Tema I:
Señales y sistemas

Consideraciones generales sobre señales

Definición

Es todo aquello que contiene información acerca de la naturaleza o el comportamiento de algún fenómeno físico (electromagnético, acústico, mecánico, biológico, etcétera).

Una señal se representa matemáticamente por medio de una función que depende de una o más variables independientes.

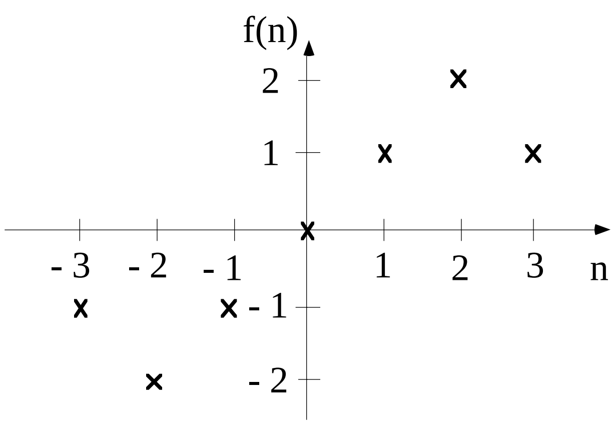
Señales discretas y continuas

Señales discretas

Las variables independientes sólo pueden tomar conjuntos restringidos de valores.

Las funciones representativas sólo están definidas para los valores posibles de las variables.

Ejemplo



$$f(n) = K\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi}{N}\right),\ n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

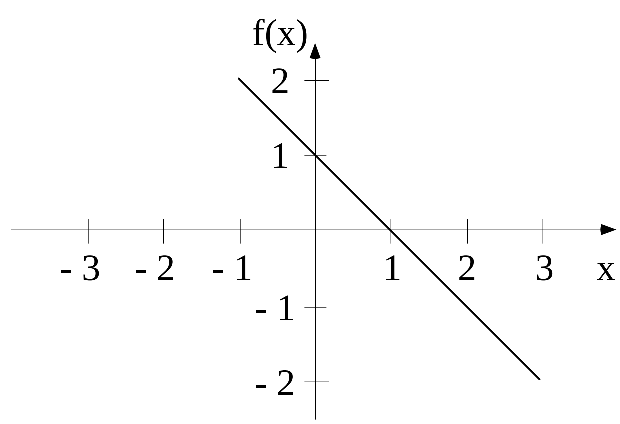
$$K = \sqrt{2},\ N = 4$$

Señales continuas

Las variables independientes son continuas (pueden tomar cualquier valor real).

Las funciones representativas están definidas para sucesiones continuas de las variables independientes.

Ejemplo



$$f(x) = ax + b$$

$$a = -1,\ b = 1$$

Condiciones de estudio

Se considerarán únicamente señales (magnitudes) electromagnéticas.

-Fundamentales: corriente, tensión.

-Derivada de las fundamentales: potencia.

Se considerará una sola variable independiente (el tiempo, t).

Las magnitudes electromagnéticas pueden variar sólo en función del tiempo.

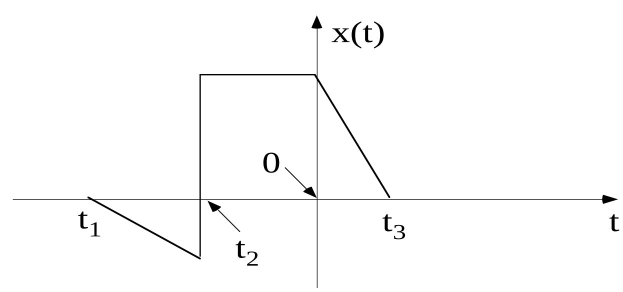
Se considerarán únicamente señales continuas (no señales discretas).

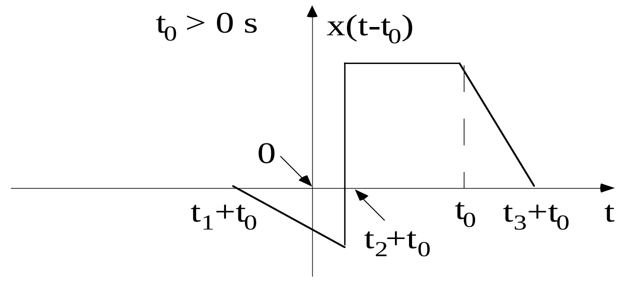
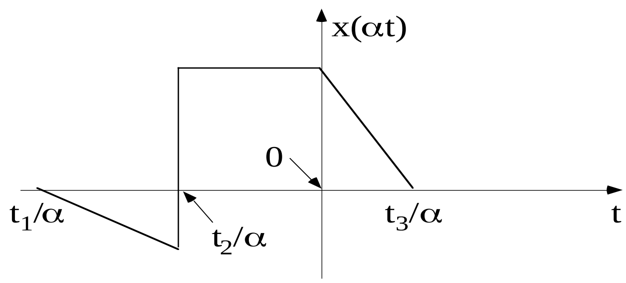
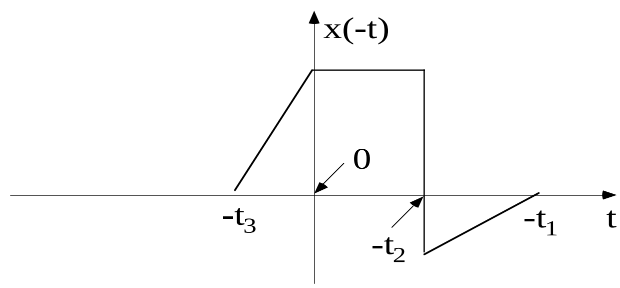
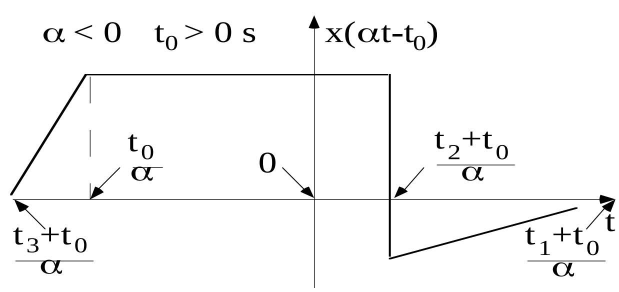
No deben confundirse las distintas interpretaciones de *señales continuas*.

-Señales continuas: las que se definieron en el apartado anterior.

-Señales continuas en el tiempo: señales continuas que tienen el mismo valor en cualquier instante.

Transformaciones de la variable independiente

Tipo	Formulación matemática	Representación gráfica
Señal original	x(t)	

Tipo	**Formulación matemática**	**Representación gráfica**
Desplazamiento (traslación)	$x(t - t_0)$ t_0: constante real $t_0 < 0$ s, adelanto $t_0 > 0$ s, retraso	
Escalado	$x(\alpha t)$ α: constante real	
Inversión (reflexión)	$x(-t)$	
Lineal general Desplazamiento según t_0 Escalado y reflexión según α	$x(\alpha t - t_0)$	

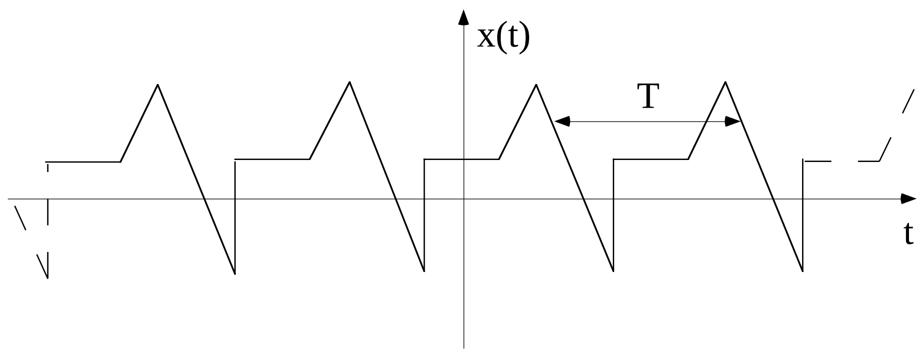
Señales periódicas

x(t) periódica $\Leftrightarrow \exists$ T(real) > 0 tal que x(t) = x(t+T) $\forall$t

A T se le denomina periodo.

Una señal no periódica se denomina aperiódica.

Ejemplo de señal periódica



Si x(t) es periódica de periodo T, también lo es de periodo mT, siendo m cualquier número natural.

Se denomina periodo fundamental al valor más pequeño (T_0) para el que se cumple la condición de periodicidad.

Representa el tiempo mínimo que tarda en repetirse la señal.

Se denomina frecuencia fundamental a

$$f_0 = \frac{1}{T_0} \text{ [Hz, s}^{-1}\text{, ciclos/s]}$$

Representa el número de veces que se repite la señal en cada unidad de tiempo.

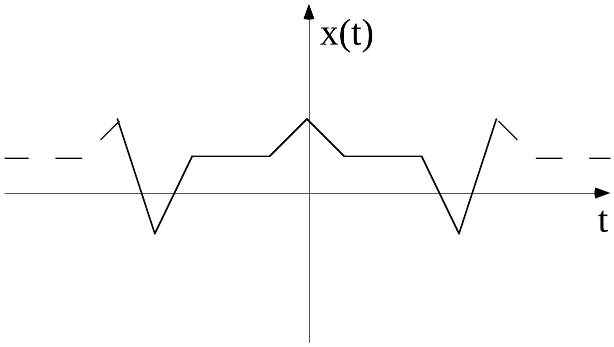
No tiene sentido hablar de periodo cuando x(t) = constante $\forall$t.

Señales pares e impares

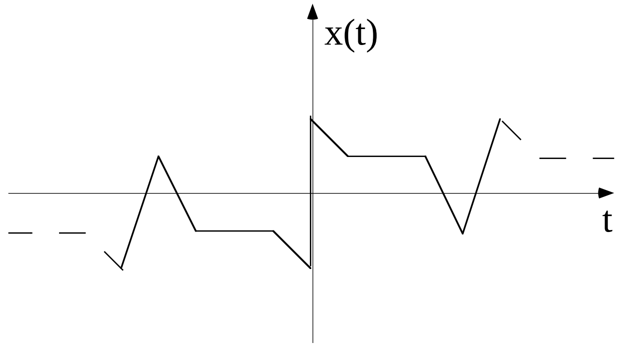
$x(t)$ par $\Leftrightarrow x(-t) = x(t)\ \forall t$

$x(t)$ impar $\Leftrightarrow x(-t) = -x(t)\ \forall t$

Ejemplo



Ejemplo



Parte par $\quad x_p(t) = \mathrm{Par}\{x(t)\} = \dfrac{x(t) + x(-t)}{2}$

Parte impar $\quad x_i(t) = \mathrm{Impar}\{x(t)\} = \dfrac{x(t) - x(-t)}{2}$

$\Rightarrow$

$\forall x(t)$

$x(t) = x_p(t) + x_i(t)$

Energía y potencia

Magnitud	Intervalo $[t_1, t_2]$	Intervalo infinito
Energía de la señal	$E \equiv \int_{t_1}^{t_2} \lvert x(t)\rvert^2 dt$	$E_\infty \equiv \lim[T\to\infty] \int_{-T}^{T} \lvert x(t)\rvert^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} \lvert x(t)\rvert^2 dt$
Potencia media de la señal	$P \equiv \dfrac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} \lvert x(t)\rvert^2 dt$	$P_\infty \equiv \lim[T\to\infty] \dfrac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \lvert x(t)\rvert^2 dt$

Funciones matemáticas de interés para representar señales

Función exponencial compleja (formulación general)

Está definida por la expresión

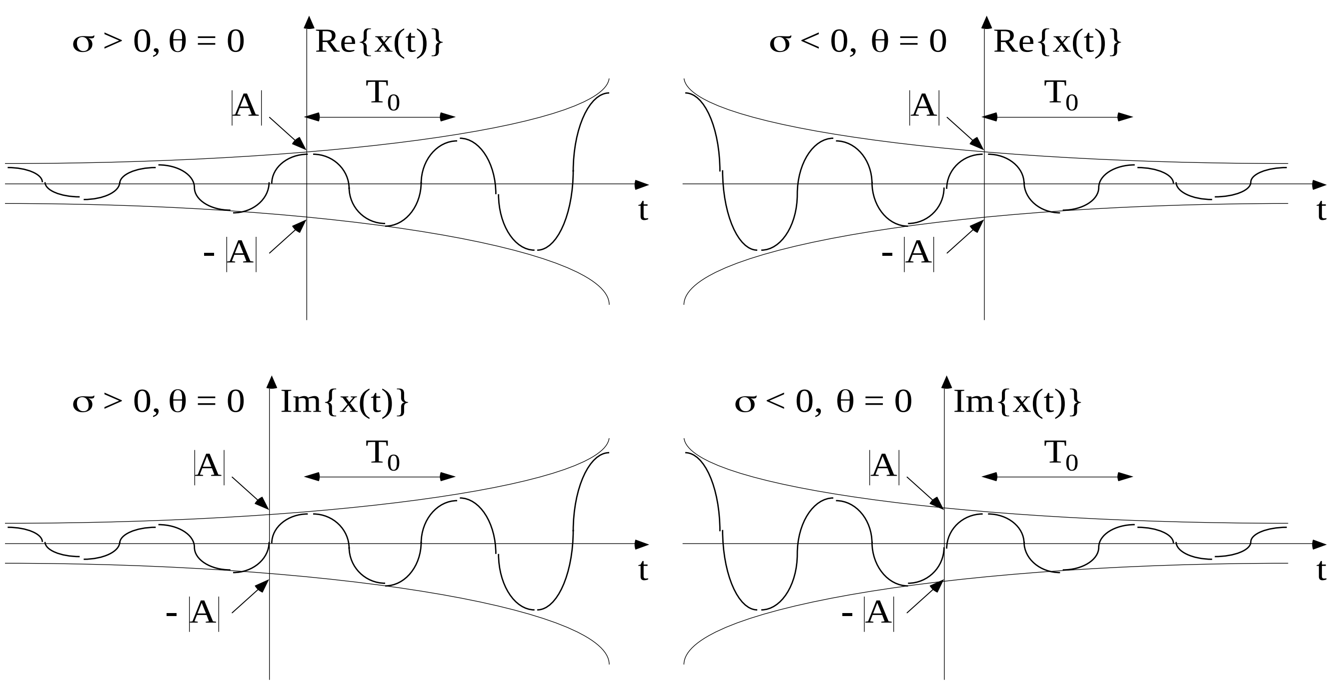
$x(t) = Ae^{st}$, siendo A y s dos números complejos

$j = \sqrt{-1}$	unidad de los números imaginarios
$A = \lvert A \rvert e^{j\theta}$	representación polar
$s = \sigma + j\omega_0$	representación cartesiana
$e^{j\alpha} = \cos(\alpha) + j\mathrm{sen}(\alpha)$	relación de Euler

$$x(t) = Ae^{st} = \lvert A \rvert e^{j\theta} e^{(\sigma + j\omega_0 t)} = \lvert A \rvert e^{\sigma t} e^{j(\omega_0 t + \theta)} = \lvert A \rvert e^{\sigma t}[\cos(\omega_0 t + \theta) + j\mathrm{sen}(\omega_0 t + \theta)]$$

$$\mathrm{Re}\{x(t)\} = \lvert A \rvert e^{\sigma t}\cos(\omega_0 t + \theta) \qquad \mathrm{Im}\{x(t)\} = \lvert A \rvert e^{\sigma t}\mathrm{sen}(\omega_0 t + \theta)$$

Exponenciales crecientes **Exponenciales amortiguadas**



Función exponencial compleja

Está definida por la expresión $x(t) = Ae^{st}$, siendo

$$A = |A|e^{j\phi},\ s = j\omega_0 t$$

$$x(t) = Ae^{st} = |A|e^{j\phi}e^{j\omega_0 t} = |A|[\cos(\omega_0 t + \phi) + j\mathrm{sen}(\omega_0 t + \phi)]$$

$$\mathrm{Re}\{x(t)\} = |A|\cos(\omega_0 t + \phi) \qquad \mathrm{Im}\{x(t)\} = |A|\mathrm{sen}(\omega_0 t + \phi)$$

Se dice que un conjunto de funciones exponenciales complejas
están relacionadas armónicamente cuando sus periodos son submúltiplos de uno dado,
que es el periodo fundamental (T_0).

$x_k(t)$ Armónico de orden k (entero)

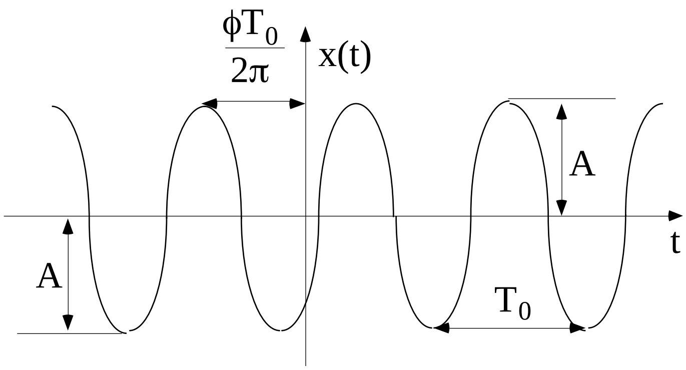
Exponencial compleja de periodo $T_k = \dfrac{T_0}{|k|}$

Función cosenoidal (sinusoidal)

Función periódica de la forma

$$x(t) = A\cos(\omega_0 t + \phi) = A\mathrm{sen}\left(\omega_0 t + \phi + \frac{\pi}{2}\right),\ A(\text{real}) > 0,\ \phi \text{ real},\ \omega_0 = 2\pi f_0,\ f_0 = \frac{1}{T_0}$$

$$A < 0 \Rightarrow x(t) = |A|\cos(\omega_0 t + \phi'),\ \phi' = \phi \pm \pi$$



A (>0), $|A|$ (A < 0): amplitud

T_0: periodo fundamental [s]

f_0: frecuencia fundamental [Hz, s^{-1}]

ω_0: frecuencia angular [rad/s]

ϕ: fase [rad]

Obsérvese que

$$A\cos(\omega_0 t) = x(t) = x_p(t) + x_i(t)$$

$$\mathrm{Par}\{x(t)\} = x_p(t) = \frac{x(t) + x(-t)}{2} = \frac{A\cos(\omega_0 t) + A\cos(-\omega_0 t)}{2}$$

$$\mathrm{Impar}\{x(t)\} = x_i(t) = \frac{x(t) - x(-t)}{2} = \frac{A\cos(\omega_0 t) - A\cos(-\omega_0 t)}{2}$$

Traslación
de la variable independiente
$(\omega_0 t) \rightarrow (\omega_0 t + \phi)$

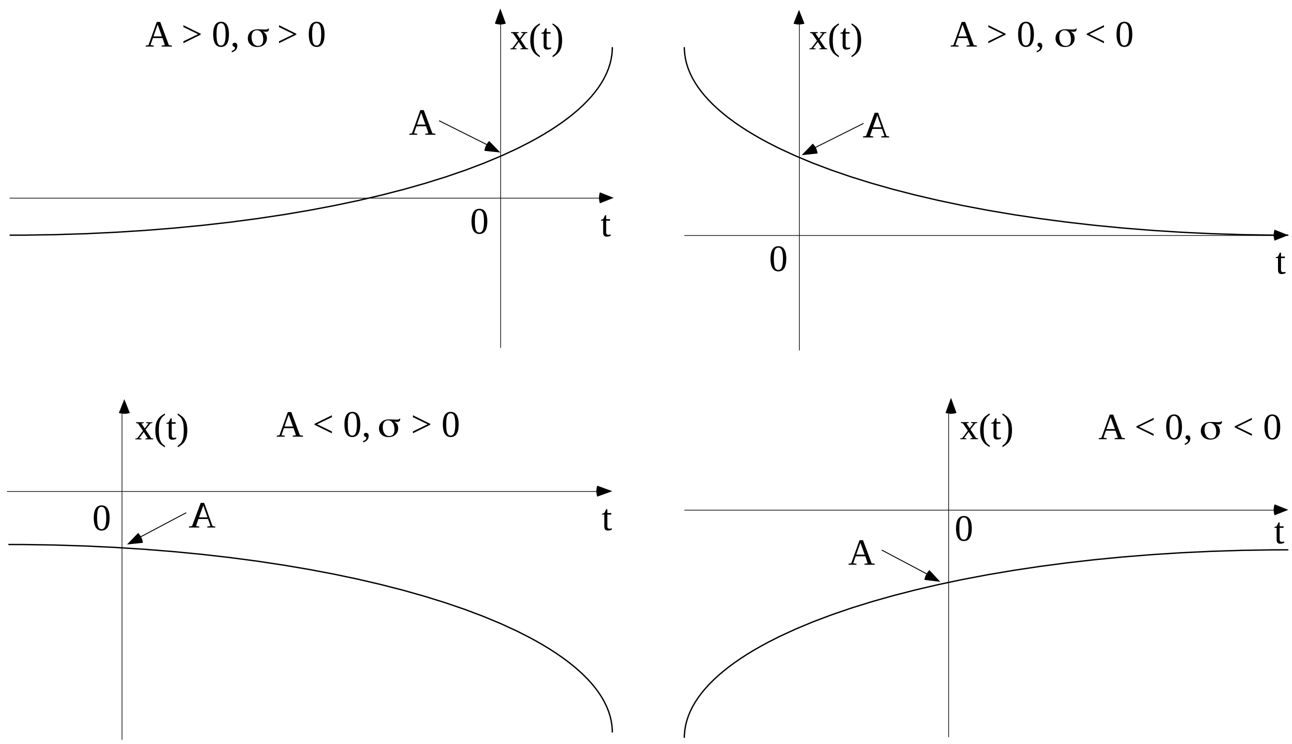
Relación de Euler

$$\Rightarrow \quad x(t) = A\cos(\omega_0 t + \phi) = \frac{A(e^{j\omega_0 t}e^{j\phi} + e^{-j\omega_0 t}e^{-j\phi})}{2} = $$
$$= A\mathrm{Re}\{e^{(j\omega_0 t + \phi)}\}$$

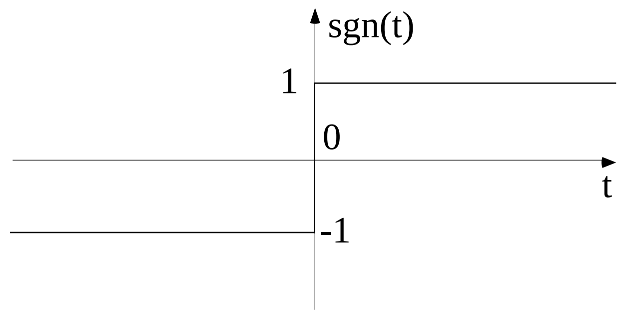
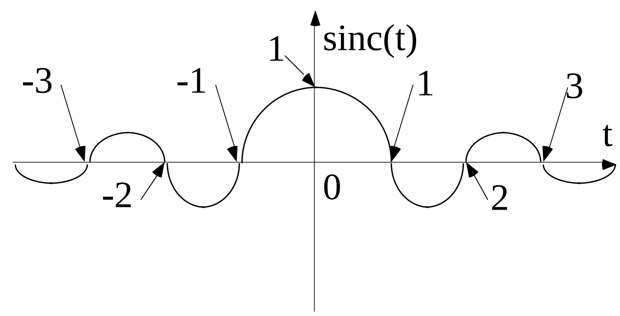
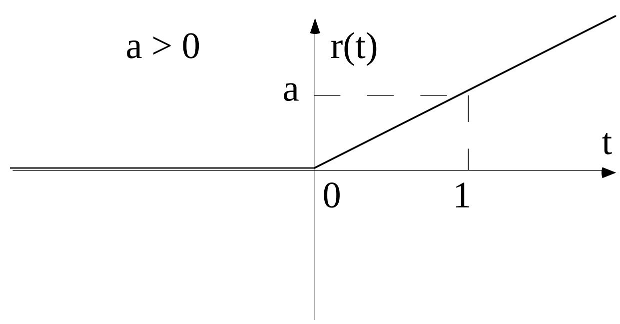
$$A = |A|e^{j\phi} \Rightarrow x(t) = \mathrm{Re}\{Ae^{j\omega_0 t}\}$$

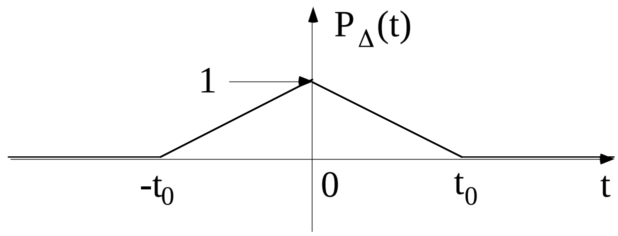
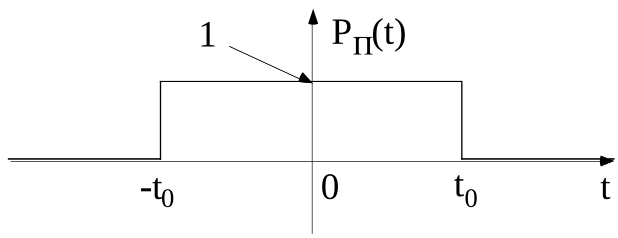
Función exponencial real

Está definida por la expresión $x(t) = Ae^{\sigma t}$, siendo A y σ números reales



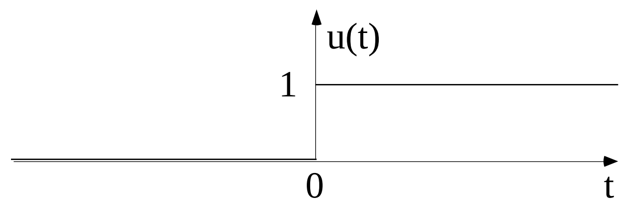
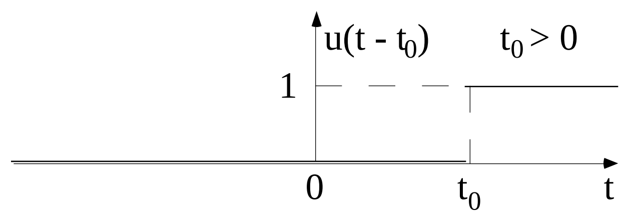
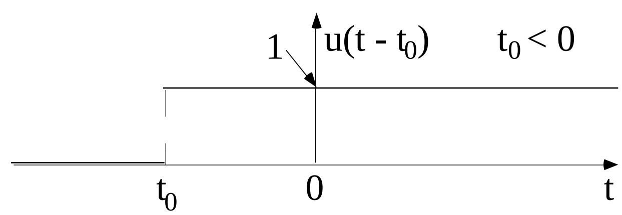
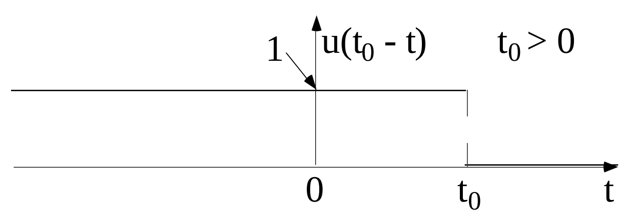
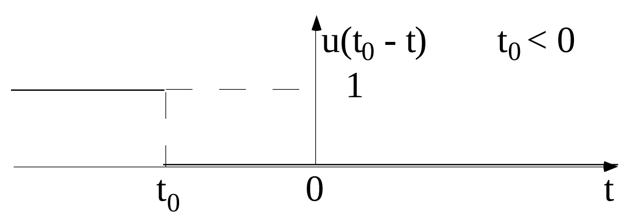
Otras funciones

Nombre	Expresión	Representación gráfica
signo	$\mathrm{sgn}(t) = -1\ \forall t < 0$ $\mathrm{sgn}(t) = 1\ \forall t > 0$	
sinc	$\mathrm{sinc}(t) = \dfrac{\mathrm{sen}(\pi t)}{\pi t}$	
rampa	$r(t) = 0\ \forall t < 0$ $r(t) = at\ \forall t > 0$, a real	

Nombre	Expresión	Representación gráfica
pulso triangular	$P_{\Delta}(t) = 0 \ \forall t \perp \lvert t \rvert \geq t_0$ $P_{\Delta}(t) = 1 - \frac{\lvert t \rvert}{t_0} \ \forall t \perp \lvert t \rvert < t_0$ t_0 (real) > 0	
pulso rectangular	$P_{\Pi}(t) = 0 \ \forall t \perp \lvert t \rvert > t_0$ $P_{\Pi}(t) = 1 \ \forall t \perp \lvert t \rvert < t_0$ t_0 (real) > 0	

Funciones escalón e impulso

Función escalón unitario

Formulación	Definición	Representación gráfica
$u(t)$	$0 \ \forall t < 0$ $1 \ \forall t > 0$	
$u(t - t_0)$	$0 \ \forall t < t_0$ $1 \ \forall t > t_0$	 
$u(t_0 - t)$	$1 \ \forall t < t_0$ $0 \ \forall t > t_0$	 

Función impulso unitario

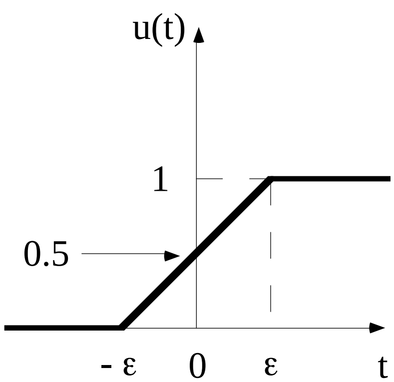
Cálculo de la derivada de la función escalón unitario

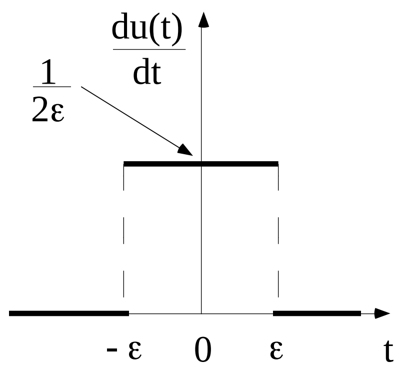
Se define una aproximación lineal a la función escalón. La aproximación se expresa en términos de un parámetro (ε) que puede hacerse tan próximo a 0 como se desee.

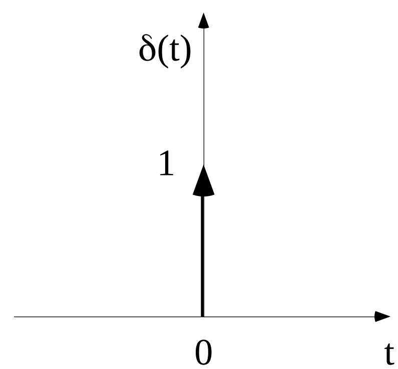
En la función derivada,
a) La duración tiende a 0.
b) La amplitud tiende a ∞.
c) El área comprendida entre la función y el eje de abscisas se mantiene constante cuando ε tiende a 0.

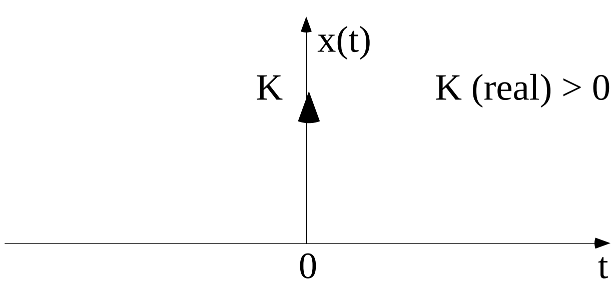
La derivada es la función impulso unitario (delta de Dirac).

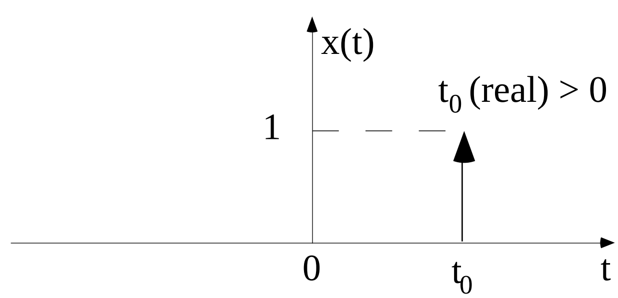
$$\delta(t) = \text{lím} \frac{du(t)}{dt} \text{ para } \varepsilon \rightarrow 0$$











Escalado de la delta de Dirac

$$x(t) = K\delta(t)$$

Desplazamiento de la delta de Dirac

$$x(t) = \delta(t - t_0)$$

Propiedades de la delta de Dirac

Definición matemática

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt = 1,\ \delta(t) = 0\ \forall t \neq 0$$

Relación
con la función escalón unitario

$$u(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta(\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{0} \delta(t + \sigma)d\sigma = \int_{0}^{\infty} \delta(t - \sigma)d\sigma$$

Propiedad de desplazamiento
(f(t) es continua en t_0)

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t - t_0)dt = f(t_0)$$

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\delta(t - \tau)d\tau$$

Función par

$$\delta(t) = \delta(-t)$$

$$f(t)\delta(t) = f(0)\delta(t)$$

$$f(t + t_0)\delta(t) = f(t_0)\delta(t)$$

$$f(t - t_0)\delta(t) = f(-t_0)\delta(t)$$

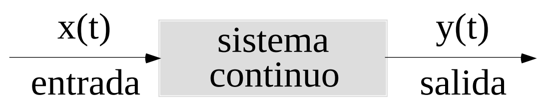
$$f(t)\delta(t - t_0) = f(t_0)\delta(t - t_0)$$

Consideraciones generales sobre sistemas

Es algo susceptible de proporcionar una determinada señal (señal de salida) en respuesta a una señal (señal de entrada) aplicada al mismo.

Se considerarán únicamente sistemas cuyas entradas y salidas son continuas (no necesariamente constantes).

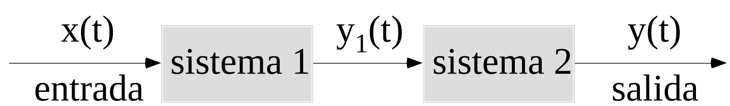
Representación de un sistema continuo



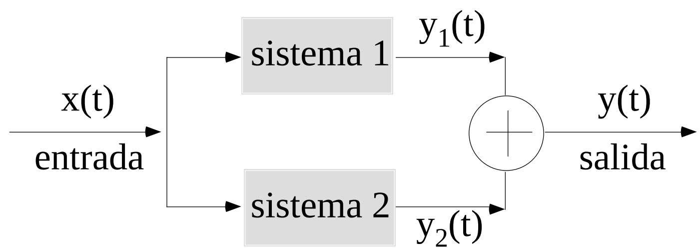
$x(t) \rightarrow y(t)$

Interconexiones de sistemas

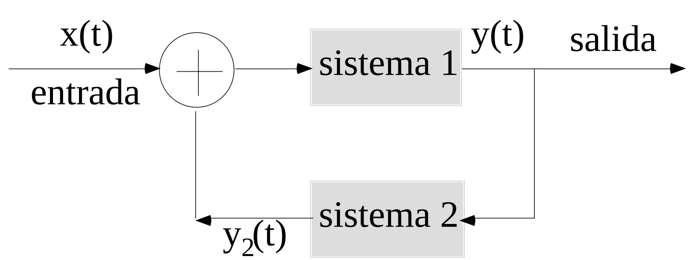
Cascada



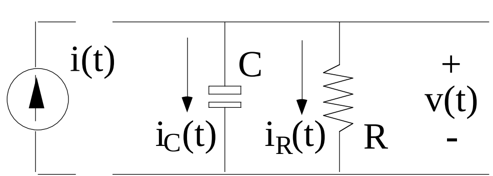
Paralelo

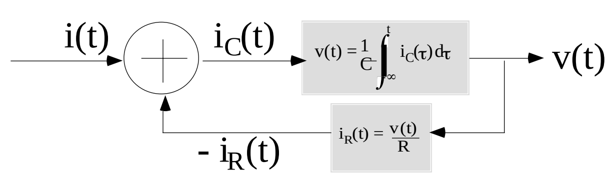


Realimentado



Ejemplo de sistema realimentado

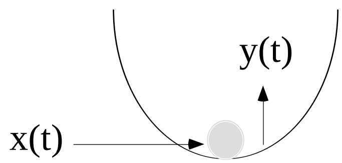




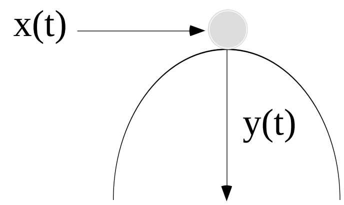
Sistemas estables

Un sistema es estable
si para una entrada limitada
la salida también es limitada
y no diverge.

Ejemplo de sistema estable



Ejemplo de sistema inestable

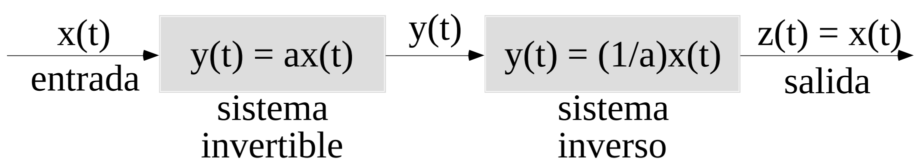


Sistemas invertibles e inversos

Un sistema es invertible
si entradas distintas
producen salidas distintas.

⇒ Dada una salida,
es posible deducir
la entrada que la provocó.

⇒ Para un sistema invertible
hay un sistema inverso
que, conectado en cascada
con aquél, produce
una salida igual a su entrada.



Sistemas con y sin memoria

Sistema sin memoria

La salida para cada valor de la variable independiente es función exclusivamente del valor de la entrada para dicho valor de la variable.

Ejemplo

Resistencia: $v(t) = Ri(t)$

Sistema con memoria

Incorpora algún mecanismo que almacena información sobre valores de la entrada correspondientes a distintos valores de la variable independiente.

Ejemplo

Capacidad: $v(t) = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i(\tau)d\tau$

El fenómeno de la memoria está asociado con procesos de almacenamiento de energía.

Sistemas causales

Un sistema es causal si su salida para cualquier valor de la variable independiente depende únicamente del valor de la entrada correspondiente a dicho valor (y a otros procedentes).

También se llama no anticipativo,
ya que la salida del sistema no anticipa valores futuros de la entrada.

Ejemplo de sistema causal	**Ejemplo de sistema no causal**
$y(t) = x(t - t_0)$	$y(t) = x(t + t_0)$

Todos los sistemas sin memoria son causales.

Sistemas invariantes con el tiempo

Un sistema es invariante con el tiempo si su comportamiento y sus características son fijos. $\Leftrightarrow$ Un sistema es invariante con el tiempo si un desplazamiento temporal en la entrada ocasiona un desplazamiento temporal en la salida.

$$y(t) = f[x(t)] \quad \left| \begin{array}{c} x(t) \rightarrow x(t - t_0) \rightarrow y_1(t) = f[x(t - t_0)] \\ \\ y_2(t - t_0) = f[x(t - t_0)] \end{array} \right| \quad y_1(t) = y_2(t - t_0) \Rightarrow \text{sistema invariante}$$

Sistemas lineales

Un sistema es lineal si satisface el principio de superposición, que engloba las propiedades de escalado (homogeneidad) y aditividad.

Si $y_1(t)$, $y_2(t)$, ... $y_n(t)$ son las salidas del sistema para las entradas $x_1(t)$, $x_2(t)$, ... $x_n(t)$ y a_1, a_2, ... a_n son constantes complejas, el sistema es lineal si

$$a_1x_1(t) + a_2x_2(t) + ... + a_nx_n(t) \rightarrow a_1y_1(t) + a_2y_2(t) + ... + a_ny_n(t)$$

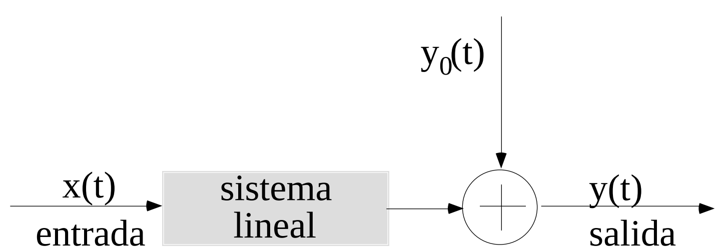
En un sistema lineal, si la entrada es nula, la salida también ha de serlo.

Un sistema incrementalmente lineal es aquél que, sin verificar la última condición, responde linealmente a los cambios en la entrada.

$y(t) = 2x(t) + 2$ no es lineal ya que $y(t) \neq 0$ para $x(t) = 0$

pero sí es incrementalmente lineal.

Representación de un sistema incrementalmente lineal utilizando un sistema lineal.



Sistemas lineales invariantes con el tiempo (LTI: linear, time-invariant)

Sistemas que son simultáneamente lineales e invariantes con el tiempo.

Son los considerados en esta asignatura.

Matemáticamente se caracterizan mediante

-La respuesta del sistema (función de ponderación), h(t), al impulso unitario, δ(t) (un sistema no lineal no queda completamente caracterizado por esta respuesta).

-La integral de convolución.

La respuesta del sistema al impulso unitario es la transformada inversa de Laplace de la función de transferencia del sistema, H(s)
(la transformada de Laplace se estudiará en el capítulo siguiente).

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H(s)\}$$

Integral de convolución:

La salida, y(t), de un sistema LTI correspondiente a una entrada x(t) está dada por la integral de convolución de la señal de entrada y la respuesta del sistema a la función impulso unitario.

$$y(t) = h(t)*x(t)$$

Propiedades de los sistemas LTI

Conmutativa

$$x(t)*h(t) = h(t)*x(t)$$

Los papeles de la señal de entrada y la respuesta al impulso unitario pueden ser intercambiados.

Distributiva

$$x(t)*[h_1(t) + h_2(t)] = x(t)*h_1(t) + x(t)*h_2(t)$$

Una conexión en paralelo equivale a un sistema único cuya respuesta al impulso unitario es igual a la suma de las respuestas individuales al impulso unitario.

Asociativa

$$x(t)*[h_1(t)*h_2(t)] = [x(t)*h_1(t)]*h_2(t) = x(t)*h_1(t)*h_2(t)$$

Una conexión en cascada equivale a un sistema único cuya respuesta al impulso unitario es igual a la convolución de las respuestas individuales al impulso unitario.

Estabilidad

El sistema es estable si es integrable.

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)| dt < \infty$$

Invertibilidad

Si es invertible
hay un sistema inverso
con respuesta $h_I(t)$ al impulso unitario

$$h(t)*h_I(t) = \delta(t)$$

Memoria

No tiene memoria si

$$h(t) = 0 \ \forall t \neq 0$$

$$h(t) = K\delta(t)$$

K constante

$$y(t) = Kx(t)$$

Causalidad

Es causal si

$$h(t) = 0 \ \forall t < 0$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)h(t-\tau)d\tau =$$

$$= \int_{0}^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)$$

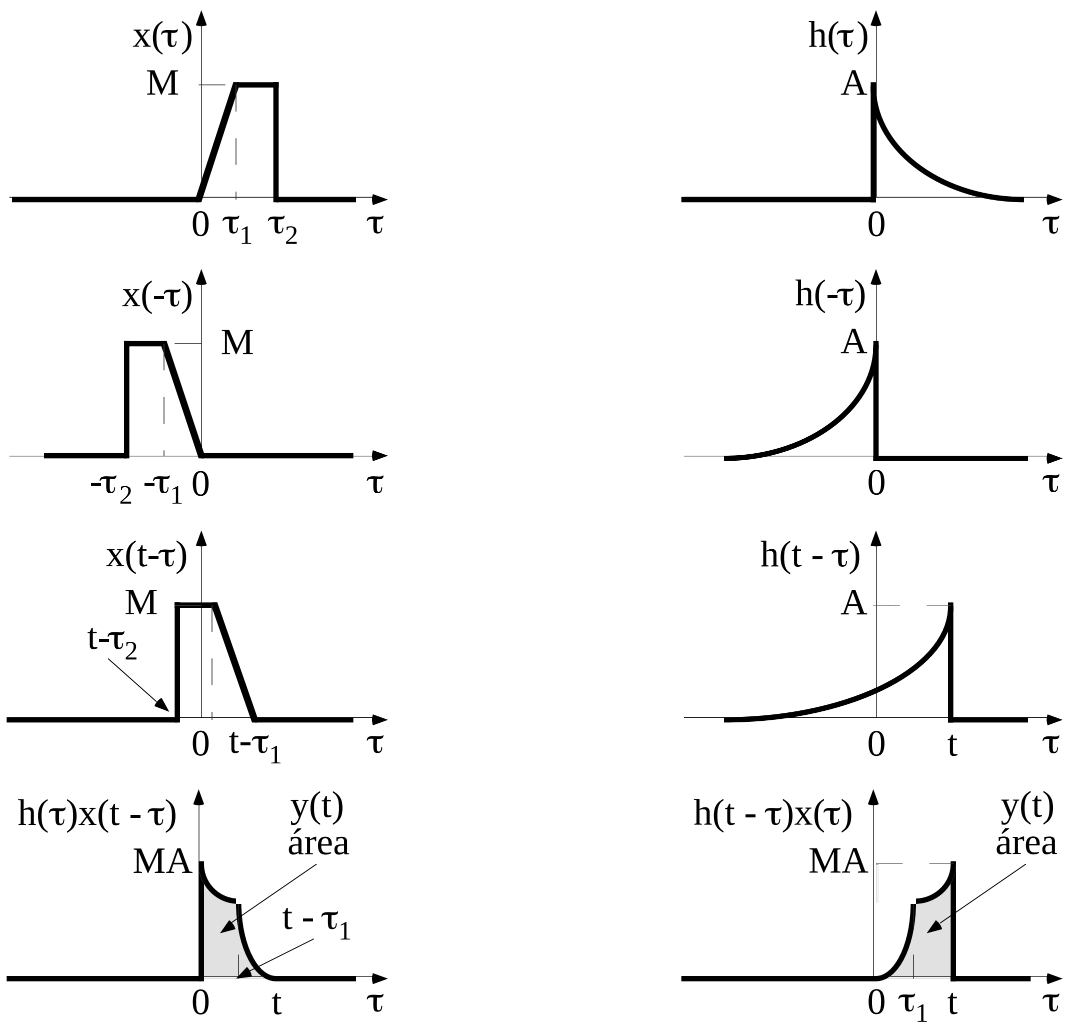
La integral de convolución

Definición

Representaciones de la integral de convolución		
Representación matemática	$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t - \tau)d\tau =$	$= \int_{-\infty}^{\infty} h(t - \tau)x(\tau)d\tau$
Representación simbólica	$y(t) = h(t)*x(t) =$	$= x(t)*h(t)$
Representación textual	h(t) es convolucionada con x(t)	x(t) es convolucionada con h(t)
En circuitos prácticos	$y(t) = \int_{0}^{t} h(\tau)x(t - \tau)d\tau =$	$= \int_{0}^{t} h(t - \tau)x(\tau)d\tau$

Determinación gráfica de la integral de convolución

$$y(t) = \int_0^t h(\tau)x(t-\tau)d\tau \qquad\qquad y(t) = \int_0^t h(t-\tau)x(\tau)d\tau$$



El área comprendida entre la curva y el eje de abscisas es igual
en las dos últimas gráficas

Determinación analítica de la integral de convolución

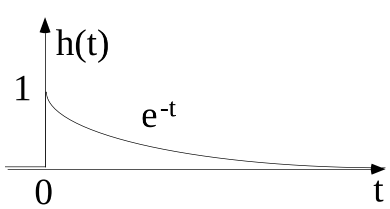
Entrada	$x(t) \neq 0$ para $x_1 \leq t \leq x_2$	$x(t) = 0$ para $t \leq x_1$ y $t \geq x_2$
Respuesta al impulso unitario	$h(t) \neq 0$ para $h_1 \leq t \leq h_2$	$h(t) = 0$ para $t \leq h_1$ y $t \geq h_2$
Salida	$y(t) = \int_{\text{máx}(x_1,\ t-h_2)}^{\text{mín}(h_1,\ t-x_2)} x(\tau)h(t-\tau)d\tau =$	$= \int_{\text{máx}(t-h_1,\ x_2)}^{\text{mín}(t-x_1,\ h_2)} x(t-\tau)h(\tau)d\tau$

Las integrales de la última fila son paramétricas,
con límites de integración dependientes del valor de t.
Por tanto, se desdoblarán en dos o más según el campo de variación de t haga variar los valores máximo y mínimo que definen dichos límites.

Ejemplo

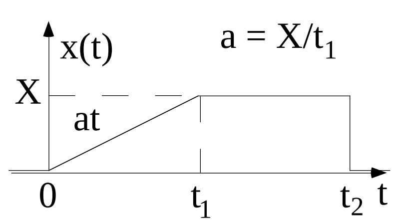
Se trata de hallar y(t) = h(t)*x(t) (se elige x(t) para desplazarla y reflejarla).

Respuesta al impulso unitario	**Excitación**	**Excitación reflejada**



$h(t) = 0 \ \forall t \leq 0$

$h(t) = e^{-t} \ \forall t \geq 0$

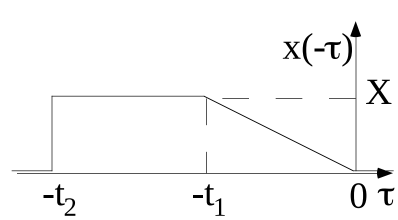


$x(t) = 0 \ \forall t \leq 0$

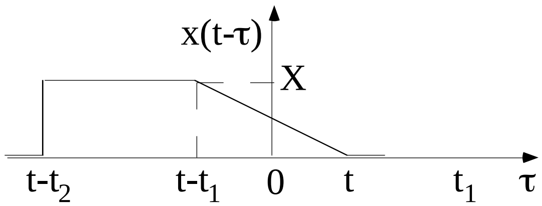
$x(t) = at \ \forall t \perp 0 \leq t \leq t_1$

$x(t) = X \ \forall t \perp t_1 \leq t \leq t_2$

$x(t) = 0 \ \forall t \geq t_2$

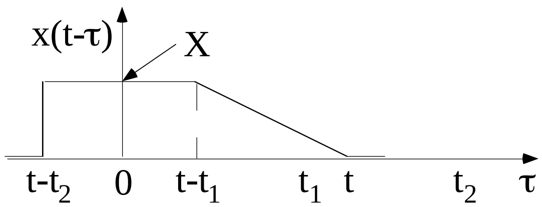


Se va desplazando la excitación reflejada hacia la derecha
y se va calculando la integral en cada uno de los diferentes tramos del desplazamiento.



$0 \le t \le t_1$

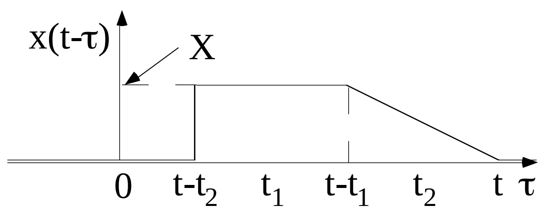
$$y(t) = \int_0^t a(t - \tau)e^{-\tau}d\tau = a(e^{-t} + t - 1)$$



$t_1 \le t \le t_2$

$$y(t) = \int_0^{t-t_1} Xe^{-\tau}d\tau + \int_{t-t_1}^{t} a(t - \tau)e^{-\tau}d\tau =$$

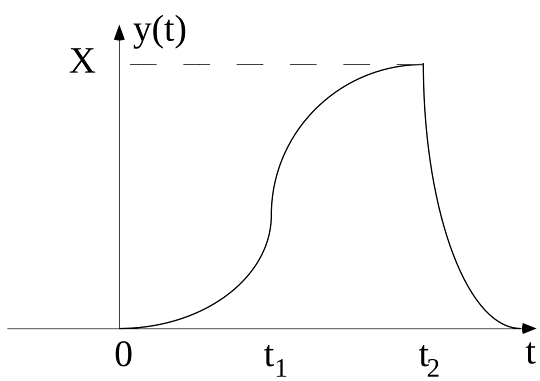
$$= a[t_1 + e^{-t} - e^{-(t-t_1)}]$$



$t_2 \le t \le \infty$

$$y(t) = \int_{t-t_2}^{t-t_1} Xe^{-\tau}d\tau + \int_{t-t_1}^{t} a(t - \tau)e^{-\tau}d\tau =$$

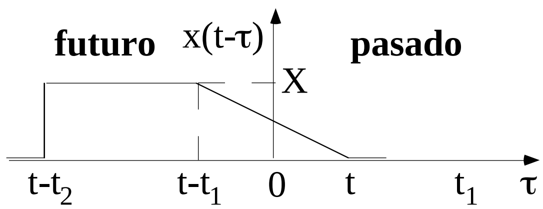
$$= a[e^{-t} - e^{-(t-t_1)} + t_1 e^{-(t-t_2)}]$$



Utilizando valores numéricos puede observarse que la integral de convolución tiene la forma representada en la figura adjunta.
La salida tiende a reproducir la entrada, pero es deformada por la respuesta al impulso unitario.

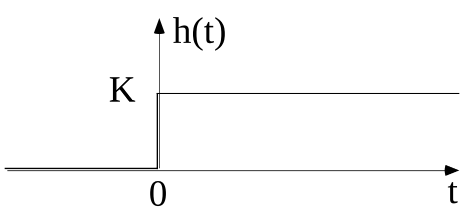
Memoria y función de ponderación de un circuito

Reflejar y deslizar la función de excitación (de un circuito)
a lo largo de una escala de tiempos equivale a desplazarse desde el futuro hacia el pasado.

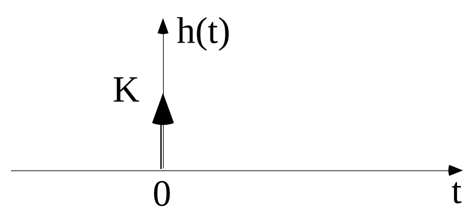


En la integral de convolución, la respuesta (del circuito) al impulso unitario
pondera la excitación de acuerdo con los valores presentes y pasados,
proporcionando menos peso a los pasados que a los presentes.
El circuito retiene cada vez menos información acerca de anteriores valores de entrada,
y la salida se aproxima rápidamente al valor presente de la excitación.

La función de ponderación determina la cantidad de memoria que tiene el circuito.
La memoria es el grado con el que la respuesta del circuito se ajusta a la entrada.



Memoria perfecta
(proporciona igual peso a todos los valores
de la excitación, presentes y pasados).



Sin memoria
(no proporciona ningún peso
a los valores pasados de la excitación).

Cuanta más memoria tenga un circuito,
más diferentes serán las funciones representativas de la excitación y la salida.