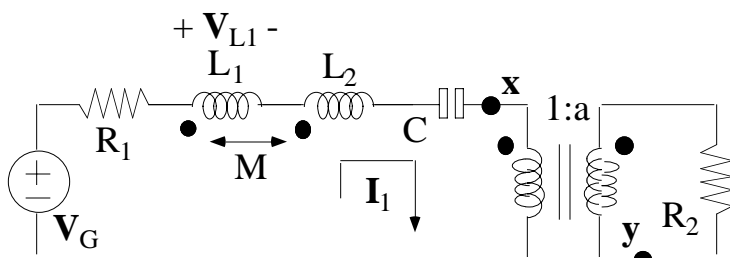
Reflejando impedancias,

$$Z_{Th} = Z_{xy} = j\omega L_S + \frac{(\omega M)^2}{\frac{1}{j\omega C_G} + R_G + j\omega L_G} = 1 + j2 \ \Omega$$

La impedancia de máxima potencia (que ha de ser dispuesta en paralelo con L_S) es

$$Z_L = Z_{Th}^* = 1 - j2 \ \Omega$$

Ejemplo 6 de análisis en régimen sinusoidal



El circuito de la figura, en cuya representación se ha utilizado notación fasorial, funciona en régimen sinusoidal permanente.

Se desea obtener la potencia instantánea en L_1 , y el equivalente Thèvenin entre x e y .

$$\begin{aligned} V_G &= 4 \text{ V}, \omega = 100 \text{ krad/s}, a = 2 \\ R_1 &= 1 \text{ } \Omega, R_2 = 4 \text{ } \Omega, C = 1 \text{ } \mu\text{F} \\ L_1 &= 40 \text{ } \mu\text{H}, L_2 = 40 \text{ } \mu\text{H}, M = 10 \text{ } \mu\text{H} \end{aligned}$$

Reflejando impedancias en el transformador ideal,

$$\begin{aligned} V_G &= I_1 \left(R_1 + j\omega L_1 + j\omega L_2 + j2\omega M + \frac{1}{j\omega C} + \frac{R_2}{a^2} \right) \Rightarrow \\ \Rightarrow I_1 &= 2 \text{ A} \Rightarrow i_1(t) = 2\cos(\omega t) \text{ A} \quad (\omega = 100 \text{ krad/s}) \end{aligned}$$

$$V_{L1} = I_1(j\omega L_1 + j\omega M) = j10 \text{ V} \Rightarrow v_{L1}(t) = 10\cos(\omega t + 90^\circ) \text{ V} \quad (\omega = 100 \text{ krad/s})$$

$$p_{L1}(t) = v_{L1}(t)i_1(t)$$

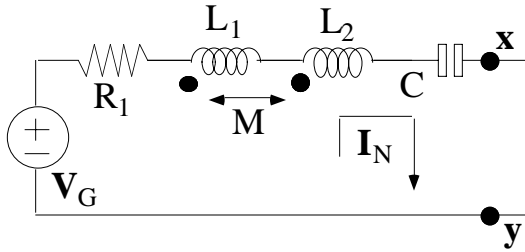
Decir “entre x e y ” es lo mismo que decir “en el primario del transformador ideal”, ya que las líneas inferiores del circuito constituyen un único nudo. Para calcular el equivalente Thèvenin se aplica el procedimiento general (no se desactiva la fuente y se agrupan impedancias debido a la dificultad que supone el que no estén totalmente separadas las inductancias del transformador lineal).

Tensión de circuito abierto

Se considera el circuito tal como está, con lo que I_1 tendrá el valor calculado anteriormente. Reflejando impedancias, la tensión en el primario del transformador ideal es

$$V_{xy} = V_{Th} = I_1 \frac{R_2}{a^2} = 2 \text{ V}$$

Corriente de cortocircuito



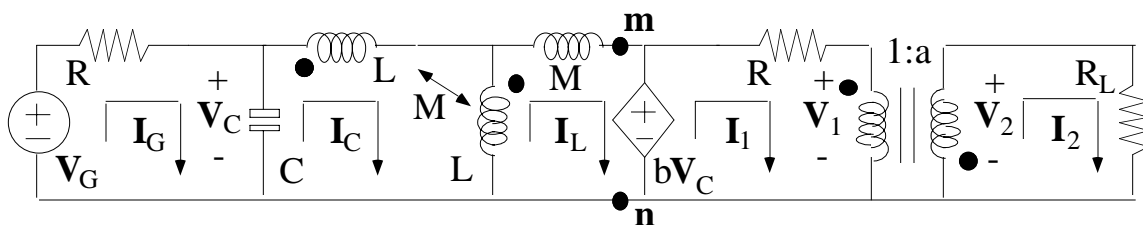
Al conectar un circuito en el primario del transformador ideal se anula éste.

$$V_G = I_N \left(R_1 + j\omega L_1 + j\omega L_2 + j2\omega M + \frac{1}{j\omega C} \right) \Rightarrow I_N = 4 \text{ A}$$

Impedancia equivalente

$$Z_{Th} = \frac{V_{Th}}{I_N} = 0.5 \Omega$$

Ejemplo 7 de análisis en régimen sinusoidal



El circuito de la figura, en cuya representación se ha utilizado notación fasorial, funciona en régimen sinusoidal permanente (no hay error en la inductancia marcada con M; tiene ese valor).

Los únicos datos que se conocen son:

$$a = 2, R_L = 4 \Omega$$

en R_L se disipa la máxima potencia media posible

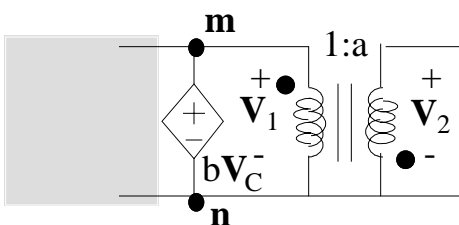
Se desea obtener el valor de R.

Se trata de un problema inverso de equivalente Thèvenin.

En el problema directo equivalente se pediría determinar el valor de R_L para que en ella se disipara la máxima potencia media posible.

En el problema directo, el cálculo se haría sin R_L porque se trataría del parámetro a determinar.

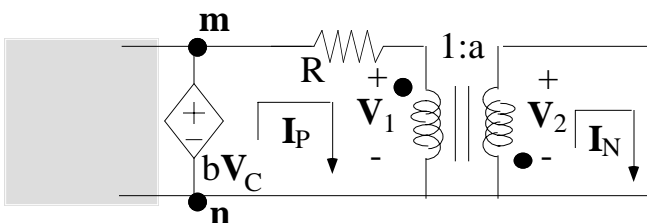
Tensión de circuito abierto



Al sustituir R_L por un circuito abierto,

$$\begin{aligned} I_2 = 0 \text{ A} &\Rightarrow I_1 = 0 \text{ A} \Rightarrow \\ \Rightarrow V_1 = bV_C &\Rightarrow V_2 = -abV_C = V_{Th} \end{aligned}$$

Corriente de cortocircuito



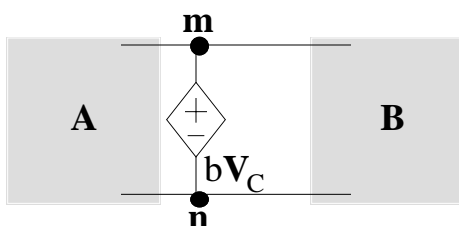
Al sustituir R_L por un cortocircuito,

$$\begin{aligned} V_2 = 0 \text{ V} &\Rightarrow V_1 = 0 \text{ V} \Rightarrow \\ \Rightarrow I_P = \frac{bV_C}{R} &\Rightarrow I_N = -\frac{bV_C}{aR} \end{aligned}$$

En condiciones normales, V_C sería distinta en ambos casos, ya que las condiciones del circuito son diferentes en uno y otro. Sin embargo, en este circuito particular, y como se demuestra más adelante, V_C tiene el mismo valor en los dos. En consecuencia,

$$R_L = Z_L = Z_{Th}^* = \left(\frac{V_{Th}}{I_N} \right)^* = (a^2 R)^* \Rightarrow R = 1 \Omega$$

Tensión en la capacidad



V_C está determinada exclusivamente por lo que sucede en la parte **A** del circuito. Por tanto, su valor no está afectado por los cambios que se produzcan en la parte **B**.

Otra forma de comprobar que V_C no depende de la parte **B** es la siguiente. En el circuito se verifican las siguientes ecuaciones:

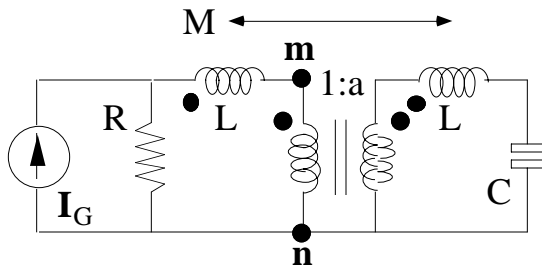
$$\begin{aligned} V_G &= I_G \left(R + \frac{1}{j\omega C} \right) - \frac{I_C}{j\omega C} \\ 0 &= -\frac{I_G}{j\omega C} + I_C \left(\frac{1}{j\omega C} + j2\omega L + j2\omega M \right) - I_L (j\omega L + j\omega M) \\ 0 &= -I_C (j\omega L + j\omega M) + I_L (j\omega L + j\omega M) + b \frac{I_G - I_C}{j\omega C} \end{aligned}$$

Se trata de un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas, que permite obtener los valores de I_G , I_C e I_L . Obsérvese que ninguno de ellos depende de elementos incluidos en la parte **B** del circuito. Por tanto, lo mismo ocurrirá con V_C , ya que

$$V_C = \frac{I_G - I_C}{j\omega C}$$

Ejercicios de repaso

Análisis en régimen sinusoidal / 1



El circuito de la figura, en cuya representación se ha utilizado notación fasorial, funciona en régimen sinusoidal permanente a una frecuencia angular ω conocida.

Se desea obtener las potencias instantánea, media y reactiva en la capacidad, y la impedancia entre **m** y **n**.

$$\begin{aligned} I_G &= 1 \text{ A}, a = -2, R = 1 \ \Omega \\ \omega L &= 1 \ \Omega, \omega M = 1 \ \Omega, \omega C = 1 \text{ S} \end{aligned}$$

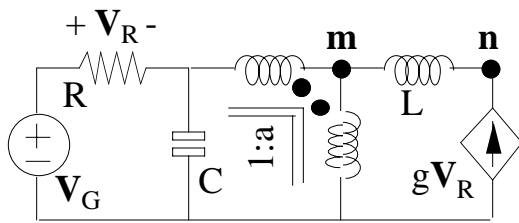
Soluciones

$$p_C(t) = 0.25 \cos(\omega t + 180^\circ) \cos(\omega t + 90^\circ) \text{ W}$$

$$P_G = 0 \text{ W}, Q_G = -0.125 \text{ VAR}$$

$$Z_{mn} = -j0.5 \ \Omega$$

Análisis en régimen sinusoidal / 2



El circuito de la figura, en cuya representación se ha utilizado notación fasorial, funciona en régimen sinusoidal permanente a una frecuencia angular ω conocida.

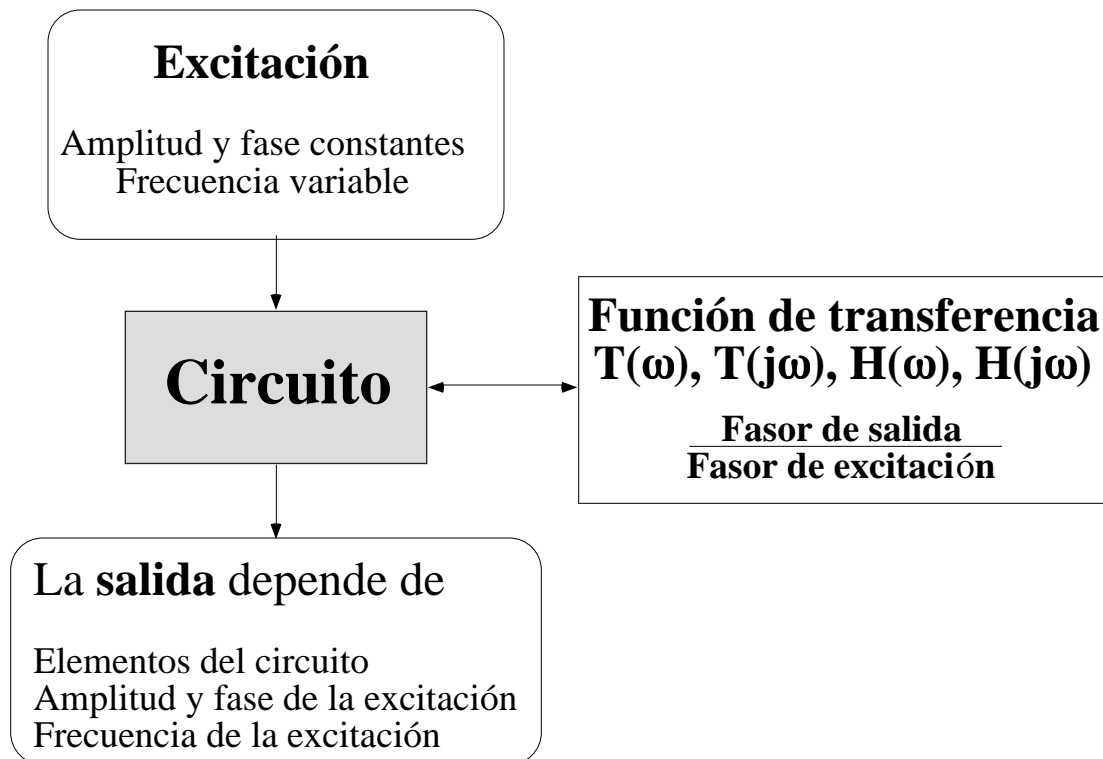
Se desea calcular el circuito equivalente de Thèvenin entre **m** y **n**.

$$\begin{aligned} V_G &= 3 \text{ V}, a = 3, g = -2/3 \text{ S} \\ R &= 1 \ \Omega, \omega L = 1 \ \Omega, \omega C = 1 \text{ S} \end{aligned}$$

Soluciones

$$V_{Th} = j2 \text{ V}, Z_{Th} = j \ \Omega$$

Respuesta en frecuencia

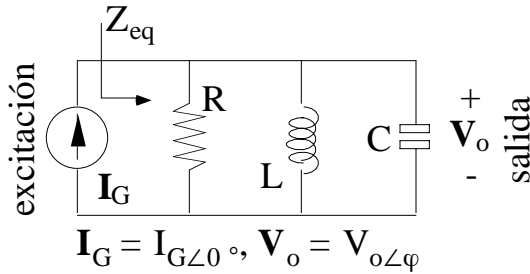


La dependencia del comportamiento de un circuito de la frecuencia de la excitación (comportamiento tipo filtro) es una de las bases de la tecnología de telecomunicaciones.

Un circuito se comporta *mejor* que otros a unas frecuencias dadas.
Un circuito se comporta *mejor* a unas frecuencias que otras.

Respuesta en frecuencia de resonadores ideales

Resonador paralelo



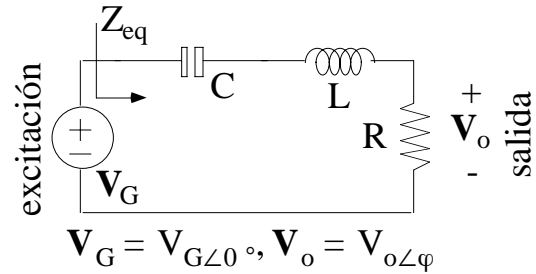
$$T(\omega) \equiv \frac{V_o}{I_G} = Z_{eq} = \frac{1}{\frac{1}{R} + \frac{1}{j\omega L} + j\omega C}$$

$$\omega \rightarrow 0 \text{ rad/s} \Rightarrow T(\omega) \rightarrow j\omega L \approx j0 \Omega$$

$$\omega \rightarrow \infty \text{ rad/s} \Rightarrow T(\omega) \rightarrow \frac{1}{j\omega C} \approx -j0 \Omega$$

$$\omega \text{ intermedia} \Rightarrow T(\omega) \rightarrow \text{no nula}$$

Resonador serie

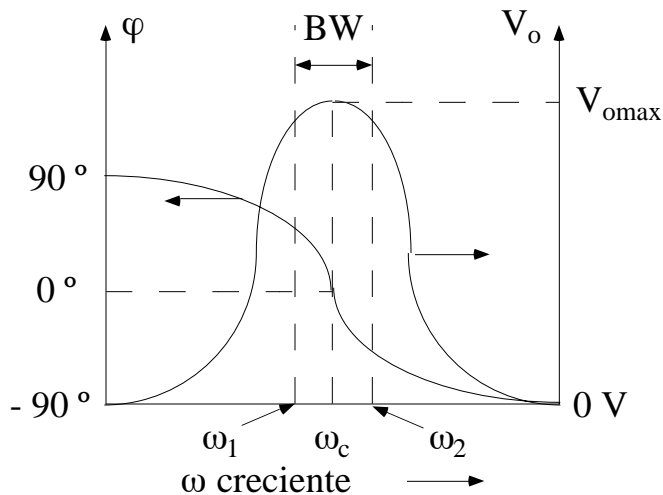


$$T(\omega) \equiv \frac{V_o}{V_G} = \frac{R}{Z_{eq}} = \frac{R}{\frac{1}{j\omega C} + j\omega L + R}$$

$$\omega \rightarrow 0 \text{ rad/s} \Rightarrow T(\omega) \rightarrow j\omega RC \approx j0$$

$$\omega \rightarrow \infty \text{ rad/s} \Rightarrow T(\omega) \rightarrow \frac{R}{j\omega L} \approx -j0$$

$$\omega \text{ intermedia} \Rightarrow T(\omega) \rightarrow \text{no nula}$$



Función de transferencia en el resonador paralelo;

$$\begin{aligned} V_{o \angle \varphi} &= V_o = \\ &= T(\omega) I_G = (|T(\omega)| I_G) \angle T(\omega) \end{aligned}$$

Para el resonador serie se tendría una representación similar.

Caracterización matemática de la respuesta en frecuencia

Frecuencia central

$$\omega_c \Rightarrow |T(\omega_c)| = \text{máximo de } |T(\omega)|$$

**Banda de paso
(ancho de banda)**

$$BW = \omega_2 - \omega_1$$

$$|T(\omega_1)| = \frac{|T(\omega_c)|}{\sqrt{2}} = |T(\omega_2)|$$

$$\omega \in BW \text{ si } |T(\omega)| \geq \frac{|T(\omega_c)|}{\sqrt{2}}$$

$$\omega_c \in BW$$

Ancho de banda relativo

$$bw = \frac{BW}{\omega_c}$$

Factor de calidad

$$Q = \frac{\omega_c}{BW} = \frac{1}{bw}$$

Resonadores ideales

$$\omega_c \Rightarrow \angle T(\omega_c) = 0^\circ$$

$$\omega_c \Rightarrow Z_{eq} = R$$

$$\omega_c = \sqrt{\omega_1 \omega_2} = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Resonador paralelo

$$BW = \frac{1}{RC}, Q = \omega_c RC$$

Resonador serie

$$BW = \frac{R}{L}, Q = \frac{1}{\omega_c RC}$$

**Frecuencia de resonancia
(ω_0)**

La impedancia que ve la excitación es puramente resistiva (se cancelan los efectos inductivos y capacitivos)

En resonadores ideales

$$\omega_0 = \omega_c$$

En resonadores ideales, la frecuencia de resonancia está determinada por los elementos reactivos, y el factor de calidad, por la resistencia.

Cuanto mayor es el factor de calidad, más aguda es la curva del módulo de la respuesta en frecuencia.

Elementos reactivos y respuesta en frecuencia

La variación de la respuesta (salida) de un circuito con la frecuencia de la excitación se debe a la variación de impedancia en los elementos reactivos.

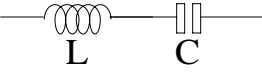
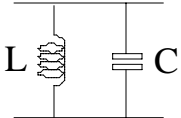
Para unos valores dados de L y C

ω	0 rad/s	∞ rad/s
$Z = \frac{1}{j\omega C}$	$-j\infty \Omega$ (circuito abierto, fase de -90°)	$-j0 \Omega$ (cortocircuito, fase de -90°)
$Z = j\omega L$	$j0 \Omega$ (cortocircuito, fase de 90°)	$j\infty$ (circuito abierto, fase de 90°)

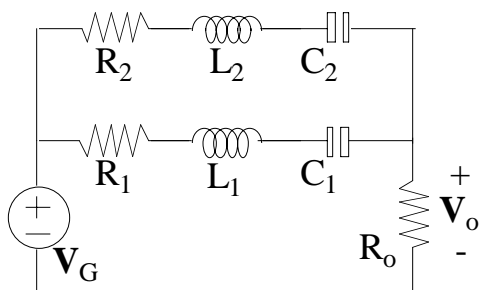
Para un valor dado de ω

L, C	0 (H, F)	∞ (H, F)
$Z = \frac{1}{j\omega C}$	$-j\infty \Omega$ (circuito abierto, fase de -90°)	$-j0 \Omega$ (cortocircuito, fase de -90°)
$Z = j\omega L$	$j0 \Omega$ (cortocircuito, fase de 90°)	$j\infty$ (circuito abierto, fase de 90°)

Agrupaciones simples de elementos reactivos

$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$		$Z_{eq} = j0 \Omega$ (cortocircuito, fase de 90°)
		$Z_{eq} = -j\infty \Omega$ (circuito abierto, fase de -90°)

Ejemplo 1 de respuesta en frecuencia



El circuito de la figura, en cuya representación se ha utilizado notación fasorial, funciona en régimen sinusoidal permanente. Son datos las características de todos los elementos.

Las bandas de paso de los dos resonadores (cada una de las agrupaciones serie RLC) están muy separadas.

Además,

$$\omega_2 = \frac{1}{\sqrt{L_2 C_2}} \gg \frac{1}{\sqrt{L_1 C_1}} = \omega_1, R_1 > R_2$$

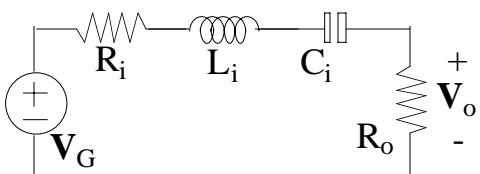
$$T(\omega) = \frac{V_o}{V_G}$$

Se desea obtener una representación cualitativa de la variación del módulo de la función de transferencia con la frecuencia.

$$i = 1, 2 \Rightarrow Z_i = R_i + j\omega L_i + \frac{1}{j\omega C_i} \Rightarrow T(\omega) = \frac{V_o}{V_G} = \frac{R_o}{(Z_1 // Z_2) + R_o} \quad (1)$$

Analizar la variación del módulo de $T(\omega)$ con la frecuencia a partir de (1) tiene una complejidad matemática importante.

Por tanto, es preferible recurrir a otro procedimiento.



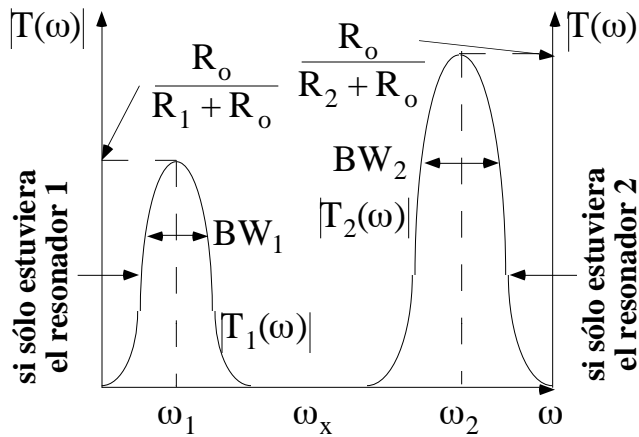
Considérese un circuito como el mostrado en la figura adjunta, en la que i vale 1 o vale 2.

Es decir, se trata de examinar qué ocurriría si el circuito contuviera un solo resonador.

En tal circuito se cumple lo siguiente:

$$\begin{aligned} & \Rightarrow T(\omega) = \frac{R_o}{Z_i + R_o} \Rightarrow \\ & \left. \begin{aligned} \omega \ll \omega_i & \Rightarrow Z_i \rightarrow -j\infty \Omega \Rightarrow |T(\omega)| \rightarrow 0 \\ & \text{efecto capacitivo (circuito abierto) dominante} \\ \omega \approx \omega_i & \Rightarrow Z_i \rightarrow R_i \Rightarrow |T(\omega)| \rightarrow \frac{R_o}{R_i + R_o} \\ & \text{cancelación de efectos inductivo y capacitivo} \\ & \text{a la frecuencia de resonancia} \\ \omega \gg \omega_i & \Rightarrow Z_i \rightarrow j\infty \Omega \Rightarrow |T(\omega)| \rightarrow 0 \\ & \text{efecto inductivo (circuito abierto) dominante} \end{aligned} \right\} \quad (2) \end{aligned}$$

En una agrupación serie (paralelo) es dominante el efecto circuito abierto (cortocircuito).



La figura muestra la representación gráfica de (2); se han combinado las representaciones correspondientes a ambos resonadores.

La disposición relativa de las curvas está justificada por los datos.

La frecuencia de resonancia del primer resonador es menor que la del segundo. En cada resonador coinciden las frecuencias central y de resonancia, porque son ideales.

Si los anchos de banda están muy separados, ello significa que las curvas respectivas no se superponen. Las posiciones relativas de los máximos se justifican por la relación entre las resistencias.

A la vista de lo anterior,

$$\omega \ll \omega_x \Rightarrow Z_1/Z_2 \rightarrow \frac{Z_1(-j\infty)}{Z_1 - j\infty} \approx Z_1 \Rightarrow |T(\omega)| \rightarrow \frac{R_o}{|Z_1 + R_o|} = |T_1(\omega)|$$

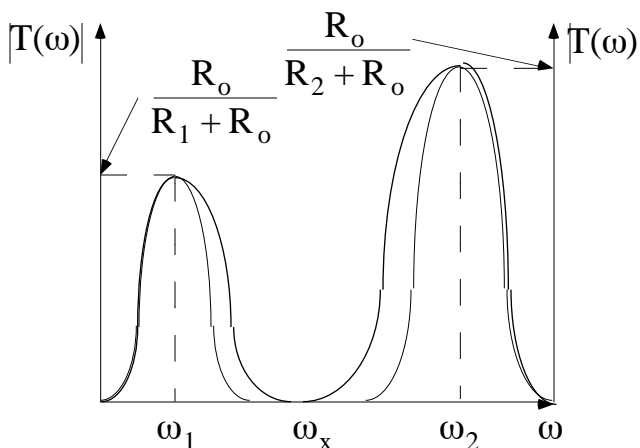
el efecto del circuito abierto (capacitivo) del segundo resonador es cancelado por la impedancia finita del primero

$$\omega \approx \omega_x \Rightarrow Z_1/Z_2 \rightarrow \frac{(-j\infty)(-j\infty)}{(-j\infty) - j\infty} \approx \infty \Omega \Rightarrow |T(\omega)| \rightarrow 0$$

los dos resonadores son circuitos abiertos

$$\omega \gg \omega_x \Rightarrow Z_1/Z_2 \rightarrow \frac{(j\infty)Z_2}{j\infty + Z_2} \approx Z_2 \Rightarrow |T(\omega)| \rightarrow \frac{R_o}{|Z_2 + R_o|} = |T_2(\omega)|$$

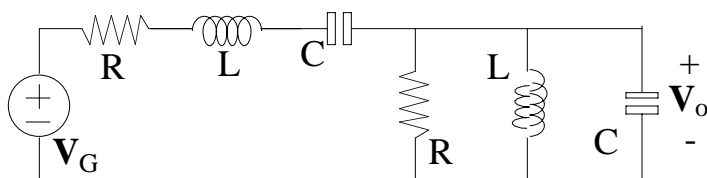
el efecto del circuito abierto (inductivo) del primer resonador es cancelado por la impedancia finita del segundo



La figura muestra la respuesta completa.

Que sea aproximadamente igual a la suma de las respuestas parciales se debe únicamente a las condiciones particulares del problema, y no a que sea válido en general considerar separadamente respuestas parciales en un circuito.

Ejemplo 2 de respuesta en frecuencia



Se desea obtener los valores a los que tienden el módulo y la fase de la función de transferencia para

$$\omega \rightarrow 0 \text{ rad/s}, \omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \omega \rightarrow \infty \text{ rad/s}$$

El circuito de la figura, en cuya representación se ha utilizado notación fasorial, funciona en régimen sinusoidal permanente. Son datos los valores de todos los elementos. La función de transferencia es

$$T(\omega) = \frac{V_o}{V_G}$$

$$Z_1 = R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}, Z_2 = \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{j\omega L} + j\omega C \right)^{-1} \Rightarrow T(\omega) = \frac{V_o}{V_G} = \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2}$$

$$\omega \rightarrow 0 \text{ rad/s} \Rightarrow \left| \begin{array}{l} Z_1 \rightarrow \frac{1}{j\omega C} \\ Z_2 \rightarrow j\omega L \end{array} \right| \Rightarrow T(\omega) \rightarrow -\omega^2 LC \Rightarrow \left| \begin{array}{l} |T(\omega)| \rightarrow 0 \\ \angle T(\omega) \rightarrow 180^\circ \end{array} \right|$$

inductancias como cortocircuitos y capacidades como circuitos abiertos

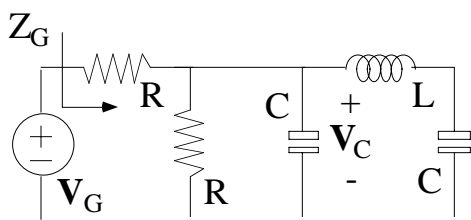
$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} \Rightarrow \left| \begin{array}{l} Z_1 = R \\ Z_2 = R \end{array} \right| \Rightarrow T(\omega) = \frac{1}{2} \Rightarrow \left| \begin{array}{l} |T(\omega)| = \frac{1}{2} \\ \angle T(\omega) = 0^\circ \end{array} \right|$$

cancelación de efectos inductivos y capacitivos en cada resonador

$$\omega \rightarrow \infty \text{ rad/s} \Rightarrow \left| \begin{array}{l} Z_1 \rightarrow j\omega L \\ Z_2 \rightarrow \frac{1}{j\omega C} \end{array} \right| \Rightarrow T(\omega) \rightarrow -\frac{1}{\omega^2 LC} \Rightarrow \left| \begin{array}{l} |T(\omega)| \rightarrow 0 \\ \angle T(\omega) \rightarrow 180^\circ \end{array} \right|$$

inductancias como circuitos abiertos y capacidades como cortocircuitos

Ejemplo 3 de respuesta en frecuencia



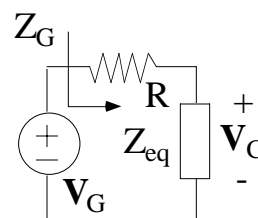
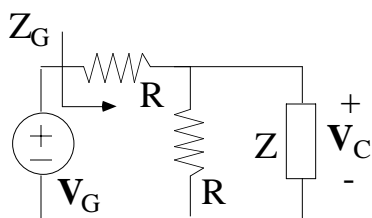
$$\angle \mathbf{V}_G = 0^\circ$$

El circuito de la figura, en cuya representación se ha utilizado notación fasorial, funciona en régimen sinusoidal permanente.

Son datos las características de todos los elementos.

Se desea obtener la impedancia que ve la fuente, y los valores a los que tienden el módulo y la fase de \mathbf{V}_C cuando ω tiende a 0 rad/s y cuando ω tiende a ∞ rad/s.

Agrupando impedancias,



$$Z = \left(\frac{1}{j\omega C} \right) // \left(j\omega L + \frac{1}{j\omega C} \right) = -jX, \quad X = \frac{1}{\omega C} \left(\frac{1 - \omega^2 LC}{2 - \omega^2 LC} \right)$$

$$Z_{eq} = R // Z = R_{eq} - jX_{eq}; \quad R_{eq} = \frac{RX^2}{R^2 + X^2}, \quad X_{eq} = \frac{R^2 X}{R^2 + X^2}$$

$$Z_G = R + Z_{eq}$$

$$\mathbf{V}_C = \frac{Z_{eq}}{R + Z_{eq}} \mathbf{V}_G = \frac{Z_{eq}}{Z_G} \mathbf{V}_G$$

$$\omega \rightarrow 0 \text{ rad/s} \Rightarrow X \rightarrow \frac{1}{2\omega C} \Rightarrow Z_{eq} \rightarrow R \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Z_G \rightarrow 2R \Rightarrow \mathbf{V}_C \rightarrow \frac{\mathbf{V}_G}{2} \Rightarrow$$

$$|\mathbf{V}_C| \rightarrow \frac{|\mathbf{V}_G|}{2}$$

$$\angle \mathbf{V}_C \rightarrow \angle \mathbf{V}_G = 0^\circ$$

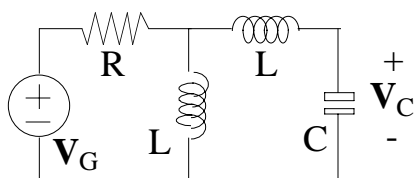
$$\omega \rightarrow \infty \text{ rad/s} \Rightarrow X \rightarrow \frac{1}{\omega C} \Rightarrow Z_{eq} \rightarrow -jX \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Z_G \rightarrow R \Rightarrow \mathbf{V}_C \rightarrow -\frac{j\mathbf{V}_G}{\omega RC} \Rightarrow$$

$$|\mathbf{V}_C| \rightarrow 0 \text{ V}$$

$$\angle \mathbf{V}_C \rightarrow -90^\circ$$

Ejemplo 4 de respuesta en frecuencia



$$\angle \mathbf{V}_G = 0^\circ$$

El circuito de la figura, en cuya representación se ha utilizado notación fasorial, funciona en régimen sinusoidal permanente.

Son datos las características de todos los elementos del circuito.

Se desea obtener los valores a los que tienden el módulo y la fase de \mathbf{V}_C cuando ω tiende a 0 rad/s y cuando ω tiende a ∞ rad/s, y el valor de la frecuencia de resonancia del circuito.

La impedancia que ve la fuente es

$$Z_G = R + Z_{eq}, Z_{eq} = (j\omega L) // \left(j\omega L + \frac{1}{j\omega C} \right) = j\omega L \frac{\omega^2 L^2 C}{1 - 2\omega^2 LC}$$

con lo que

$$\mathbf{V}_C = \frac{Z_{eq}}{R + Z_{eq}} \mathbf{V}_G = \frac{Z_{eq}}{Z_G} \mathbf{V}_G$$

Pueden utilizarse estas expresiones para determinar los límites pedidos, pero también es posible recurrir al siguiente planteamiento alternativo.

Para frecuencias muy bajas, las inductancias y las capacidades tienden a comportarse como cortocircuitos y circuitos abiertos, respectivamente. En consecuencia, no circula corriente por el conjunto L-C serie, y la tensión en la capacidad es la misma que en la inductancia que está en paralelo con él.

$$\omega \rightarrow 0 \text{ rad/s} \Rightarrow \mathbf{V}_C \rightarrow \frac{\mathbf{V}_G j\omega L}{R} \Rightarrow \begin{cases} |\mathbf{V}_C| \rightarrow 0 \text{ V} \\ \angle \mathbf{V}_C \rightarrow 90^\circ \end{cases}$$

Para frecuencias muy altas, las inductancias y las capacidades tienden a comportarse como circuitos abiertos y cortocircuitos, respectivamente. En consecuencia, la corriente proporcionada por la fuente se reparte igualmente entre las dos ramas que contienen las inductancias (ya que son las impedancias dominantes).

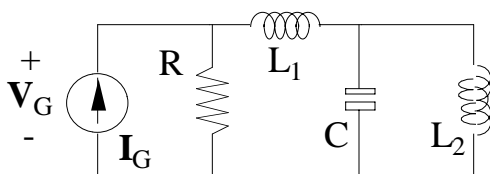
$$\omega \rightarrow \infty \text{ rad/s} \Rightarrow \mathbf{V}_C \rightarrow \frac{\mathbf{V}_G \left(\frac{1}{j\omega L} \right)}{\frac{1}{j\omega L} + \frac{1}{j\omega C}} = -\frac{2\mathbf{V}_G}{\omega^2 LC} \Rightarrow \begin{cases} |\mathbf{V}_C| \rightarrow 0 \text{ V} \\ \angle \mathbf{V}_C \rightarrow 180^\circ \end{cases}$$

La frecuencia de resonancia es aquella para la que se cancelan los efectos inductivos y capacitivos del circuito de modo que la impedancia que ve la excitación es puramente resistiva.

$$\begin{aligned} \omega = \omega_0 \Rightarrow Z_G \text{ resistiva} \Rightarrow \text{Im}\{Z_G\} = 0 \Omega \Rightarrow \text{Im}\{Z_{\text{eq}}\} = 0 \Omega \Rightarrow \\ \Rightarrow \omega_0 L = \omega_0^3 L^2 C \Rightarrow \quad \left| \begin{array}{l} \omega_0 = 0 \text{ rad/s} \\ \omega_0 = \pm \frac{1}{\sqrt{LC}} \end{array} \right. \end{aligned}$$

La solución nula carece de sentido (el circuito estaría en régimen continuo).
La solución negativa carece de significado físico.

Ejemplo 5 de respuesta en frecuencia



El circuito de la figura, en cuya representación se ha utilizado notación fasorial, funciona en régimen sinusoidal permanente. Son datos las características de todos los elementos.

Se desea obtener la frecuencia de resonancia (finita, no nula), y plantear la condición para determinar la frecuencia a la que la tensión en la fuente tiene una fase 45° mayor que la de la corriente proporcionada por la fuente.

Para obtener la frecuencia de resonancia puede calcularse la impedancia que ve la fuente, y, a continuación, imponer la condición de que su parte imaginaria sea nula. Un procedimiento alternativo es el que se indica seguidamente.

Para una frecuencia nula, las inductancias son cortocircuitos, con lo que L_2 cancela el efecto de la capacidad, y la agrupación en serie de ambas inductancias cancela el efecto de la resistencia que está en paralelo con ellas. La fuente ve una impedancia nula, pero la condición de frecuencia nula está descartada en el enunciado.

Para una frecuencia infinita, las inductancias son circuitos abiertos, con lo que no circula corriente por la agrupación $L_1-(L_2//C)$. La condición de frecuencia infinita también está descartada en el enunciado.

Para una frecuencia

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L_2 C}}$$

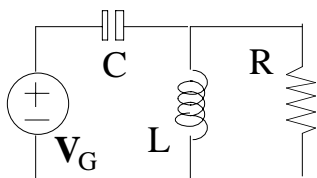
la agrupación $L_2//C$ es un circuito abierto, con lo que toda la corriente proporcionada por la fuente circula por la resistencia. Es decir, la fuente ve una impedancia puramente resistiva, y la frecuencia indicada es la de resonancia.

Siendo Z_G la impedancia que ve la fuente,

$$V_G = I_G Z_G \Rightarrow 45^\circ = \angle V_G - \angle I_G = \angle Z_G \Rightarrow 0 \Omega < \operatorname{Re}\{Z_G\} = \operatorname{Im}\{Z_G\} > 0 \Omega$$

Resolviendo la última ecuación
(la condición acerca de los signos es para evitar una fase distinta)
se obtiene la frecuencia buscada

Ejemplo 6 de respuesta en frecuencia



El circuito de la figura, en cuya representación se ha utilizado notación fasorial, funciona en régimen sinusoidal permanente. Son datos las características de todos los elementos.

Se desea determinar el rango de frecuencias en el que el módulo de la función de transferencia es superior a la unidad, y la condición para que dicho rango exista realmente.

$$T(\omega) = \frac{V_o}{V_G}$$

Aplicando la formulación de los divisores de tensión,

$$T(\omega) = \frac{V_o}{V_G} = \frac{R // (j\omega L)}{\frac{1}{j\omega C} + R // (j\omega L)} = \frac{-\omega^2 LRC}{R(1 - \omega^2 LC) + j\omega L} \equiv \frac{N(\omega)}{D(\omega)}$$

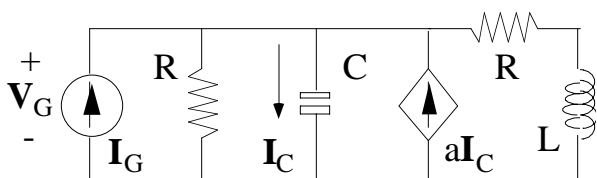
$$\begin{aligned} |T(\omega)| \geq 1 &\Rightarrow |N(\omega)| \geq |D(\omega)| \Rightarrow (\omega^2 LRC)^2 \geq R^2(1 - \omega^2 LC)^2 + (\omega L)^2 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \omega \geq \frac{R}{\sqrt{L(2R^2C - L)}} \end{aligned}$$

Para cualquier frecuencia superior a la indicada en la última expresión, el módulo de la función de transferencia es superior a la unidad.

Ese rango existe si el radical del denominador es positivo. Es decir, ha de cumplirse

$$L < 2R^2C$$

Ejemplo 7 de respuesta en frecuencia



$$\angle \mathbf{I}_G = 0^\circ$$

El circuito de la figura, en cuya representación se ha utilizado notación fasorial, funciona en régimen sinusoidal permanente.

Son datos las características de todos los elementos.

Se desea obtener la impedancia que ve la fuente independiente

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_G + a\mathbf{I}_C &= \frac{\mathbf{V}_G}{R} + \mathbf{I}_C + \frac{\mathbf{V}_G}{R + j\omega L} \\ \mathbf{I}_C &= \mathbf{V}_G j\omega C \end{aligned} \quad \left| \quad \Rightarrow \mathbf{I}_G = \frac{\mathbf{V}_G}{Z} = \mathbf{V}_G Y$$

$$Y = \frac{1}{R} + j(1 - a)\omega C + \frac{1}{R + j\omega L}, \quad Z = \frac{1}{Y}$$

No es posible calcular la impedancia que ve la fuente agrupando impedancias porque, en principio, se desconoce la de la fuente dependiente.

Se desea obtener los valores a los que tienden el módulo y la fase de la tensión en la fuente dependiente cuando ω tiende a 0 rad/s y a ∞ rad/s

Las tensiones en ambas fuentes son iguales; por tanto,

$$\omega \rightarrow 0 \text{ rad/s} \Rightarrow Y \rightarrow \frac{2}{R} \Rightarrow \mathbf{V}_G \rightarrow \frac{\mathbf{I}_G R}{2} \Rightarrow \begin{aligned} |\mathbf{V}_G| &\rightarrow \frac{|\mathbf{I}_G| R}{2} \\ \angle \mathbf{V}_G &\rightarrow 0^\circ \end{aligned}$$

La capacidad impone un circuito abierto

$$\omega \rightarrow \infty \text{ rad/s} \Rightarrow Y \rightarrow j(1 - a)\omega C \Rightarrow \mathbf{V}_G \rightarrow -j \frac{\mathbf{I}_G}{(1 - a)\omega C} \Rightarrow \begin{aligned} |\mathbf{V}_G| &\rightarrow 0 \text{ V} \\ \angle \mathbf{V}_G &\rightarrow -90^\circ \\ &\text{si } a < 1 \end{aligned}$$

La capacidad impone un cortocircuito

Se desea obtener la frecuencia de resonancia

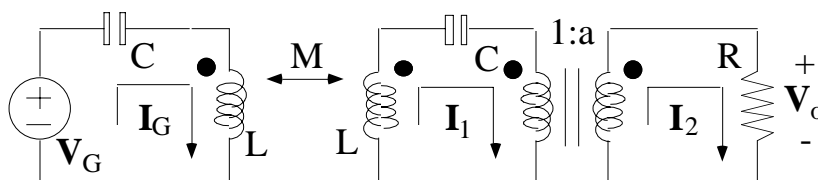
$$\omega = \omega_0 \Rightarrow Z \text{ resistiva} \Rightarrow \text{Im}\{Y\} = 0 \text{ S} \Rightarrow (1 - a)\omega_0 C = \frac{\omega_0 L}{R^2 + (\omega_0 L)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \omega_0 = \begin{cases} 0 \text{ rad/s (no vale)} \\ \sqrt{\frac{L - (1 - a)R^2 C}{(1 - a)L^2 C}} \end{cases} \quad \begin{cases} \\ \text{Para que exista realmente} \\ \text{la frecuencia de resonancia} \\ \text{el radical ha de ser positivo} \end{cases}$$

Se desea obtener la corriente en la capacidad cuando ésta tiene un valor infinito

$$C = \infty \text{ F} \Rightarrow V_G = 0 \text{ V} \Rightarrow I_G + aI_C = I_C \Rightarrow I_C = \frac{I_G}{1 - a}$$

Ejemplo 8 de respuesta en frecuencia



El circuito de la figura, en cuya representación se ha utilizado notación fasorial, funciona en régimen sinusoidal permanente.

Son datos las características de todos los elementos ($a > 0$).

Se desea obtener la frecuencia para la que V_o está en fase con V_G .

Reflejando impedancias y utilizando la notación que se indica, se tiene

$$X = \omega L - \frac{1}{\omega C}, Z = \frac{R}{a^2} + jX, Z_G = \frac{(\omega M)^2}{Z} + jX$$

$$I_G = \frac{V_G}{Z_G}, I_1 = \frac{j\omega M}{Z} I_G, I_2 = \frac{I_1}{a}$$

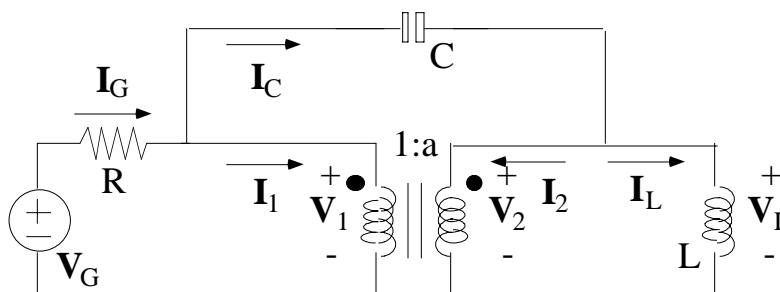
$$V_o = I_2 R = \frac{j\omega R M}{a \left[(\omega M)^2 - X^2 + j \frac{X R}{a^2} \right]} V_G \equiv \frac{N(\omega)}{D(\omega)} V_G$$

$$\angle V_o = \angle V_G \Rightarrow \angle N(\omega) = \angle D(\omega) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \angle D(\omega) \text{ imaginario (ya que } N(\omega) \text{ también lo es)} \Rightarrow \operatorname{Re}\{D(\omega)\} = 0 \Omega^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\omega M)^2 - X^2 = 0 \Omega^2 \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \omega = -\frac{X}{M} \\ \omega = \frac{X}{M} \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{1}{(L-M)C}} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{No vale, porque haría} \\ V_o = -a V_G \Rightarrow \\ \Rightarrow \angle V_o = \angle V_G + 180^\circ \end{array}$$

Ejemplo 9 de respuesta en frecuencia



El circuito de la figura, en cuya representación se ha utilizado notación fasorial (las corrientes son de rama), funciona en régimen sinusoidal permanente. Son datos las características de todos los elementos.

Se desea obtener la frecuencia para la que el módulo de V_L es máximo.

A partir de las ecuaciones del circuito,

$$\begin{aligned} V_G &= I_G R + V_1, \quad V_1 = \frac{I_C}{j\omega C} + V_2, \quad V_2 = I_L j\omega L \\ I_G &= I_1 + I_C, \quad I_C = I_2 + I_L \\ I_1 &= -a I_2, \quad V_2 = a V_1 \end{aligned}$$

se obtiene

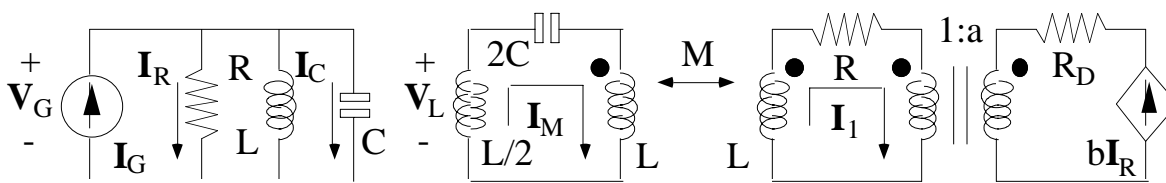
$$V_L = V_2 = \frac{V_G}{\frac{1}{a} + j \left[\frac{(1 - a^2)\omega RC}{a} - \frac{aR}{\omega L} \right]} \equiv \frac{V_G}{D(\omega)}$$

$$|V_L| \text{ máximo} \Rightarrow |D(\omega)| \text{ mínimo}$$

Puesto que la parte real de $D(\omega)$ no depende de la frecuencia, a partir de la condición anterior se obtiene

$$|D(\omega)| \text{ mínimo} \Rightarrow \text{Im}\{D(\omega)\} = 0 \Rightarrow \frac{(1 - a^2)\omega RC}{a} = \frac{aR}{\omega L} \Rightarrow \omega = \frac{a}{\sqrt{(1 - a^2)LC}}$$

Ejemplo 10 de respuesta en frecuencia



El circuito de la figura, en cuya representación se ha utilizado notación fasorial, funciona en régimen sinusoidal permanente.

Son datos las características de todos los elementos.

Se desea obtener la frecuencia para la que la potencia media en R_D es máxima. Para dicha frecuencia, se desea obtener los valores de I_C y V_L .

$$P_{RD} = \frac{|bI_R|^2 R}{2} \text{ máximo} \Rightarrow |I_R| \text{ máximo}$$

Esta condición se cumplirá cuando toda la corriente proporcionada por la fuente de corriente circule por la resistencia que tiene en paralelo.

Ello exige que se cancelen mutuamente los efectos de la inductancia y la capacidad que están en paralelo con aquéllas. Esto equivale a decir que la agrupación L-C paralelo esté en circuito abierto. Es decir,

$$|I_R| \text{ máximo} \Rightarrow I_R = I_G \Rightarrow L\text{-}C \text{ circuito abierto} \Rightarrow \omega_{p\max} = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$$\text{Para } \omega = \omega_{p\max} = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

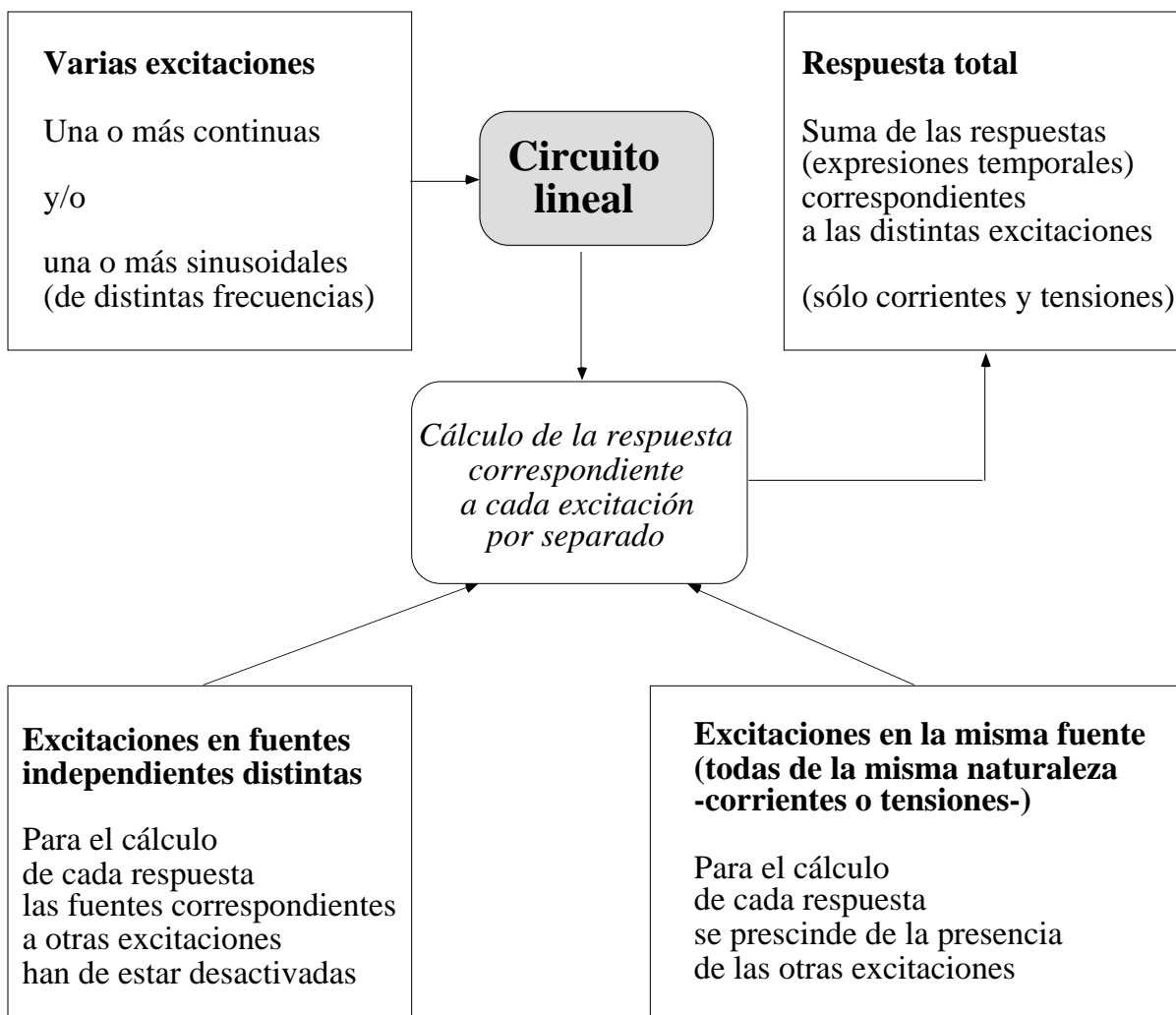
$$I_R = I_G, V_G = I_R R = I_G R, I_1 = -abI_R = -abI_G$$

$$0 = I_M \left(j\omega_{p\max} \frac{L}{2} + \frac{1}{j\omega_{p\max} 2C} + j\omega_{p\max} L \right) - I_1 j\omega_{p\max} M \Rightarrow I_M = -\frac{abM}{L} I_G$$

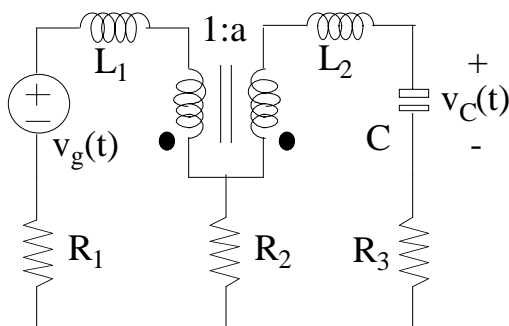
$$I_C = V_G j\omega_{p\max} C = jR \sqrt{\frac{C}{L}} I_G, V_L = -I_M j\omega_{p\max} \frac{L}{2} = j \frac{abM}{2\sqrt{LC}} I_G$$

Obsérvese que, aunque L y C estén en resonancia (también lo está la agrupación $L/2 - 2C$), eso no significa que no haya corrientes en la agrupación en paralelo (son iguales en módulo y de signos opuestos), o que no haya tensiones en la agrupación en serie (son iguales en módulo y de signos opuestos).

Aplicación del principio de superposición



Ejemplo 1 de aplicación del principio de superposición



$$v_g(t) = V_D + V_A \cos(\omega t)$$

$$V_D = 46 \text{ V}, V_A = 220\sqrt{2} \text{ V}$$

$$R_1 = 6.5 \ \Omega, R_2 = 5 \ \Omega, R_3 = 43.5 \ \Omega$$

$$\omega L_1 = 10.8 \ \Omega, \omega L_2 = 22 \ \Omega, a = 10$$

$$(\omega C)^{-1} = 2 \ \Omega$$

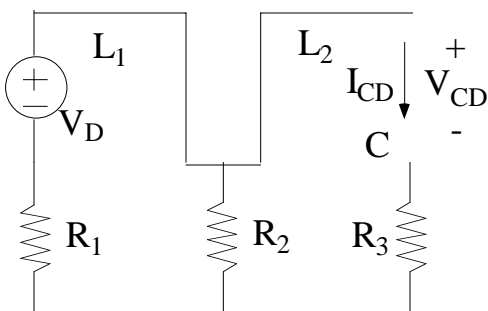
Se desea obtener la expresión temporal de la potencia en la capacidad.

En el circuito están presentes dos excitaciones: una continua (V_D), y una sinusoidal de frecuencia angular ω . Por tanto, habrá que aplicar el principio de superposición, con lo que la respuesta buscada será de la forma

$$v_C(t) = V_{CD} + v_{CA}(t), i_C(t) = I_{CD} + i_{CA}(t)$$

Dado que ambas excitaciones están contenidas en la misma fuente independiente, cuando se considere una se ignorará la presencia de la otra.

Respuesta en continua (DC, direct current)

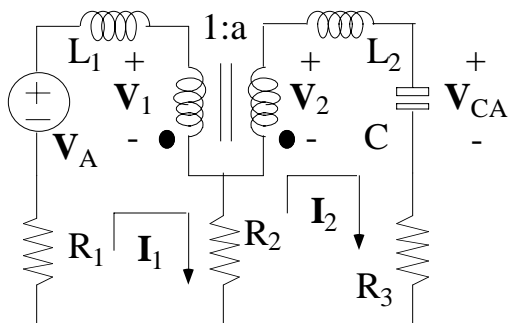


En continua el circuito queda en la forma indicada en la figura adjunta (las inductancias y las capacidades son cortocircuitos y circuitos abiertos, respectivamente).

No hay corriente en el secundario del transformador debido al circuito abierto que impone la capacidad; pero eso no significa que no haya tensión en ella.

La ausencia de corriente en la capacidad hace que la tensión en ella sea la misma que en R_2 . Aplicando la fórmula del divisor de tensión,

$$V_{CD} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} V_D = 20 \text{ V}, I_{CD} = 0 \text{ A}$$

Respuesta a la excitación sinusoidal (AC, alternate current)

Con relación a la excitación sinusoidal el circuito queda en la forma indicada en la figura adjunta, en la que se ha utilizado notación fasorial.

$$\mathbf{V}_A = V_A = 220\sqrt{2} \text{ V}$$

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{V}_A &= \mathbf{I}_1(\mathbf{R}_1 + j\omega\mathbf{L}_1 + \mathbf{R}_2) + \mathbf{V}_1 - \mathbf{I}_2\mathbf{R}_2 \\ 0 &= -\mathbf{I}_1\mathbf{R}_2 - \mathbf{V}_2 + \mathbf{I}_2\left(\mathbf{R}_2 + j\omega\mathbf{L}_2 + \frac{1}{j\omega\mathbf{C}} + \mathbf{R}_3\right) \\ \mathbf{I}_1 &= a\mathbf{I}_2, \mathbf{V}_2 = a\mathbf{V}_1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{aligned} \mathbf{I}_2 &= \sqrt{2}(1 - j) \text{ A} \\ \mathbf{V}_{CA} &= \frac{\mathbf{I}_2}{j\omega\mathbf{C}} = -2\sqrt{2}(1 + j) \text{ V} \end{aligned} \right.$$

$$v_{CA}(t) = \text{Re}\left\{\mathbf{V}_{CA}e^{j\omega t}\right\} = 4\cos(\omega t + 225^\circ) \text{ V}$$

$$i_{CA}(t) = \text{Re}\left\{\mathbf{I}_2e^{j\omega t}\right\} = 2\cos(\omega t - 45^\circ) \text{ V}$$

Respuesta total

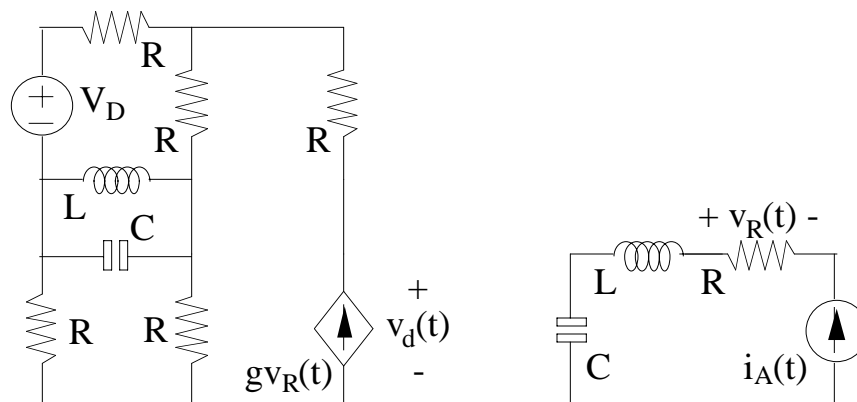
$$v_C(t) = V_{CD} + v_{CA}(t) = 20 + 4\cos(\omega t + 225^\circ) \text{ V}$$

$$i_C(t) = I_{CD} + i_{CA}(t) = 2\cos(\omega t - 45^\circ) \text{ A}$$

$$p_C(t) = v_C(t)i_C(t) = [20 + 4\cos(\omega t + 225^\circ)]2\cos(\omega t - 45^\circ) \text{ W}$$

Obsérvese que el resultado final no coincide con el que se obtendría si se sumaran las potencias continua y sinusoidal calculadas por separado.

Ejemplo 2 de aplicación del principio de superposición



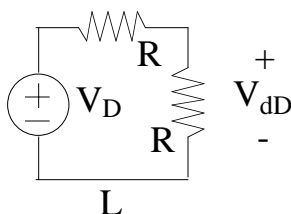
$$i_A(t) = I_A \cos(\omega t), I_A = 1 \text{ A}, \omega = 1 \text{ rad/s}, V_D = 2 \text{ V}$$

$$R = 1 \text{ } \Omega, g = 2 \text{ S}, L = 1 \text{ H}, C = 1 \text{ F}$$

Se desea obtener la expresión temporal de $v_d(t)$.

En el circuito están presentes dos excitaciones diferentes, representadas por distintas fuentes independientes. Se aplica el principio de superposición.

Respuesta en continua



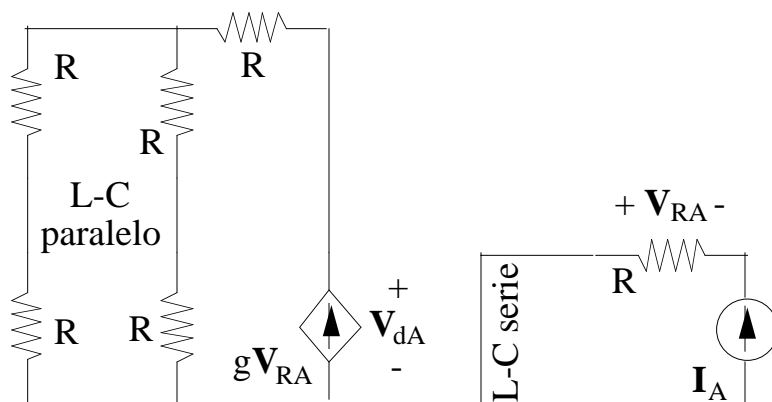
Bajo excitación continua, el circuito queda como en la figura adjunta.

La fuente de corriente está desactivada (sustituida por un circuito abierto), con lo que v_R es nula y, por consiguiente, la fuente dependiente no entrega corriente (es un circuito abierto), aunque puede soportar tensión.

Las inductancias y las capacidades son cortocircuitos y circuitos abiertos, respectivamente. El cortocircuito de la inductancia más próxima a la fuente de tensión anula los efectos de la capacidad y las resistencias a las que está conectada.

$$V_{dD} = \frac{R}{R + R} V_D = 1 \text{ V}$$

Respuesta a la excitación sinusoidal



Bajo excitación sinusoidal el circuito queda en la forma indicada en la figura adjunta, en la que se ha utilizado notación fasorial.

$$\mathbf{I}_A = I_A = 1 \text{ A}$$

Se ha desactivado la fuente de tensión (fue sustituida por un cortocircuito).

Puede observarse que, a la frecuencia indicada, los conjuntos L-C serie y paralelo se comportan, respectivamente, como un cortocircuito y un circuito abierto. En consecuencia, agrupando resistencias,

$$\mathbf{V}_{RA} = -\mathbf{I}_A R$$

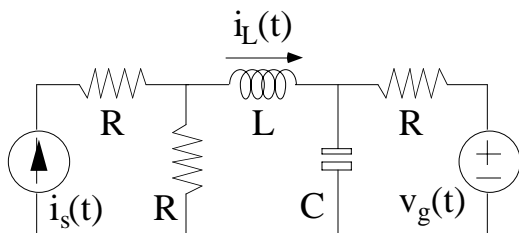
$$\mathbf{V}_{dA} = g\mathbf{V}_{RA} [R + (R + R) // (R + R)] = -4 \text{ V}$$

$$\mathbf{V}_{dA} = V_{dA} e^{j\varphi} = -4 \text{ V} \Rightarrow V_{dA} = 4 \text{ V}, \varphi = 180^\circ$$

Respuesta total

$$v_d(t) = V_{dD} + V_{dA} \cos(\omega t + \varphi) = 1 + 4\cos(\omega t + 180^\circ) \text{ V}, \omega = 1 \text{ rad/s}$$

Ejemplo 3 de aplicación del principio de superposición



$$v_g(t) = V_G \cos(\omega_G t)$$

$$V_G = 1 \text{ V}, \omega_G(t) = 1 \text{ Mrad/s}$$

$$i_s(t) = I_S \cos(\omega_S t + \varphi_i)$$

$$I_S = \sqrt{2} \text{ A}, \omega_S = 1 \text{ krad/s}, \varphi_i = -45^\circ$$

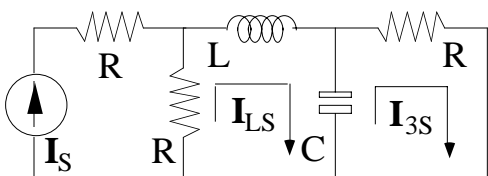
$$R = 1 \Omega, L = 1 \text{ mH}, C = 1 \text{ mF}$$

Se desea obtener la expresión temporal de $i_L(t)$.

En el circuito están presentes dos excitaciones sinusoidales de frecuencias distintas, representadas por fuentes independientes diferentes, por lo que habrá que aplicar el principio de superposición, y la respuesta total será de la forma

$$i_L(t) = I_{LS} \cos(\omega_S t + \varphi_S) + I_{LG} \cos(\omega_G t + \varphi_G)$$

Respuesta a la excitación de frecuencia ω_S



En las condiciones indicadas, el circuito queda como se muestra en la figura adjunta (se ha desactivado la fuente de tensión), en la que se ha utilizado notación fasorial.

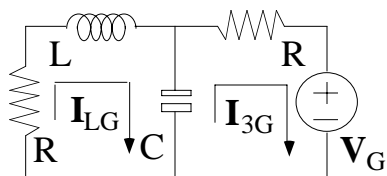
$$\mathbf{I}_S = I_S e^{j\varphi_i} = 1 - j \text{ A}$$

$$0 = -\mathbf{I}_S R + \mathbf{I}_{LS} \left(R + j\omega_S L + \frac{1}{j\omega_S C} \right) - \frac{\mathbf{I}_{3S}}{j\omega_S C}$$

$$0 = -\frac{\mathbf{I}_{LS}}{j\omega_S C} + \mathbf{I}_{3S} \left(R + \frac{1}{j\omega_S C} \right)$$

$$\Rightarrow \mathbf{I}_{LS} = 0.4 - j0.8 \text{ A} \Rightarrow I_{LS} = \sqrt{0.8} \text{ A}, \varphi_S = \arctg(-2) \in 4^\circ \text{ cuadrante}$$

Respuesta a la excitación de frecuencia ω_G



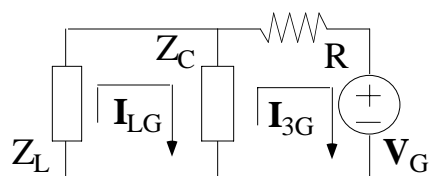
En las condiciones indicadas, el circuito queda como se muestra en la figura adjunta (se ha desactivado la fuente de corriente), en la que se ha utilizado notación fasorial.

$$V_G = V_G = 1 \text{ V}$$

$$0 = I_{LG} \left(R + j\omega_G L + \frac{1}{j\omega_G C} \right) - \frac{I_{3G}}{j\omega_G C} \Rightarrow 0 = I_{LG}(1 + j10^3 - j10^{-3}) + I_{3G}j10^{-3}$$

$$V_G = \frac{I_{LG}}{j\omega_G C} - I_{3G} \left(R + \frac{1}{j\omega_G C} \right) \Rightarrow 1 = -I_{LG}j10^{-3} - I_{3G}(1 - j10^{-3})$$

La resolución de este sistema de ecuaciones no es sencilla. La gran diferencia de órdenes de magnitudes en los valores involucrados puede provocar errores importantes en la determinación de las incógnitas. Por tanto, es preferible recurrir a un análisis aproximado, como el que se muestra a continuación.



En las condiciones indicadas, el circuito puede representarse como se muestra en la figura adjunta, en la que

$$Z_L = R + j\omega_G L = 1 + j10^3 \Omega \approx j10^3 \Omega$$

$$Z_C = \frac{1}{j\omega_G C} = -j10^{-3} \Omega$$

$$R \gg Z_C \ll Z_L \Rightarrow Z_C \approx \text{cortocircuito} \Rightarrow I_{LG} \approx 0 \text{ A}, I_{3G} \approx -\frac{V_G}{R} = -1 \text{ A}$$

Respuesta total

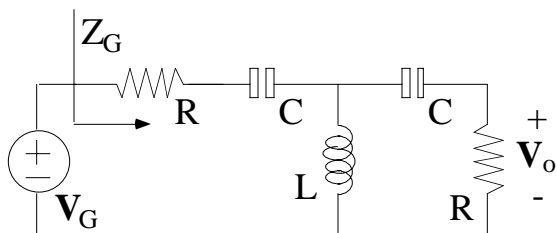
Obsérvese que el circuito, por lo que se refiere a i_L , se comporta como un filtro que tolera la excitación de frecuencia ω_S y rechaza la de frecuencia ω_G .

Si se deseara calcular la tensión en la inductancia para la segunda excitación, podría razonarse aproximadamente como sigue

$$V_{LG} = I_{LG}j\omega_G L \approx \left(\frac{V_{CG}}{Z_L} \right) j\omega_G L \approx \frac{[-I_{3G}/(j\omega_G C)]}{(j\omega_G L)} j\omega_G L \approx j \text{ mV}$$

Ejercicios de repaso

Respuesta en frecuencia



El circuito de la figura, en cuya representación se ha utilizado notación fasorial, funciona en régimen sinusoidal permanente. Son datos las características de todos los elementos.

$$\mathbf{V}_G = V_{G\angle 0^\circ} \quad (\mathbf{V}_G \text{ real y positivo})$$

Se desea obtener:

- La impedancia (Z_G) que ve la excitación, representada por la fuente.
- Al menos un valor (en caso de que haya más de uno) finito y no nulo de la frecuencia de resonancia.
- Los valores a los que tienden el módulo y la fase de \mathbf{V}_o cuando ω tiende a ∞ rad/s.
- Los valores a los que tienden el módulo y la fase de \mathbf{V}_o cuando ω tiende a 0 rad/s.
- Los valores a los que tienden el módulo y la fase de \mathbf{V}_o cuando, para un valor de ω dado, la inductancia tiene un valor muy elevado y las capacidades tienen valores muy bajos.

Soluciones

$$\text{a) } Z_G = Z + \frac{(\omega L)^2}{Z}, \quad Z = R + \frac{1}{j\omega C} + j\omega L$$

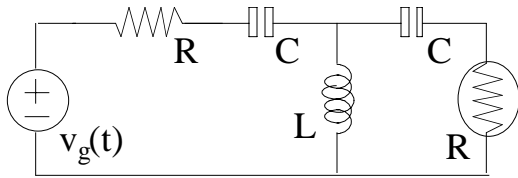
$$\text{b) } \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$$\text{c) } |\mathbf{V}_o| \rightarrow \frac{V_G}{2}, \quad \angle \mathbf{V}_o \rightarrow 0^\circ$$

$$\text{d) } |\mathbf{V}_o| \rightarrow 0 \text{ V}, \quad \angle \mathbf{V}_o \rightarrow 0^\circ$$

$$\text{e) } |\mathbf{V}_o| \rightarrow \frac{\omega R C V_G}{2} \approx 0 \text{ V}, \quad \angle \mathbf{V}_o \rightarrow 90^\circ$$

Aplicación del principio de superposición



$$v_g(t) = V_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + V_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2)$$

$$V_1 = 100 \text{ mV}, \omega_1 = 10 \text{ krad/s}, \varphi_1 = 90^\circ$$

$$V_2 = 100 \text{ mV}, \omega_2 = 100 \text{ Mrad/s}, \varphi_2 = 0^\circ$$

$$R = 0.1 \Omega, L = 1 \text{ mH}, C = 10 \mu\text{F}$$

Se desea obtener la expresión temporal de la potencia en la resistencia marcada con un círculo.

Solución

$$p_R(t) = [0.01 \cos(\omega_1 t) + 50 \cos(\omega_2 t)] [0.1 \cos(\omega_1 t) + 500 \cos(\omega_2 t)] \mu\text{W}$$