

---

---

# Tema III:

# Análisis de circuitos mediante la transformada de Fourier

---

---

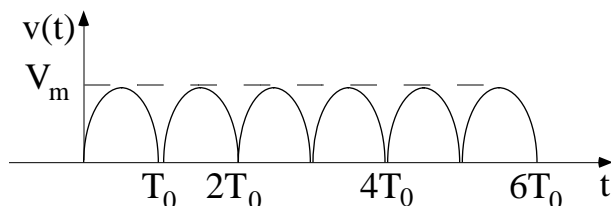
Planteamiento del problema .....	65
Determinación de los coeficientes de Fourier .....	68
Procedimiento general .....	68
Ejemplo .....	69
Casos particulares .....	70
Forma trigonométrica de la serie de Fourier .....	72
Formulación .....	72
Ejemplo de formulación trigonométrica .....	73
Ejemplo 1 de aplicación a un circuito .....	74
Ejemplo 2 de aplicación a un circuito .....	76
Cálculos de potencia .....	78
Formulación exponencial .....	79
Ejemplo de formulación exponencial .....	79
Error cuadrático medio .....	80
Espectros de amplitud y fase .....	81
La transformada de Fourier .....	82
Consideraciones generales .....	82
Definición .....	83
Condiciones de existencia .....	84

Transformadas de Fourier .....	85
Transformadas de Fourier de funciones elementales .....	85
Transformadas de Fourier operacionales.....	86
Utilización de transformadas de Laplace para hallar transformadas de Fourier .....	87
Propiedades de la transformada de Fourier .....	89
Aplicación en circuitos .....	90
Comparación con la transformada de Laplace .....	90
Ejemplo 1 .....	91
Ejemplo 2 .....	92
Teorema de Parseval .....	93
Ejemplo 1 .....	94
Ejemplo 2 .....	96
Ejemplo 3 .....	98

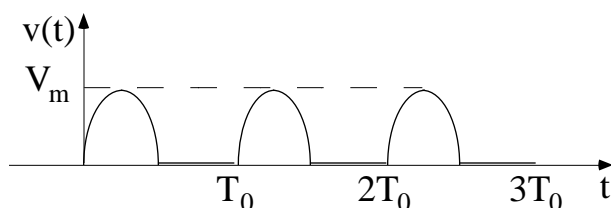
# Planteamiento del problema

$x(t)$  periódica  $\Leftrightarrow x(t) = x(t + nT_0) \forall t$ ;  $n$ : número entero,  $T_0$ : periodo fundamental

## Ejemplos de funciones periódicas

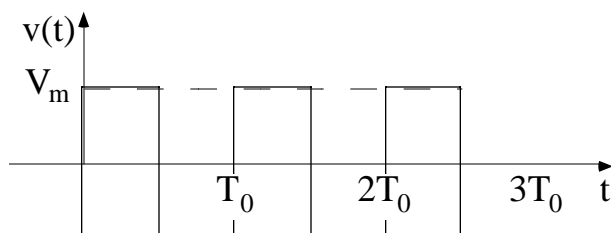


Rectificación  
de onda completa

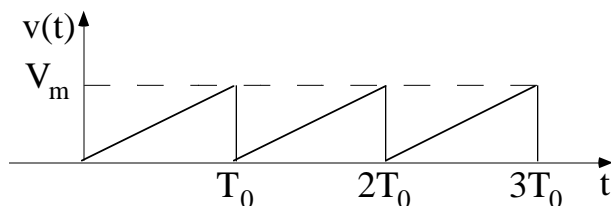


Rectificación  
de media onda

Obtenidas  
por saturación  
de transistores

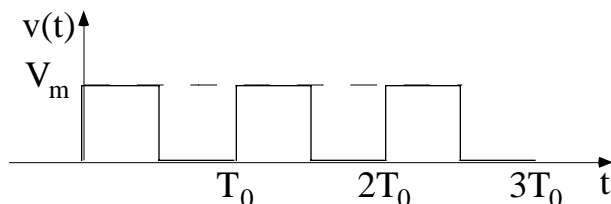


Onda cuadrada



Onda triangular

Proporcionadas por  
generadores de ondas



Pulso rectangular

En ingeniería de circuitos tienen interés práctico muchas excitaciones periódicas que no son sinusoidales.

Los generadores de potencia ideales tienen que proporcionar sinusoides puras. En la práctica proporcionan sinusoides distorsionadas, pero periódicas.

Las no linealidades en circuitos provocan la aparición de funciones periódicas lineales.

**El análisis de Fourier permite tratar cualquier función periódica como una suma infinita de funciones sinusoidales relacionadas armónicamente.**

Una función periódica puede expresarse como serie de Fourier en la forma

$$f(t) = a_v + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos(k\omega_0 t) + b_k \sin(k\omega_0 t)]$$

siendo

$k$ : número natural.

$a_v, a_k, b_k$ : coeficientes de Fourier.

$\omega_0 = 2\pi/T_0$ : frecuencia angular fundamental.

$k\omega_0$ : frecuencia de la componente armónica de orden  $k$ .

$f(t)$  se expresa como la suma de una componente continua y diversas componentes sinusoidales.

Si representa la excitación de un circuito, la salida de éste puede ser calculada aplicando el principio de superposición.

Para que una función pueda ser expresada como serie de Fourier, ha de cumplir las condiciones de Dirichlet:

$f(t)$  tiene un valor único para cualquier valor de  $t$ .

$f(t)$  tiene un número finito de discontinuidades en el intervalo de un periodo.

$f(t)$  tiene un número finito de máximos y mínimos en el intervalo de un periodo.

La integral  $\int_{t_0}^{t_0+T_0} |f(t)| dt$  existe.

Las condiciones de Dirichlet son suficientes, pero no necesarias.

No se sabe cuáles son las condiciones necesarias.

Una función puede no cumplir las condiciones de Dirichlet y ser expresable como serie de Fourier.

# Determinación de los coeficientes de Fourier

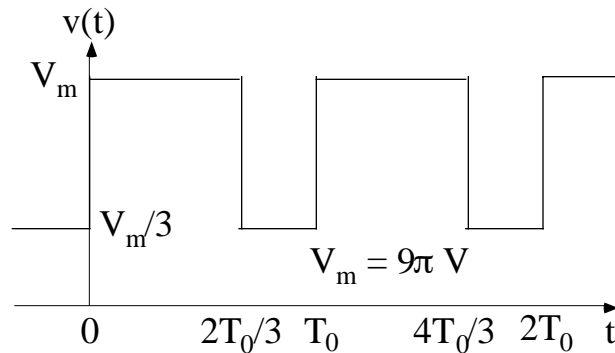
## Procedimiento general

$$a_v = \frac{1}{T_0} \int_{t_0}^{t_0+T_0} f(t) dt \quad a_k = \frac{2}{T_0} \int_{t_0}^{t_0+T_0} f(t) \cos(k\omega_0 t) dt \quad b_k = \frac{2}{T_0} \int_{t_0}^{t_0+T_0} f(t) \sin(k\omega_0 t) dt$$

$t_0$  es cualquier valor del tiempo elegido arbitrariamente.

Obsérvese que  $a_v$  es el valor medio de  $f(t)$  en un periodo, lo cual proporciona un medio alternativo de calcular este coeficiente.

## Ejemplo



Se desea obtener los coeficientes de Fourier de la expansión en serie de Fourier de la tensión mostrada en la figura adjunta.

Suponiendo que  $T_0 = 125.66$  ms, se desea obtener los cinco primeros términos de la citada expansión.

La tensión representada en la figura puede ser expresada matemáticamente como

$$v(t) = V_m \quad \forall t \mid t_0 \leq t \leq 2T_0/3 \qquad v(t) = V_m/3 \quad \forall t \mid t_0 + 2T_0/3 \leq t \leq T_0$$

Haciendo  $t_0 = 0$  s, y utilizando las expresiones generales y el valor de  $V_m$ , se tiene

$$a_v = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} v(t) dt = \frac{1}{T_0} \int_0^{2T_0/3} V_m dt + \frac{1}{T_0} \int_{2T_0/3}^{T_0} \frac{V_m}{3} dt = 7\pi \text{ V}$$

$$a_k = \frac{2}{T_0} \int_0^{T_0} v(t) \cos\left(\frac{2\pi kt}{T_0}\right) dt = \frac{2}{T_0} \int_0^{2T_0/3} V_m \cos\left(\frac{2\pi kt}{T_0}\right) dt + \frac{2}{T_0} \int_{2T_0/3}^{T_0} \frac{V_m}{3} \cos\left(\frac{2\pi kt}{T_0}\right) dt = \frac{6}{k} \operatorname{sen}\left(\frac{4\pi k}{3}\right) \text{ V}$$

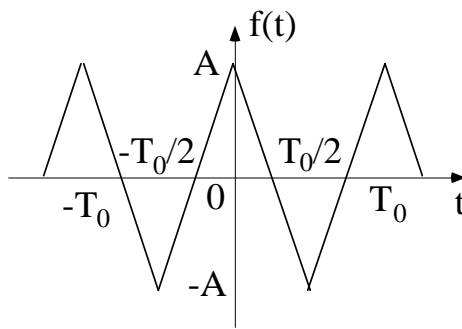
$$b_k = \frac{2}{T_0} \int_0^{T_0} v(t) \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi kt}{T_0}\right) dt = \frac{2}{T_0} \int_0^{2T_0/3} V_m \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi kt}{T_0}\right) dt + \frac{2}{T_0} \int_{2T_0/3}^{T_0} \frac{V_m}{3} \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi kt}{T_0}\right) dt = \frac{6}{k} \left[ 1 - \cos\left(\frac{4\pi k}{3}\right) \right] \text{ V}$$

Utilizando estas expresiones y el valor de  $T_0$ , la serie queda

$$v(t) = 7\pi - 5.2\cos(50t) + 9\operatorname{sen}(50t) + 2.6\cos(100t) + 4.5\operatorname{sen}(100t) + \dots \text{ V}$$

## Casos particulares

Simetría par  
 $f(t) = f(-t)$

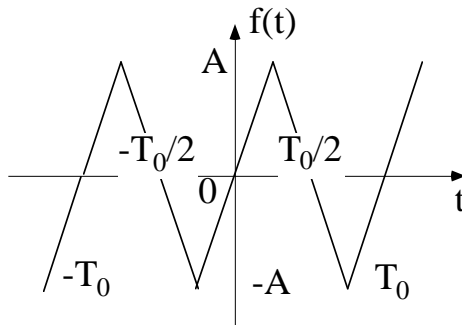


$$a_v = \frac{2}{T_0} \int_0^{T_0/2} f(t) dt$$

$$a_k = \frac{4}{T_0} \int_0^{T_0/2} f(t) \cos(k\omega_0 t) dt$$

$$b_k = 0$$

Simetría impar  
 $f(t) = -f(-t)$



$$a_v = 0$$

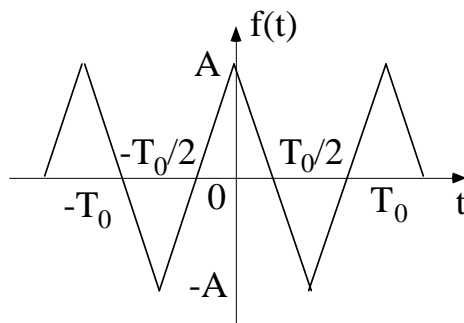
$$a_k = 0$$

$$b_k = \frac{4}{T_0} \int_0^{T_0/2} f(t) \sin(k\omega_0 t) dt$$

A una función periódica dada se la puede dotar de simetría par o impar con sólo elegir adecuadamente el origen de tiempos.



Simetría  
de media onda  
 $f(t) = -f(t - T_0/2)$



$$a_v = 0$$

$$k \text{ par} \Rightarrow a_k = 0 = b_k$$

$$k \text{ impar} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_k = \frac{4}{T_0} \int_0^{T_0/2} f(t) \cos(k\omega_0 t) dt$$

$$\Rightarrow b_k = \frac{4}{T_0} \int_0^{T_0/2} f(t) \sin(k\omega_0 t) dt$$

Simetría  
de cuarto de onda  
y función par  
(simetría en torno  
al punto medio  
de cada  
semiciclo)

$$a_v = 0$$

$$k \text{ par} \Rightarrow a_k = 0$$

$$k \text{ impar} \Rightarrow a_k = \frac{8}{T_0} \int_0^{T_0/4} f(t) \cos(k\omega_0 t) dt$$

$$b_k = 0$$

Simetría  
de cuarto de onda  
y función impar  
(simetría en torno  
al punto medio  
de cada  
semiciclo)

$$a_v = 0$$

$$a_k = 0$$

$$k \text{ par} \Rightarrow b_k = 0$$

$$k \text{ impar} \Rightarrow b_k = \frac{8}{T_0} \int_0^{T_0/4} f(t) \sin(k\omega_0 t) dt$$

# Forma trigonométrica de la serie de Fourier

## Formulación

Definiendo

$$z_k = a_k - jb_k \qquad A_k = |z_k| = \sqrt{a_k^2 + b_k^2} \qquad \varphi_k = \arctg\left(\frac{b_k}{a_k}\right)$$

puede establecerse que

$$f(t) = a_v + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos(k\omega_0 t) + b_k \sin(k\omega_0 t)] = a_v + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(k\omega_0 t - \varphi_k)$$

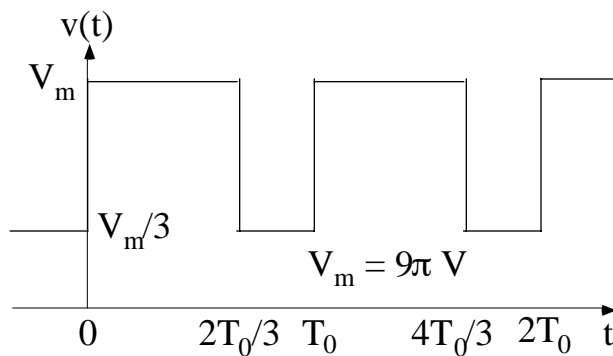
Es decir, los términos en seno y coseno de cada armónico de la serie se combinan en un único término de tipo sinusoidal, lo cual permite tratar la función como una superposición de una componente continua y una suma de señales sinusoidales de distintas frecuencias.

Obsérvese que

$$f(t) \text{ par} \Rightarrow A_k = a_k, \varphi_k = 0^\circ$$

$$f(t) \text{ impar} \Rightarrow A_k = b_k, \varphi_k = 90^\circ$$

## Ejemplo de formulación trigonométrica



Se desea expresar en forma trigonométrica (sólo tres términos significativos) el desarrollo en serie de Fourier de la tensión representada en la figura adjunta.

Supóngase que  $T_0 = 125.66$  ms.

Como se indicó en un ejemplo anterior,

$$v(t) = V_m \quad \forall t \perp t_0 \leq t \leq 2T_0/3$$

$$v(t) = V_m/3 \quad \forall t \perp t_0 + 2T_0/3 \leq t \leq T_0$$

con lo que

$$a_v = 7\pi \text{ V}$$

$$a_k = \frac{6}{k} \operatorname{sen}\left(\frac{4\pi k}{3}\right) \text{ V}$$

$$b_k = \frac{6}{k} \left[ 1 - \cos\left(\frac{4\pi k}{3}\right) \right] \text{ V}$$

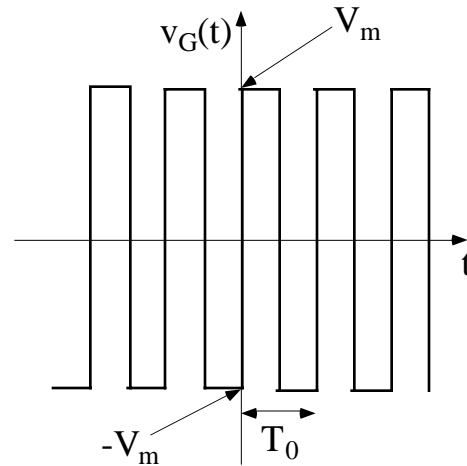
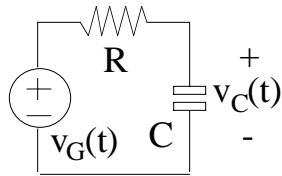
En consecuencia, es posible elaborar la siguiente tabla:

$k$	$a_k$ (V)	$b_k$ (V)	$A_k$ (V)	$\varphi_k$ (°)
1	- 5.22	9	10.4	120
2	2.61	4.5	5.2	60

con lo que la formulación pedida queda en la forma

$$v(t) = 7\pi + 10.4\cos(50t - 120^\circ) + 5.2\cos(100t - 60^\circ) \text{ V, } t \text{ en s}$$

## Ejemplo 1 de aplicación a un circuito



Dado el circuito de la figura, sometido a la excitación indicada, se desea obtener la expresión temporal de  $v_C(t)$ .

La excitación tiene simetría impar en media onda y en cuarto de onda, con lo que

$$a_v = 0$$

$$a_k = 0$$

$$b_k = 0, k \text{ par}$$

$$b_k = \frac{8}{T_0} \int_0^{T_0/4} V_m \text{sen}(k\omega_0 t) dt = \frac{4V_m}{\pi k}, k \text{ impar}$$

La excitación puede ser expresada como serie de Fourier con formulación trigonométrica.

$$v_G(t) = \frac{4V_m}{\pi} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\cos[(2i-1)\omega_0 t - 90^\circ]}{2i-1}$$

La excitación es equivalente a un número infinito de fuentes sinusoidales conectadas en serie.

Se aplica el principio de superposición teniendo en cuenta que para cada excitación individual y utilizando notación fasorial se cumple

$$\mathbf{V}_C = \frac{\mathbf{V}_G}{1 + j\omega RC}$$

Aplicando este resultado a cada componente de la excitación los fasores de las distintas respuestas individuales están dados por

$$\text{Primer armónico } (i = 1) \Rightarrow \mathbf{V}_{C1} = \left[ \frac{4V_m}{\pi \sqrt{1 + (\omega_0 RC)^2}} \right]_{\angle -90^\circ - \theta_1}, \theta_1 = \arctg(\omega_0 RC)$$

$$\text{Tercer armónico } (i = 2) \Rightarrow \mathbf{V}_{C3} = \left[ \frac{4V_m}{\pi \sqrt{1 + (3\omega_0 RC)^2}} \right]_{\angle -90^\circ - \theta_3}, \theta_3 = \arctg(3\omega_0 RC)$$

Generalizando, puede deducirse que la respuesta pedida es

$$v_C(t) = \frac{4V_m}{\pi} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\cos[(2i - 1)\omega_0 t - 90^\circ - \theta_{2i-1}]}{(2i - 1) \sqrt{1 + [(2i - 1)\omega_0 RC]^2}}, \theta_{2i-1} = \arctg[(2i - 1)\omega_0 RC]$$

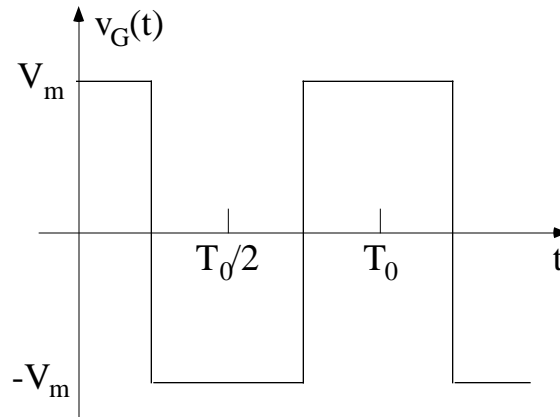
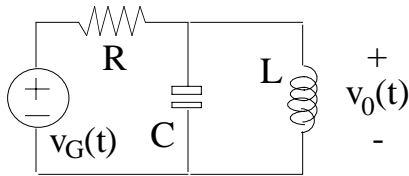
Obsérvese que

$$C \text{ muy grande (cortocircuito)} \Rightarrow \theta_{2i-1} \approx 90^\circ \Rightarrow v_C(t) \approx -\frac{4V_m}{\pi \omega_0 RC} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\cos[(2i - 1)\omega_0 t]}{(2i - 1)^2}$$

Los armónicos de salida decrecen en amplitud en la proporción  $1/i^2$ , mientras que los de la entrada lo hacen en la proporción  $1/i$  (hay gran distorsión -distorsión de fase-).

$C$  muy pequeño (circuito abierto)  $\Rightarrow \theta_{2i-1} \approx 0^\circ \Rightarrow v_C(t) \approx v_G(t)$   
poca distorsión.

## Ejemplo 2 de aplicación a un circuito



Dado el circuito de la figura, sometido a la excitación indicada, se desea obtener la expresión temporal de  $v_0(t)$ .

La expresión matemática de la excitación es

$$v_G(t) = V_m, 0 \leq t \leq T_0/4 \quad v_G(t) = -V_m, T_0/4 \leq t \leq 3T_0/4 \quad v_G(t) = V_m, 3T_0/4 \leq t \leq T_0$$

La excitación tiene simetría de cuarto de onda y función par, con lo que

$$a_v = 0 \text{ V}$$

$$b_k = 0 \text{ V}$$

$$a_k = 0 \text{ V, } k \text{ par}$$

$$k \text{ impar} \Rightarrow a_k = \frac{8}{T_0} \int_0^{T_0/4} v_G(t) \text{sen}(k\omega_0 t) dt = \frac{4V_m}{\pi k} \text{sen}\left(\frac{\pi k}{2}\right) = \frac{4V_m}{\pi k} \text{cos}\left(\frac{\pi k}{2} - 90^\circ\right)$$

En términos fasoriales, la excitación se expresa como

$$\mathbf{V}_{Gk} = \frac{4V_m}{\pi k} \angle -90^\circ = -j \frac{4V_m}{\pi k}$$

En términos fasoriales y de impedancias, la salida del circuito es

$$\mathbf{V}_{0k} = \frac{j\omega L \mathbf{V}_{Gk}}{R(1 - \omega^2 LC) + j\omega L} = \frac{8LV_m}{RT_0 \left[ 1 - \left( \frac{2\pi k}{T_0} \right)^2 LC \right] + j \frac{2\pi k L}{T_0}} = |\mathbf{V}_{0k}| \angle \varphi_k$$

con lo que la expresión temporal pedida es

$$v_0(t) = \sum_{k=1, \text{ impar}}^{\infty} |\mathbf{V}_{0k}| \cos \left( \frac{2\pi k t}{T_0} + \varphi_k \right)$$

## Cálculos de potencia media

Sea un elemento de un circuito lineal,  
en el que la tensión y la corriente son funciones periódicas  
expresadas mediante series de Fourier.

$$v(t) = V_{DC} + \sum_{k=1}^{\infty} V_K \cos(k\omega_0 t - \varphi_{vk})$$

$$i(t) = I_{DC} + \sum_{k=1}^{\infty} I_K \cos(k\omega_0 t - \varphi_{ik})$$

Se supone que la corriente entra en el elemento  
por el terminal marcado como positivo para la tensión.

La potencia media en el elemento está dada por

$$P = \frac{1}{T_0} \int_{t_0}^{t_0+T_0} v(t)i(t)dt = V_{DC}I_{DC} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{V_K I_K \cos(\varphi_{vk} - \varphi_{ik})}{2}$$

Es decir, en el caso de una interacción entre una tensión periódica  
y la correspondiente corriente periódica,  
la potencia media total es la suma de las potencias medias  
originadas por corrientes y tensiones de la misma frecuencia.

Las corrientes y tensiones de distintas frecuencias no interaccionan  
para dar lugar a potencia media.



# Formulación exponencial

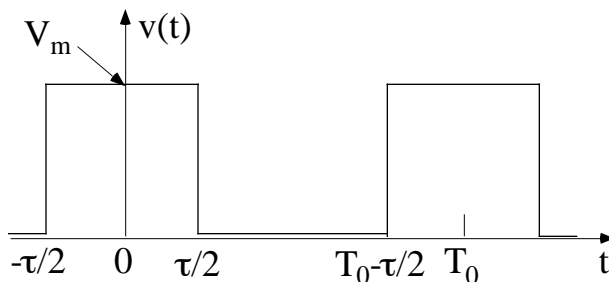
Una función periódica también puede desarrollarse en serie de Fourier mediante la expresión

$$f(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} C_k e^{jk\omega_0 t}$$

siendo

$$C_k = \frac{1}{T_0} \int_{t_0}^{t_0+T_0} f(t) e^{-jk\omega_0 t} dt = \frac{a_k - jb_k}{2} = \frac{A_k}{2} \angle -\varphi_k, \quad A_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}, \quad \varphi_k = \arctg\left(\frac{b_k}{a_k}\right)$$

## Ejemplo de formulación exponencial



Se desea expresar la tensión indicada en la figura adjunta como serie de Fourier con formulación exponencial.

$$C_k = \frac{1}{T_0} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} V_m e^{-jk\omega_0 t} dt = \frac{V_m}{T} \left( \frac{e^{-jk\omega_0 t}}{-jk\omega_0} \right)_{-\tau/2}^{\tau/2} = \frac{V_m \tau}{T} \frac{\text{sen}(k\omega_0 \tau/2)}{k\omega_0 \tau/2}$$

$$v(t) = \frac{V_m}{\tau} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\text{sen}(k\omega_0 \tau/2)}{k\omega_0 \tau/2} e^{jk\omega_0 t}$$

## Error cuadrático medio

En aplicaciones prácticas, al utilizar una serie de Fourier para representar una función periódica es preciso truncar la serie, ya que no es posible trabajar con un número infinito de términos.

Así, se supone que la función ideal  $f(t)$  es aproximada por la función práctica  $f_N(t)$ .

$$f(t) \approx f_N(t) = \sum_{k=-N}^N C_k e^{j\omega_0 t}$$

con lo que se comete un error dado por

$$\varepsilon(t) = f(t) - f_N(t)$$

de modo que el error cuadrático medio de la aproximación es

$$\overline{\varepsilon^2} = \frac{1}{T_0} \int_{t_0}^{t_0+T_0} \varepsilon^2(t) dt$$

$f(t)$  también puede ser expresada mediante otras series trigonométricas en las que los coeficientes son distintos de los correspondientes a la serie de Fourier. Puede demostrarse que el error cuadrático medio es mínimo precisamente cuando los coeficientes son los de la serie de Fourier.

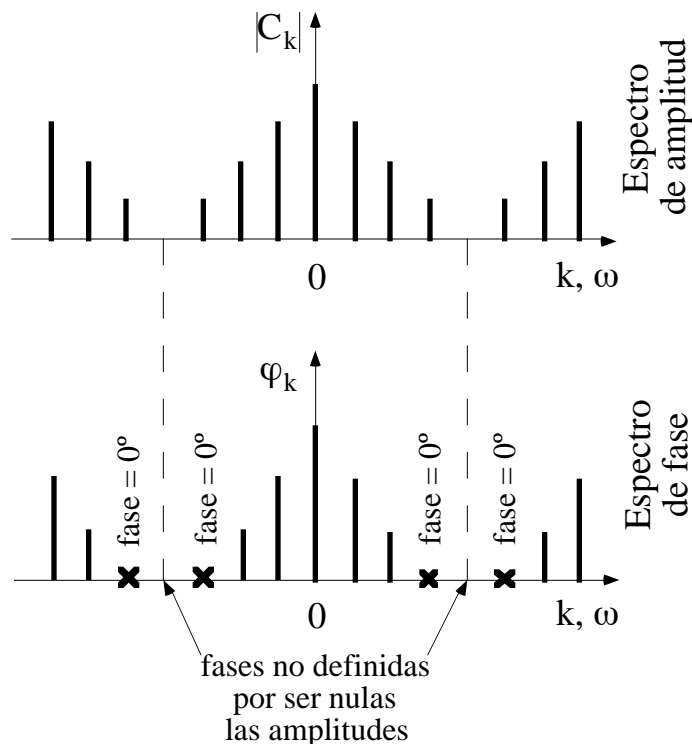
## Espectros de amplitud y fase

Conocidos los coeficientes de Fourier y el periodo de una función, en teoría es posible reconstruir dicha función.

Ocurre lo mismo si se conocen las amplitudes y las fases de la formulación exponencial.

Sin embargo, ello requiere una gran potencia de cálculo (series infinitas).

Una alternativa (simplemente indicativa) consiste en representar las amplitudes y las fases de la formulación exponencial, como se muestra en las figuras adjuntas.



Si se desplaza la función un intervalo temporal,

$$\begin{aligned} f(t - t_0) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{jk\omega_0(t - t_0)} = \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} (C_k e^{-jk\omega_0 t_0}) e^{jk\omega_0 t} \end{aligned}$$

el espectro de amplitud no cambia, el espectro de fase sí cambia.

# La transformada de Fourier

## Consideraciones generales

La serie de Fourier permite describir una función periódica del tiempo en el dominio de la frecuencia por medio de los atributos de amplitud y fase.

La transformada de Fourier permite extender esta idea a funciones no periódicas.

Esto ya está cubierto por la transformada de Laplace.

La transformada de Fourier es un caso particular (parte real de la frecuencia compleja,  $s$ , nula) de la transformada de Laplace bilateral.

Sin embargo, la transformada de Fourier tiene una interpretación física más sencilla.

## Definición

Dada una función periódica  $f(t)$ , de periodo  $T_0$ , a medida que éste se hace más grande se verifica (como puede comprobarse a partir de las expresiones de la serie de Fourier)

$f(t)$  va convirtiéndose en no periódica.

La frecuencia pasa de ser una variable discreta ( $k\omega_0$ ) a ser una variable continua ( $\omega$ ).

Los espectros de amplitud y fase dejan de ser representaciones discretas de líneas para convertirse en las envolventes de las líneas que los constituyen.

Para contemplar estas circunstancias se define la transformada de Fourier de la función  $f(t)$ , no necesariamente periódica, mediante la expresión

$$F(\omega) = F\{f(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt \Rightarrow f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{j\omega t} dt$$

dominio  
de la frecuencia

dominio  
del tiempo

## Condiciones de existencia

$f(t)$  tiene transformada de Fourier si converge la integral que la define.

$f(t)$  converge si es una función bien condicionada que difiere de 0 en un intervalo finito.

$f(t)$  está bien condicionada si hay un solo valor de  $f$  para cada valor de  $t$ ,  
y define un área finita en el intervalo de integración.

Si  $f(t)$  es distinta de 0 en un intervalo infinito, hay convergencia si

Hay un solo valor de  $f$  para cada valor de  $t$ .

Tiene un número finito de discontinuidades.

La integral  $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt$  existe.

Hay funciones de interés práctico que carecen de transformada de Fourier.

En un caso de ese tipo se crea una función en el dominio del tiempo

que sí tenga transformada

y que esté tan arbitrariamente próxima a la original como se desee,

y se asume que la transformada de Fourier de la función original

coincide con la de la función creada.

# Transformadas de Fourier

## Transformadas de Fourier de funciones elementales

Función matemática		Transformada de Fourier
Delta de Dirac (impulso unitario)	$\delta(t)$	1
Escalón unitario	$u(t)$	$\pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$
Constante	A	$2\pi A\delta(\omega)$
Signo (-1 para todo $t < 0$ , 1 para todo $t > 0$ )	$\text{sgn}(t)$	$\frac{2}{j\omega}$
Seno	$\text{sen}(\omega_0 t)$	$j\pi[\delta(\omega + \omega_0) - \delta(\omega - \omega_0)]$
Coseno	$\text{cos}(\omega_0 t)$	$\pi[\delta(\omega + \omega_0) + \delta(\omega - \omega_0)]$
Exponencial positiva	$e^{-at}u(t), a > 0$	$\frac{1}{a + j\omega}$
Exponencial negativa	$e^{at}u(-t), a > 0$	$\frac{1}{a - j\omega}$
Exponencial positiva-negativa	$e^{-a\text{mod}(t)}, a > 0$ mod: módulo	$\frac{2a}{a^2 + \omega^2}$
Exponencial compleja	$e^{j\omega_0 t}$	$2\pi\delta(\omega - \omega_0)$

## Transformadas de Fourier operacionales

Operación matemática		Transformada de Fourier
Multiplicación por una constante	$Kf(t)$	$KF(\omega)$
Suma	$f_1(t) \pm f_2(t) \pm f_3(t) \pm \dots$	$F_1(\omega) \pm F_2(\omega) \pm F_3(\omega) \pm \dots$
Derivada	$\frac{d^n f(t)}{dt^n}$	$(j\omega)^n F(\omega)$
Integral	$\int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau$	$\frac{F(\omega)}{j\omega}$
Escalado	$f(at), a > 0$	$\frac{1}{a} F\left(\frac{\omega}{a}\right)$
Desplazamiento	$f(t - t_0)$	$e^{-j\omega t_0} F(\omega)$
	$e^{j\omega_0 t} f(t)$	$F(\omega - \omega_0)$
	$f(t) \cos(\omega_0 t)$	$\frac{F(\omega_0 - \omega) + F(\omega + \omega_0)}{2}$
Convolución	$\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t - \tau) d\tau$	$X(\omega) H(\omega)$
	$f_1(t) f_2(t)$	$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_1(u) F_2(\omega - u) du$
	$t^n f(t)$	$j^n \frac{d^n F(\omega)}{d\omega^n}$



## Utilización de transformadas de Laplace para hallar transformadas de Fourier

Pueden utilizarse transformadas de Laplace unilaterales para hallar las correspondientes transformadas de Fourier que converjan.

La integral que define la transformada de Fourier converge si todos los polos de  $F(s)$  están en el semiplano izquierdo. Si hay polos en el semiplano derecho o a lo largo del eje imaginario no se cumple la condición relativa a la integral que figura en las condiciones de existencia.

$f(t)$  es una función positiva en el tiempo

$$F\{f(t)\} = \mathcal{L}\{f(t)\}_{s=j\omega}$$

### Ejemplo

$$\begin{array}{l} f(t) = 0 \quad \forall t \leq 0^- \\ f(t) = e^{-at}\cos(\omega_0 t) \quad \forall t \geq 0^- \end{array} \quad \Rightarrow \quad F\{f(t)\} = \left( \frac{s+a}{(s+a)^2 + \omega_0^2} \right)_{s=j\omega} = \frac{j\omega + a}{(j\omega + a)^2 + \omega_0^2}$$

$f(t)$  es una función negativa en el tiempo

$$F\{f(t)\} = L\{f(-t)\}_{s=-j\omega}$$

### Ejemplo

$$\left. \begin{array}{l} f(t) = 0 \quad \forall t \geq 0^+ \\ f(t) = e^{at} \cos(\omega_0 t) \quad \forall t \leq 0^- \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} F\{f(t)\} = L\{f(-t)\}_{s=-j\omega} = \\ = \left( \frac{s+a}{(s+a)^2 + \omega_0^2} \right)_{s=j\omega} = \frac{-j\omega + a}{(-j\omega + a)^2 + \omega_0^2} \end{array} \right.$$

$f(t)$  es una función distinta de cero

$$f^+(t) = f(t) \quad \forall t > 0$$

$$f^-(t) = f(t) \quad \forall t < 0$$

$$F\{f(t)\} = L\{f^+(t)\}_{s=j\omega} + L\{f^-(t)\}_{s=-j\omega}$$

$$f(t) \text{ par} \Rightarrow F\{f(t)\} = L\{f(t)\}_{s=j\omega} + L\{f(t)\}_{s=-j\omega}$$

$$f(t) \text{ impar} \Rightarrow F\{f(t)\} = L\{f(t)\}_{s=j\omega} - L\{f(t)\}_{s=-j\omega}$$

### Ejemplo

$$f^+(t) = e^{-at}$$

$$f^-(t) = e^{at}$$

$$\left. \begin{array}{l} f^+(t) = e^{-at} \\ f^-(t) = e^{at} \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} L\{f^+(t)\} = \frac{1}{s+a}, \quad L\{f^-(t)\} = \frac{1}{s+a} \\ F\{e^{-a|\text{mod}(t)}\} = \left( \frac{1}{s+a} \right)_{s=j\omega} + \left( \frac{1}{s+a} \right)_{s=-j\omega} = \frac{2a}{\omega^2 + a^2} \end{array} \right.$$

## Propiedades de la transformada de Fourier

La transformada de Fourier de una función es una magnitud compleja y puede expresarse como

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt = A(\omega) + jB(\omega) = |F(\omega)|e^{j\varphi(\omega)}, F(-\omega) = F^*(\omega)$$

siendo

$$A(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos(\omega t) dt, \text{ función par de } \omega$$

$$B(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sen(\omega t) dt, \text{ función impar de } \omega$$

$$|F(\omega)| = \sqrt{A^2(\omega) + B^2(\omega)}, \text{ función par de } \omega$$

$$\varphi(\omega) = \arctg\left[\frac{B(\omega)}{A(\omega)}\right], \text{ función impar de } \omega$$

$$F(-\omega) = F^*(\omega)$$

Si  $f(t)$  es una función par,  $F(\omega)$  es una función par real.

$$A(\omega) = 2 \int_0^{\infty} f(t)\cos(\omega t) dt, B(\omega) = 0, f(t) = \frac{2}{2\pi} \int_0^{\infty} A(\omega)\cos(\omega t) d\omega$$

Las funciones  $f(t)$  y  $A(\omega)$  son intercambiables, salvo por un factor de escala.

Si  $f(t)$  es una función impar,  $F(\omega)$  es una función impar imaginaria.

$$A(\omega) = 0, B(\omega) = -2 \int_0^{\infty} f(t)\sen(\omega t) dt$$

# Aplicación en circuitos

## Comparación con la transformada de Laplace

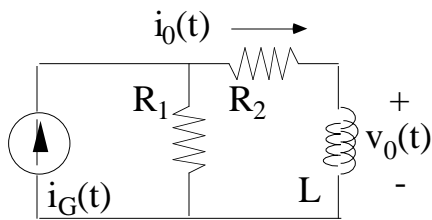
---

Transformada de Laplace (TL)	Transformada de Fourier (TF)
Converge para más funciones de excitación que la TF.	Proporciona directamente la respuesta en régimen permanente a una excitación sinusoidal.
Permite la inclusión directa de condiciones iniciales.	Permite considerar funciones negativas en el tiempo, con lo que es adecuada para tratar eventos que comiencen en $t = -\infty$ .
La TL unilateral es adecuada para tratar problemas con condiciones iniciales que se desarrollan en $t > 0$ .	

---

En análisis de circuitos utilizando la transformada de Fourier, los elementos pasivos tienen el mismo tratamiento que cuando se emplean fasores e impedancias.

## Ejemplo 1



Se desea obtener  $i_0(t)$   
utilizando transformadas de Fourier.

$$i_G(t) = I_g \cos(\omega_0 t), I_g = 50 \text{ A}, \omega_0 = 3 \text{ rad/s}$$

$$R_1 = 1 \text{ } \Omega, R_2 = 3 \text{ } \Omega, L = 1 \text{ H}$$

Utilizando las tablas de transformadas de Fourier,

$$I_G(\omega_0) = F\{i_G(t)\} = I_g \pi [\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)]$$

Observando que el circuito es un divisor de corriente  
y utilizando notación fasorial e impedancias,  
la función de transferencia es

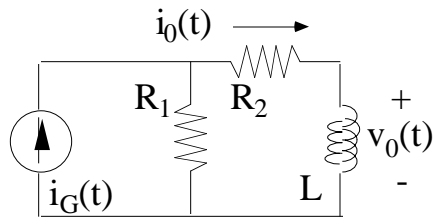
$$H(\omega) = \frac{I_0}{I_G} = \frac{R_1}{R_1 + (R_2 + j\omega L)} = \frac{1}{4 + j\omega}$$

$$I_0(\omega_0) = I_G(\omega_0)H(\omega_0) = 50\pi \frac{\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)}{4 + j\omega_0} \text{ A}$$

$$i_0(t) = F^{-1}\{I_0(\omega_0)\} = \frac{50\pi}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)}{4 + j\omega} e^{j\omega t} dt =$$

$$= 25 \left( \frac{e^{j\omega_0 t}}{4 + j\omega_0} + \frac{e^{-j\omega_0 t}}{4 - j\omega_0} \right) = 25 \left( \frac{e^{j\omega_0 t} e^{-j\varphi_0 t}}{5} + \frac{e^{-j\omega_0 t} e^{j\varphi_0 t}}{5} \right) = 10 \cos(\omega_0 t - \varphi_0) \text{ A}, \varphi_0 = 36.87^\circ$$

## Ejemplo 2



Se desea obtener  $v_0(t)$   
utilizando transformadas de Fourier.

$$i_G(t) = I_g \operatorname{sgn}(t), I_g = 10 \text{ A}$$

$$R_1 = 4 \text{ } \Omega, R_2 = 1 \text{ } \Omega, L = 1 \text{ H}$$

Utilizando las tablas de transformadas de Fourier,

$$I_G(\omega) = F\{i_G(t)\} = \frac{2I_g}{j\omega} = \frac{20}{j\omega} \text{ A}$$

Observando que el circuito es un divisor de corriente  
y utilizando notación fasorial e impedancias,  
la función de transferencia es

$$H(\omega) = \frac{V_0}{I_G} = \frac{I_0 j\omega L}{I_G} = \frac{R_1 j\omega L}{R_1 + (R_2 + j\omega L)} = \frac{j4\omega}{5 + j\omega} \text{ } \Omega$$

$$V_0(\omega_0) = I_G(\omega_0)H(\omega_0) = \frac{80}{5 + j\omega_0} \text{ V}$$

$$v_0(t) = F^{-1}\{V_0(\omega_0)\} = 80e^{-5t} \text{ V, } t \text{ en s}$$

# Teorema de Parseval

## Justificación

La potencia media de señales de energía finita en el dominio del tiempo es nula. Por tanto, para comparar señales de este tipo, se recurre a la energía de las señales.

### Teorema de Parseval

(se cumple si ambas integrales existen)

La energía asociada con una función  $f(t)$  relacionada con una resistencia de  $1 \Omega$  es

Las dimensiones de  $F(\omega)$  son  $[J/Hz] = [Js]$

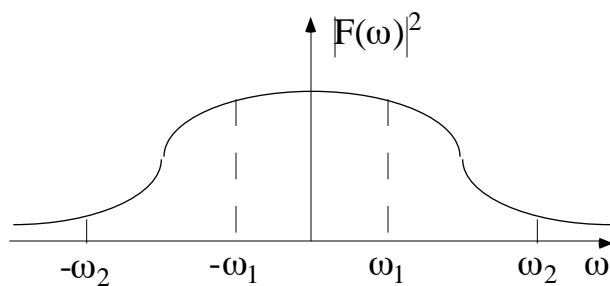
$$\int_{-\infty}^{\infty} f^2(t)dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega$$

Si se trata de una resistencia de valor  $R$ , se multiplican ambos miembros del teorema por tal valor.

La energía de la señal, referida a  $1 \Omega$ , en un intervalo de frecuencias es

$$\frac{1}{\pi} \int_{\omega_1}^{\omega_2} |F(\omega)|^2 d\omega$$

### Interpretación gráfica



$$W_{1\Omega} = \frac{1}{\pi} \int_{\omega_1}^{\omega_2} |F(\omega)|^2 d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_2}^{-\omega_1} |F(\omega)|^2 d\omega + \frac{1}{2\pi} \int_{\omega_1}^{\omega_2} |F(\omega)|^2 d\omega$$

El teorema de Parseval permite calcular la energía disponible a la salida de un filtro sin necesidad de determinar la expresión temporal de la tensión en dicha salida.

## Ejemplo 1

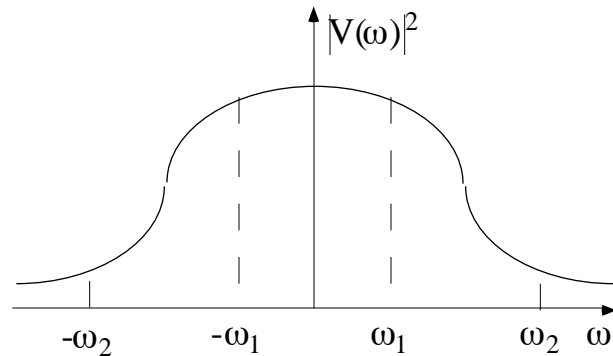
Un circuito (un filtro paso banda ideal) es tal que la salida reproduce exactamente la entrada para todas las frecuencias comprendidas entre  $\omega_1$  y  $\omega_2$  y no deja pasar ninguna frecuencia fuera de ese intervalo (banda de paso).

Se desea obtener una representación gráfica cualitativa de  $\text{mod}^2[V(\omega)]$  y  $\text{mod}^2[V_0(\omega)]$ , siendo  $v(t)$  y  $v_0(t)$  las señales de entrada y salida, respectivamente, y calcular el porcentaje del contenido de energía total referido a una resistencia de  $1 \Omega$  de la señal de entrada que está disponible a la salida.

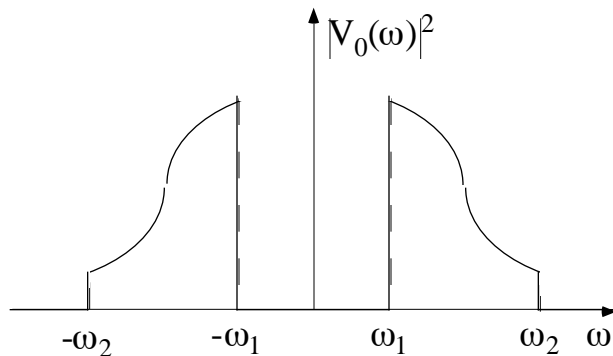
$$v(t) = Ae^{-at}u(t), \quad A = 120 \text{ V}, \quad a = 24 \text{ s}^{-1}, \quad \omega_1 = 24 \text{ rad/s}, \quad \omega_2 = 48 \text{ rad/s}$$

$$v(t) = Ae^{-at}u(t) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V(\omega) = \frac{A}{a + j\omega} \Rightarrow |V(\omega)|^2 = \frac{A^2}{a^2 + \omega^2}$$



La salida es igual a la entrada  
en la banda de paso  
y nula para cualquier otra frecuencia





Energía total disponible a la entrada:

$$W_i = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{A^2}{a^2 + \omega^2} d\omega = \frac{A^2}{\pi} \left[ \frac{1}{a} \arctg\left(\frac{\omega}{a}\right) \right]_0^{\infty} = 300 \text{ J}$$

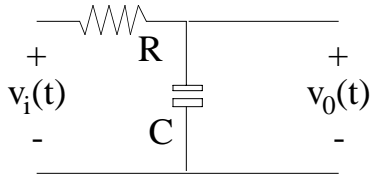
Energía disponible a la salida:

$$W_0 = \frac{1}{\pi} \int_{\omega_1}^{\omega_2} \frac{A^2}{a^2 + \omega^2} d\omega = \frac{A^2}{\pi} \left[ \frac{1}{a} \arctg\left(\frac{\omega}{a}\right) \right]_{\omega_1}^{\omega_2} = 61.45 \text{ J}$$

Porcentaje de energía disponible a la salida:

$$\frac{W_0}{W_i} = 20.48 \%$$

## Ejemplo 2



Dado el circuito de la figura,  
se desea determinar el porcentaje  
de la energía asociada a una resistencia de  $1 \Omega$   
disponible en la señal de entrada  
que está disponible a la salida,  
y el porcentaje de energía de la señal de salida  
que está comprendida en el rango  $0 \leq \omega \leq \omega_0$ .

$$v_i(t) = Ae^{-at}u(t), \quad A = 15 \text{ V}, \quad a = 5 \text{ s}^{-1}, \quad \omega_0 = 10 \text{ rad/s}$$

$$R = 10 \text{ k}\Omega, \quad C = 10 \mu\text{F}$$

$$v_i(t) = Ae^{-at}u(t) \Rightarrow V_i(\omega) = \frac{A}{a + j\omega} \Rightarrow |V_i(\omega)|^2 = \frac{A^2}{a^2 + \omega^2}$$

Energía total disponible a la entrada:  $W_i = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{A^2}{a^2 + \omega^2} d\omega = \frac{A^2}{\pi} \left[ \frac{1}{a} \arctg\left(\frac{\omega}{a}\right) \right]_0^{\infty} = 22.5 \text{ J}$

Función de transferencia (divisor de tensión):  $H(\omega) = \frac{1/(j\omega C)}{R + 1/(j\omega C)}$

Transformada de Fourier de la señal de salida:  $V_0(\omega) = V_i(\omega)H(\omega) = \frac{1/(RC)}{[1/(RC) + j\omega]} \frac{A^2}{(a^2 + \omega^2)}$

Energía disponible a la salida  $W_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} |V_0(\omega)|^2 d\omega = 15 \text{ J}$

Porcentaje de energía disponible a la salida:  $\frac{W_0}{W_i} = 66.67 \%$

Energía disponible a la salida  
en el intervalo  $0 - \omega_0$ :

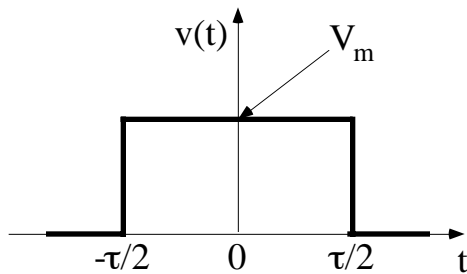
$$W_{0-\omega_0} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\omega_0} |V_0(\omega)|^2 d\omega = 13.64 \text{ J}$$

Porcentaje de energía disponible a la salida  
en el intervalo  $0 - \omega_0$ :

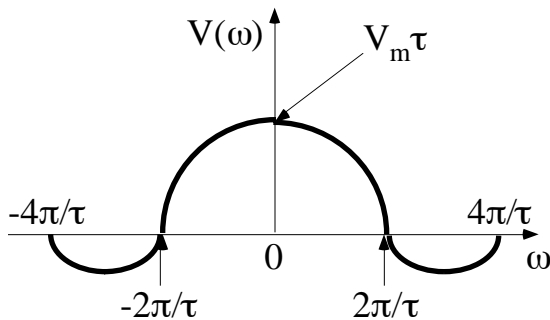
$$\frac{W_{0-\omega_0}}{W_0} = 90.97 \%$$

### Ejemplo 3

Sea un pulso rectangular de tensión como el indicado en la figura



Su transformada de Fourier es de la forma indicada en la figura siguiente



Cuanto más estrecho es el pulso, mayor es el intervalo dominante de frecuencias.

La energía total del pulso es

$$W_t = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} |V(\omega)|^2 d\omega = V_m^2 \tau$$

En consecuencia, la fracción de energía total del pulso contenida en la parte dominante es

$$\frac{W}{W_t} = 90.28 \%$$

Para transmitirlo, el ancho de banda del sistema debe ser suficiente para incluir al menos la parte dominante del espectro; es decir, la dada por la relación

$$0 \leq \omega \leq \frac{2\pi}{\tau}$$

Teniendo en cuenta que la transformada de Fourier del pulso está dada por

$$V(\omega) = V_m \tau \frac{\text{sen}(\omega\tau/2)}{\omega\tau/2}$$

la energía contenida en la parte dominante es

$$W = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi/\tau} |V(\omega)|^2 d\omega =$$

(utilizando una tabla de integrales)

$$= \frac{2V_m^2 \tau (1.41815)}{\pi}$$