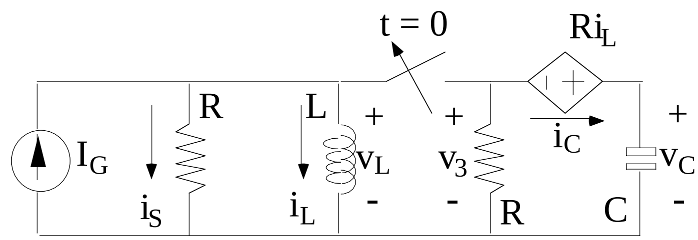
PROBLEMA 1



El circuito de la figura, en el que la fuente independiente es continua y son datos las características de todos los elementos, ha permanecido mucho tiempo sin cambios antes de la apertura del interruptor; una vez producida ésta, el circuito ya no experimenta más cambios. Hallad:

1 (1.2 puntos) i_S, v_L, v_3 e i_C en los instantes $t = 0^-$, $t = 0^+$ y $t = \infty$.

2 (0.8 puntos) Las ecuaciones diferenciales que caracterizan la evolución de v_C e i_L para $t \geq 0$.

3 (0.5 puntos) La variación de energía en la fuente independiente entre $t = 0$ y $t = \infty$.

A lo largo del problema utilizamos la siguiente nomenclatura:

$$i_C = C\frac{dv_C}{dt},\ v_L = L\frac{di_L}{dt}$$

1 Para $t < 0$ la inductancia es un cortocircuito y la capacidad es un circuito abierto. Por tanto,

$$i_C(0^-) = 0 \text{ A},\ v_3(0^-) = v_L(0^-) = 0 \text{ V},\ i_S(0^-) = \frac{v_L(0^-)}{R} = 0 \text{ A}$$

La corriente en la inductancia y la tensión en la capacidad no pueden cambiar bruscamente. Por tanto,

$$I_G = \frac{v_L(0^-)}{R} + i_L(0^-) + \frac{v_L(0^-)}{R} + i_C(0^-) \Rightarrow i_L(0^-) = I_G = i_L(0^+) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow i_S(0^+) = I_G - i_L(0^+) = 0 \text{ A} \Rightarrow v_L(0^+) = Ri_S(0^+) = 0 \text{ V}$$

$$v_3(0^-) + Ri_L(0^-) = v_C(0^-) = RI_G = v_C(0^+) \Rightarrow v_3(0^+) = -Ri_L(0^+) + v_C(0^+) = 0 \text{ V} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow i_C(0^+) = -\frac{v_3(0^+)}{R} = 0 \text{ A}$$

Para $t = \infty$ la inductancia es un cortocircuito y la capacidad es un circuito abierto. Por tanto,

$$v_L(\infty) = 0 \text{ V} \Rightarrow i_S(\infty) = \frac{v_L(\infty)}{R} = 0 \text{ A}$$

$$i_C(\infty) = 0 \text{ A} \Rightarrow v_3(\infty) = -Ri_C(\infty) = 0 \text{ V}$$

2 Para t > 0 en la malla que contiene la fuente independiente se verifica

$$I_G = i_S + i_L = \frac{v_L}{R} + i_L = \frac{Ldi_L}{Rdt} + i_L \quad (1)$$

y en la malla que contiene la fuente dependiente se verifica

$$v_C = v_3 + Ri_L = - Ri_C + Ri_L = - RC\frac{dv_C}{dt} + Ri_L \quad (2)$$

Despejando i_L de (2) y sustituyendo el resultado en (1) se obtiene

$$LC\frac{d^2v_C}{dt^2} + \left(RC + \frac{L}{R}\right)\frac{dv_C}{dt} + v_C = RI_G \quad (3)$$

(1) y (3) son las ecuaciones diferenciales buscadas.

3 Para obtener la variación pedida efectuamos el siguiente razonamiento:

$$w_G = \int_0^\infty p_G(t)dt = \int_0^\infty -I_G v_L(t)dt = \int_0^\infty -I_G L di_L(t) = -I_G L[i_L(\infty) - i_L(0)] = 0\ \mathrm{W}$$

Antes de la apertura del interruptor, la inductancia era un cortocircuito, con lo que toda la corriente de la fuente independiente se iba por ella. En consecuencia,

$$i_L(0) = i_L(0^-) = I_G$$

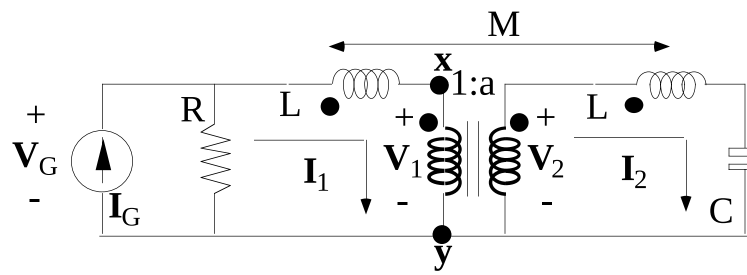
En $t = \infty$ la inductancia vuelve a ser un cortocircuito, con lo que se repite la situación anterior. Es decir,

$$i_L(\infty) = I_G$$

En otras palabras, dado que la corriente en la inductancia es igual en los dos instantes considerados, la variación total de energía en el elemento es nula.

PROBLEMA 2

El circuito de la figura, en cuya representación se ha utilizado notación fasorial, funciona en régimen sinusoidal permanente a una frecuencia angular ω.



1 (1.25 puntos) Escribid un sistema algebraico de cinco ecuaciones que permita obtener $\mathbf{I}_1$, $\mathbf{I}_2$, $\mathbf{V}_1$, $\mathbf{V}_2$ y $\mathbf{V}_G$ a partir de los elementos del circuito.

2 (0.5 puntos) Si $\mathbf{I}_1$ y a son reales, ¿cómo es la potencia compleja en el secundario del transformador ideal? ¿Real, compleja, imaginaria pura? ¿Por qué?

3 (0.25 puntos) Si $\mathbf{I}_2$ y a son reales, ¿cómo es $\mathbf{I}_G$? ¿Real, compleja, imaginaria pura? ¿Por qué?

4 (0.5 puntos) Suponiendo que M = 0 H, obtened una expresión algebraica para la impedancia que hay que colocar entre **x** e **y** para que en ella se disipe la máxima potencia media posible.

1 Por nudos,

$$\mathbf{I}_G = \frac{\mathbf{V}_G}{R} + \mathbf{I}_1$$

Por mallas,

$$\mathbf{V}_G = \mathbf{I}_1 j\omega L + \mathbf{V}_1 + \mathbf{I}_2 j\omega M, \ \mathbf{V}_2 = \mathbf{I}_2\left(j\omega L + \frac{1}{j\omega C}\right) + \mathbf{I}_1 j\omega M$$

Por las propiedades del transformador ideal,

$$\mathbf{V}_2 = a\mathbf{V}_1, \ \mathbf{I}_1 = a\mathbf{I}_2$$

2 Si $\mathbf{I}_1$ y a son reales, también lo es $\mathbf{I}_2$. En consecuencia, $\mathbf{V}_2$ es imaginaria pura, ya que es el producto de una corriente real por una impedancia que es imaginaria pura (a L y C van asociadas impedancias imaginarias, y la contribución de $\mathbf{I}_1$ y M también lo es). Por tanto, la potencia compleja, que depende del producto de la tensión y el complejo conjugado de la corriente, es imaginaria pura.

3 Si $\mathbf{I}_2$ y a son reales, también lo es $\mathbf{I}_1$. Ahora bien, la fuente independiente *ve* una impedancia compleja, ya que en ella hay una contribución real de R y una contribución imaginaria del resto del circuito. Expresando $\mathbf{I}_1$ como el cociente entre $\mathbf{V}_G$ y tal impedancia compleja, la primera sólo puede ser real si la segunda también es compleja. Y, si $\mathbf{V}_G$ es compleja, también lo es $\mathbf{I}_G$, ya que

$$\mathbf{V}_G = (\mathbf{I}_G - \mathbf{I}_1)R$$

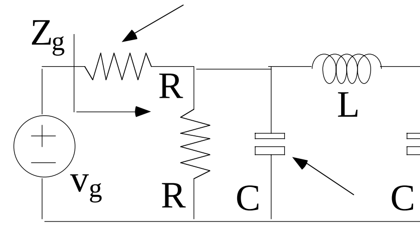
4 Se desactiva la fuente (se sustituye por un circuito abierto) y, teniendo en cuenta que no hay influencia de M, se refleja la impedancia del secundario del transformador ideal, con lo que la impedancia equivalente de Thèvenin entre **x** e **y** es

$$Z_{Th} = (R + j\omega L) \,//\, \frac{\left(j\omega L + \frac{1}{j\omega C}\right)}{a^2}$$

con lo que la impedancia para obtener la máxima potencia media posible es

$$Z_L = Z_{Th}^*$$

PROBLEMA 3



En el circuito de la figura son datos los valores de R, L, y C.

Sabiendo que $v_g(t) = V_G\cos(\omega t)$, y siendo V_G dato (real),

1 (0.5 puntos) Hallad el valor de la impedancia (Z_g) que *ve* la fuente independiente para un valor de ω dado.

2 (0.5 puntos) Hallad los valores a los que tienden el módulo y la fase de la tensión en la capacidad marcada con una flecha cuando ω tiende a 0 rad/s y cuando ω tiende a ∞ rad/s.

3 (0.5 puntos) Hay dos frecuencias angulares (finitas, positivas, no nulas) para las que la impedancia que *ve* la fuente es puramente resistiva. Obtened una de ellas, a la que llamaremos ω_0. ¿Cuánto vale Z_g cuando ω toma este valor?

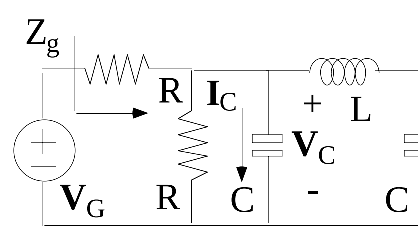
4 (0.5 puntos) Suponiendo que C = ∞ F, obtened la expresión temporal de la corriente en la capacidad marcada con una flecha para cualquier valor de ω.

Sabiendo que $v_g(t) = V_D + V_A\cos(\omega_0 t)$, siendo V_D y V_A datos (reales), teniendo ω_0 el valor calculado en el apartado **3**, y teniendo C un valor finito,

5 (1 punto) Hallad la potencia instantánea en la resistencia marcada con una flecha (supóngase Z_g = R si no se ha obtenido previamente este dato).

---

1 Dado que el circuito funciona en régimen sinusoidal permanente, utilizamos la nomenclatura mostrada en la figura adjunta, con $\mathbf{V}_G = V_G$.



Agrupando impedancias se tiene

$$Z = \left(\frac{1}{j\omega C}\right) // \left(j\omega L + \frac{1}{j\omega C}\right) = -jX;\ X = \frac{1}{\omega C}\left(\frac{1-\omega^2 LC}{2-\omega^2 LC}\right)$$

$$Z_{eq} = R // Z = R_{eq} - j\,X_{eq};\ R_{eq} = \frac{RX^2}{R^2+X^2},\ X_{eq} = \frac{R^2 X}{R^2+X^2}$$

$$Z_g = R + Z_{eq}$$

2 Utilizando la nomenclatura del apartado anterior se tiene

$$\mathbf{V}_C = \frac{Z_{eq}\mathbf{V}_G}{Z_g}$$

$$\omega \to 0 \text{ rad/s} \Rightarrow X \to \frac{1}{2\omega C} \Rightarrow Z_{eq} \to R \Rightarrow Z_g \to 2R \Rightarrow \mathbf{V}_C \to \frac{\mathbf{V}_G}{2}$$

$$\text{módulo de } \mathbf{V}_C \to \frac{V_G}{2}, \text{ fase de } \mathbf{V}_C \to 0\ °$$

$$\omega \to \infty \text{ rad/s} \Rightarrow X \to \frac{1}{\omega C} \Rightarrow Z_{eq} \to -jX \Rightarrow Z_g \to R \Rightarrow \mathbf{V}_C \to -\frac{jX\mathbf{V}_G}{R}$$

$$\text{módulo de } \mathbf{V}_C \to \frac{\mathbf{V}_C}{\omega RC}, \text{ fase de } \mathbf{V}_C \to -90\ °$$

3 Para hallar el valor pedido efectuamos el siguiente razonamiento:

$$Z_g \text{ resistiva } \Rightarrow \mathrm{Im}\{Z_g\} = 0\ \Omega \Rightarrow X_{eq} = 0\ \Omega \Rightarrow \begin{Bmatrix} X = 0\ \Omega \\ X = \infty\ \Omega \end{Bmatrix}$$

$$X = 0\ \Omega \Rightarrow \begin{pmatrix} \omega_0 = \infty \text{ rad/s} \\ \omega_0 = \pm \frac{1}{\sqrt{LC}} \end{pmatrix} \Rightarrow Z_g = R,\ X = \infty\ \Omega \Rightarrow \begin{pmatrix} \omega_0 = 0 \text{ rad/s} \\ \omega_0 = \pm \sqrt{\frac{2}{LC}} \end{pmatrix} \Rightarrow Z_g = 2R$$

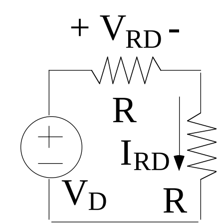
4 En las condiciones indicadas, la capacidad marcada con una flecha es un cortocircuito, y por ella se desvía toda la corriente que entrega la fuente. Por tanto,

$$\mathbf{I}_C = \frac{\mathbf{V}_G}{R} \Rightarrow i_C(t) = \mathrm{Re}\left\{\frac{\mathbf{V}_G}{R} e^{j\omega t}\right\} = \frac{V_G}{R}\cos(\omega t)$$

5 Como hay dos excitaciones debemos aplicar el principio de superposición.

Continua

La inductancia es un cortocircuito y las capacidades son circuitos abiertos.



$$V_{RD} = \frac{V_D}{2},\ I_{RD} = \frac{V_D}{2R}$$

Régimen sinusoidal permanente

En las condiciones indicadas, la impedancia que ve la fuente es resistiva. Como se deduce de los apartados **1** y **3**,

$$\omega_0 = +\frac{1}{\sqrt{LC}} \Rightarrow Z_g = R,\ \omega_0 = +\sqrt{\frac{2}{LC}} \Rightarrow Z_g = 2R$$

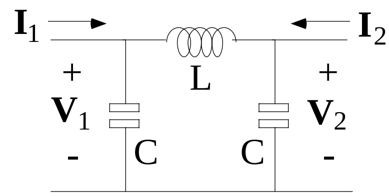
$$\mathbf{I}_{RA} = \frac{\mathbf{V}_A}{Z_g} \Rightarrow i_{RA}(t) = \mathrm{Re}\left\{\frac{\mathbf{V}_A}{Z_g} e^{j\omega_0 t}\right\} = \frac{V_A}{Z_g}\cos(\omega_0 t)$$

$$\mathbf{V}_{RA} = R\mathbf{I}_{RA} = \frac{R\mathbf{V}_A}{Z_g} \Rightarrow v_{RA}(t) = \mathrm{Re}\left\{\frac{R\mathbf{V}_A}{Z_g} e^{j\omega_0 t}\right\} = \frac{RV_A}{Z_g}\cos(\omega_0 t)$$

Respuesta total

$$i_R(t) = I_{RD} + i_{RA}(t),\ v_R(t) = V_{RD} + v_{RA}(t),\ p_R(t) = v_R(t)\, i_R(t)$$

PROBLEMA 4



El cuadripolo de la figura, en cuya representación se ha utilizado notación fasorial, funciona en régimen sinusoidal permanente a una frecuencia angular ω.

1 (0.5 puntos) Obtened los parámetros de admitancia del cuadripolo.

2 (1 punto) Se conectan en serie dos cuadripolos como el del apartado **1**. Obtened los parámetros de impedancia del cuadripolo resultante. Supóngase $\omega L = 1/(\omega C)$.

3 (0.5 puntos) El cuadripolo resultante de la agrupación indicada en el apartado **2** se conecta a una fuente de tensión (caracterizada por el fasor $\mathbf{V}_G$; lleva asociada una impedancia en serie Z_G). Obtened la tensión de circuito abierto a la salida del cuadripolo.

1 En el cuadripolo se tienen las siguientes ecuaciones de nudos:

$$\mathbf{I}_1 = \mathbf{V}_1 j\omega C + \frac{\mathbf{V}_1 - \mathbf{V}_2}{j\omega L} = \mathbf{V}_1\left(j\omega C + \frac{1}{j\omega L}\right) - \frac{\mathbf{V}_2}{j\omega L}$$
$$\mathbf{I}_2 = \mathbf{V}_2 j\omega C + \frac{\mathbf{V}_2 - \mathbf{V}_1}{j\omega L} = -\frac{\mathbf{V}_1}{j\omega L} + \mathbf{V}_2\left(j\omega C + \frac{1}{j\omega L}\right) \qquad (1)$$

Comparando estas ecuaciones con las correspondientes a la definición de los parámetros y,

$$\mathbf{I}_1 = \mathbf{V}_1 y_{11} + \mathbf{V}_2 y_{12},\ \mathbf{I}_2 = \mathbf{V}_1 y_{21} + \mathbf{V}_2 y_{22}$$

se tiene

$$y_{11} = \frac{1}{j\omega L} + j\omega C = y_{22},\ y_{12} = -\frac{1}{j\omega L} = y_{21}$$

2 En las condiciones indicadas, las ecuaciones (1) quedan en la forma

$$\mathbf{I}_1 = -\frac{\mathbf{V}_2}{j\omega L} \Rightarrow \mathbf{V}_2 = -\mathbf{I}_1 j\omega L;\ \mathbf{I}_2 = -\frac{\mathbf{V}_1}{j\omega L} \Rightarrow \mathbf{V}_1 = -\mathbf{I}_2 j\omega L$$

Comparando estas ecuaciones con las correspondientes a la definición de los parámetros de impedancia,

$$\mathbf{V}_1 = \mathbf{I}_1 z_{11} + \mathbf{I}_2 z_{12},\ \mathbf{V}_2 = \mathbf{I}_1 z_{21} + \mathbf{I}_2 z_{22}$$

se tiene

$$z_{11} = 0 = z_{22},\ z_{12} = -j\omega L = z_{21}$$

En la agrupación en serie los parámetros de impedancia del cuadripolo resultante se obtienen de la siguiente forma:

$$\begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2z_{11} & 2z_{12} \\ 2z_{21} & 2z_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -j2\omega L \\ -j2\omega L & 0 \end{bmatrix}$$

3 El circuito resultante queda caracterizado por las ecuaciones

$$\mathbf{V}_G = \mathbf{I}_1 Z_G + \mathbf{V}_1,\ \mathbf{V}_1 = \mathbf{I}_1 Z_{11} + \mathbf{I}_2 Z_{12},\ \mathbf{V}_2 = \mathbf{I}_1 Z_{21} + \mathbf{I}_2 Z_{22}$$

A partir de ellas, y teniendo en cuenta que $\mathbf{I}_2 = 0$ A (circuito abierto en la salida), se puede deducir (aplicando los resultados del apartado anterior)

$$\mathbf{V}_2 = \mathbf{I}_1 Z_{21} = Z_{21}\frac{\mathbf{V}_G - \mathbf{V}_1}{Z_G} = \frac{Z_{21}(\mathbf{V}_G - \mathbf{I}_1 Z_{11})}{Z_G} = -\frac{j2\omega L\mathbf{V}_G}{Z_G}$$