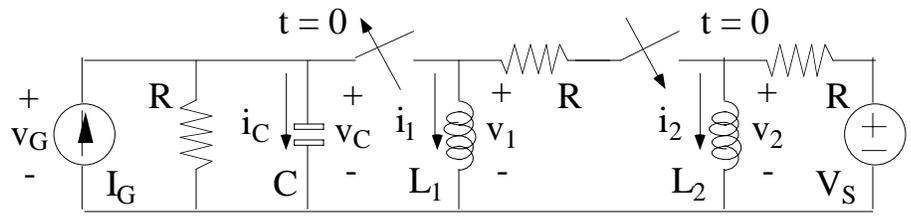


Problema 1

En el circuito de la figura las fuentes son continuas, y son datos las características de todos los elementos.



El circuito ha permanecido mucho tiempo sin cambios antes del cambio de posición de los interruptores. Producido éste, el circuito ya no sufre más cambios. Se pide:

- A (1.2 puntos)** Hallar v_G , i_C , i_1 e i_2 en los instantes $t = 0^-$, $t = 0^+$ y $t = \infty$.
- B (0.9 puntos)** Hallar las ecuaciones diferenciales que caracterizan la evolución de v_C , i_1 e i_2 para $t \geq 0$.
- C (0.4 puntos)** Suponiendo que una de las ecuaciones diferenciales calculadas en el apartado anterior es de la forma

$$\frac{L_1 L_2 d^2 i_j}{R dt^2} + (L_1 + 2L_2) \frac{d i_j}{dt} + R i_j = K, j = 1 \text{ ó } 2$$

demostrar que la respuesta de la parte del circuito que contiene las inductancias es supercrítica para $t > 0$.

Apartado A

En régimen permanente continuo las inductancias son cortocircuitos y la capacidad es un circuito abierto

$$v_1(0^-) = 0 \text{ V} = v_2(0^-), i_C(0^-) = 0 \text{ A}$$

Elementos en paralelo y ecuación de nudo

$$v_G(0^-) = v_C(0^-) = v_1(0^-) = 0 \text{ V}$$

$$i_1(0^-) = I_G - \frac{v_1(0^-)}{R} - i_C(0^-) = I_G$$

Ecuación de malla

$$i_2(0^-) = \frac{V_S - v_2(0^-)}{R} = \frac{V_S}{R}$$

Continuidad de corrientes en inductancias y tensiones en capacidades

$$i_1(0^+) = I_G = i_1(0^-), i_2(0^+) = \frac{V_S}{R} = i_2(0^-), v_C(0^+) = 0 \text{ V} = v_C(0^-)$$

Elementos en paralelo y ecuación de nudo

$$v_G(0^+) = v_C(0^+) = 0 \text{ V}$$

$$i_C(0^+) = I_G - \frac{v_C(0^+)}{R} = I_G$$

En régimen permanente continuo las inductancias son cortocircuitos y la capacidad es un circuito abierto

$$v_1(\infty) = 0 \text{ V} = v_2(\infty), i_C(\infty) = 0 \text{ A}$$

Elementos en paralelo
y ecuación de nudo

$$v_G(\infty) = v_C(\infty) = R[I_G - i_C(\infty)] = RI_G$$

Ecuaciones
de malla y de nudo

$$i_1(\infty) = \frac{v_2(\infty) - v_1(\infty)}{R} = 0 \text{ A}$$
$$i_2(\infty) = \frac{V_S - v_2(\infty)}{R} - i_1(\infty) = \frac{V_S}{R}$$

Apartado B

Para $t > 0$ se tiene

Ecuación de nudo y relación funcional

$$C \frac{dv_C}{dt} + \frac{v_C}{R} = I_G \quad (1)$$

Ecuaciones de nudo y de malla
y relaciones funcionales

$$i_1 = \frac{V_S - L_2 \frac{di_2}{dt}}{R} - i_2 \quad (2)$$

$$L_2 \frac{di_2}{dt} = Ri_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} \quad (3)$$

Sustituyendo (2) en (3),

$$\frac{L_1 L_2 d^2 i_2}{R dt^2} + (L_1 + 2L_2) \frac{di_2}{dt} + Ri_2 = V_S \quad (4)$$

Sustituyendo (3) en (2),

$$i_2 = \frac{V_S}{R} - 2i_1 - \frac{L_1 di_1}{R dt} \quad (5)$$

Sustituyendo (5) en (3),

$$\frac{L_1 L_2 d^2 i_1}{R dt^2} + (L_1 + 2L_2) \frac{di_1}{dt} + Ri_1 = 0 \quad (6)$$

(1), (4) y (6) son las ecuaciones diferenciales buscadas.

Apartado C

$$a = \frac{L_1 L_2}{R}, b = L_1 + 2L_2, c = R$$

Ecuación característica

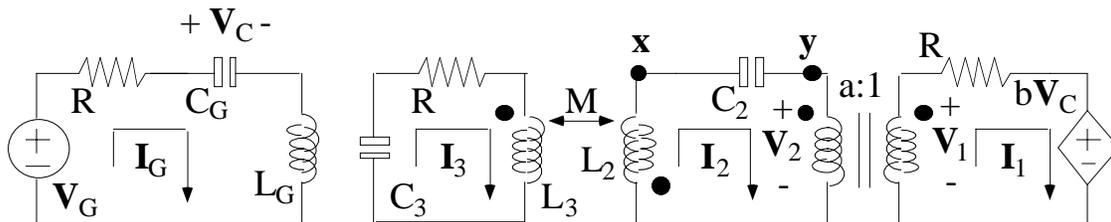
$$\alpha = \frac{b}{2a} = \frac{(L_1 + 2L_2)R}{2L_1 L_2}, \omega_0 = \sqrt{\frac{c}{a}} = \frac{R}{\sqrt{L_1 L_2}}$$

Las tres posibles relaciones entre el coeficiente de amortiguamiento y la frecuencia angular de resonancia pueden ser expresadas como

$$\alpha^2 \geq \omega_0^2 \Rightarrow L_1^2 + 4L_2^2 \geq 0$$

Evidentemente, de las tres relaciones sólo una puede verificarse, y ésta es justamente la que corresponde a la condición de respuesta supercrítica.

Problema 2



El circuito de la figura, en cuya representación se ha utilizado notación fasorial, funciona en régimen sinusoidal permanente a una frecuencia angular ω .

A (1.4 puntos) Formulad un sistema algebraico de siete ecuaciones a partir del cual sea posible obtener los valores de I_G , I_1 , I_2 , I_3 , V_1 , V_2 , y V_C .

Utilizando los valores $V_G = 1$ V, $\omega = 1$ Mrad/s, $a = 0.5$, $b = -0.25$, $R = 1$ Ω , $M = 0$ H, $L_G = 4$ μ H, $L_2 = 1$ μ H, $L_3 = 1$ μ H, $C_G = 0.25$ μ F, $C_2 = 1$ μ F, y $C_3 = 1$ μ F,

B (0.3 puntos) Obtened la potencia instantánea en la fuente dependiente.

C (0.8 puntos) Obtened el equivalente de Thèvenin entre x e y .

Apartado A

Ecuaciones de malla

$$V_G = I_G \left(R + \frac{1}{j\omega C_G} + j\omega L_G \right)$$

$$0 = I_3 \left(\frac{1}{j\omega C_3} + R + j\omega L_3 \right) + I_2 j\omega M$$

$$0 = I_3 j\omega M + I_2 \left(j\omega L_2 + \frac{1}{j\omega C_2} \right) + V_2$$

$$V_1 = I_1 R + bV_C$$

Ecuación de la fuente dependiente

$$V_C = \frac{I_G}{j\omega C_G}$$

Ecuaciones del transformador ideal

$$V_2 = aV_1, I_1 = aI_2$$

Apartado B

$$\mathbf{V}_G = \mathbf{I}_G \left(\mathbf{R} + \frac{1}{j\omega C_G} + j\omega L_G \right) \Rightarrow \mathbf{I}_G = 1 \text{ A} \Rightarrow \mathbf{V}_C = \frac{\mathbf{I}_G}{j\omega C_G} = -j4 \text{ V}$$

Reflejando impedancias en los transformadores,

$$b\mathbf{V}_C = -\mathbf{I}_1 \left\{ \mathbf{R} + \frac{1}{a^2} \left[\frac{1}{j\omega C_2} + j\omega L_2 + \frac{(\omega M)^2}{j\omega L_3 + \mathbf{R} + \frac{1}{j\omega C_3}} \right] \right\} \Rightarrow \mathbf{I}_1 = -j \text{ A}$$

$$\mathbf{V}_C = -j4 \text{ V} \Rightarrow v_C(t) = \text{Re} \left\{ \mathbf{V}_C e^{j\omega t} \right\} = 4 \cos(\omega t - 90^\circ) \text{ V}, \omega = 1 \text{ Mrad/s}$$

$$\mathbf{I}_1 = -j \text{ A} \Rightarrow i_1(t) = \text{Re} \left\{ \mathbf{I}_1 e^{j\omega t} \right\} = \cos(\omega t - 90^\circ) \text{ A}, \omega = 1 \text{ Mrad/s}$$

$$p_{\text{dep}}(t) = b v_C(t) i_1(t) = -[\cos(\omega t - 90^\circ)]^2 \text{ W}, \omega = 1 \text{ Mrad/s}$$

Apartado C

La tensión de circuito abierto se calcula con el circuito en las condiciones del apartado anterior. En consecuencia,

$$\mathbf{V}_{\text{Th}} = \mathbf{V}_{xy} = \frac{\mathbf{I}_2}{j\omega C_2} = \frac{\mathbf{I}_1}{aj\omega C_2} = -2 \text{ V}$$

Para calcular la corriente de cortocircuito, se sustituye C_2 por dicho cortocircuito.

$$\mathbf{V}_G = \mathbf{I}_G \left(\mathbf{R} + \frac{1}{j\omega C_G} + j\omega L_G \right) \Rightarrow \mathbf{I}_G = 1 \text{ A} \Rightarrow \mathbf{V}_C = \frac{\mathbf{I}_G}{j\omega C_G} = -j4 \text{ V}$$

Reflejando impedancias en los transformadores,

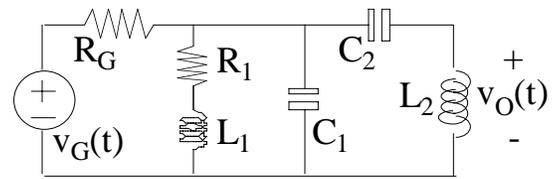
$$b\mathbf{V}_C = -\mathbf{I}_1 \left\{ \mathbf{R} + \frac{1}{a^2} \left[j\omega L_2 + \frac{(\omega M)^2}{j\omega L_3 + \mathbf{R} + \frac{1}{j\omega C_3}} \right] \right\} \Rightarrow \mathbf{I}_1 = -\frac{j}{1+j4} \text{ A}$$

$$\mathbf{I}_N = \mathbf{I}_2 = \frac{\mathbf{I}_1}{a} = -\frac{j2}{1+j4} \text{ A}$$

$$\mathbf{Z}_{\text{Th}} = \frac{\mathbf{V}_{\text{Th}}}{\mathbf{I}_N} = 4 - j \Omega$$

Problema 3

En el circuito de la figura se suponen conocidos los valores de los elementos pasivos.



Suponiendo que $v_G(t) = V_G \cos(\omega t)$, siendo V_G dato (real y positivo),

A (0.5 puntos) Obtened al menos un valor de la frecuencia de resonancia (suponiendo que haya más de uno) del circuito, que debe ser finito, no nulo y positivo.

B (0.5 puntos) Obtened los valores a los que tienden el módulo y la fase del fasor representativo de la tensión v_O cuando la frecuencia angular toma valores muy bajos.

C (0.5 puntos) Obtened los valores a los que tienden el módulo y la fase del fasor representativo de v_O cuando las inductancias y las capacidades tienen valores muy elevados.

Suponiendo que $v_G(t) = V_1 \cos(\omega_1 t) + V_2 \cos(\omega_2 t)$, $V_1 = V_2 = 1$ V, $\omega_1 = 1$ Mrad/s, $\omega_2 = 1$ krad/s, $R_G = R_1 = 1$ Ω , $L_1 = 1$ nH, $L_2 = 1$ μ H, $C_1 = 1$ nF, y $C_2 = 1$ μ F,

D (0.5 puntos) Obtened la tensión $v_O(t)$ cuando sólo está aplicada la excitación de frecuencia angular ω_1 .

E (0.5 puntos) Obtened la tensión $v_O(t)$ cuando sólo está aplicada la excitación de frecuencia angular ω_2 .

F (0.5 puntos) Obtened la tensión $v_O(t)$ cuando están aplicadas simultáneamente ambas excitaciones.

Se recomienda utilizar aproximaciones razonables antes que cálculos exactos.

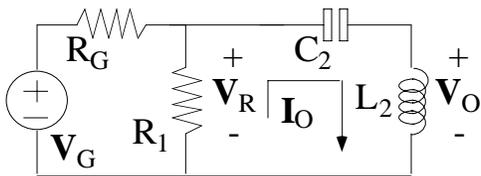
Apartado A

Puede observarse que, si la agrupación L_2 - C_2 está en cortocircuito, este cortocircuito cancela el efecto de R_1 , L_1 y C_1 , y la fuente ve una impedancia puramente resistiva (R_G en serie con el citado cortocircuito).

En consecuencia, una posible frecuencia de resonancia del circuito es la que provoca el cortocircuito en la agrupación indicada. Es decir,

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L_2 C_2}}$$

Apartado B



$$\mathbf{V}_G = V_G$$

Para frecuencias muy bajas, las inductancias y las capacidades tienden a comportarse como cortocircuitos y circuitos abiertos, respectivamente. En consecuencia, el circuito queda en la forma indicada en la figura adjunta, en la que se ha utilizado notación fasorial.

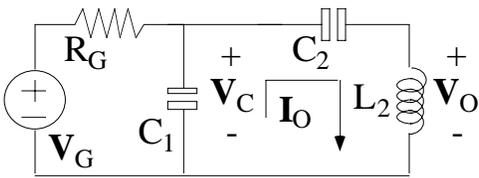
Puesto que C_2 es prácticamente un circuito abierto, casi toda la corriente proporcionada por la fuente circulará por las resistencias. En consecuencia,

$$\mathbf{V}_R \approx \frac{R_1}{R_G + R_1} \mathbf{V}_G$$

$$\mathbf{I}_O \approx \frac{\mathbf{V}_R}{\frac{1}{j\omega C_2} + j\omega L_2} \approx \mathbf{V}_R j\omega C_2$$

$$\mathbf{V}_O = \mathbf{I}_O j\omega L_2 \approx -\mathbf{V}_R \omega^2 L_2 C_2 \approx -\frac{\omega^2 R_1 L_2 C_2}{R_G + R_1} \mathbf{V}_G \Rightarrow |\mathbf{V}_O| \rightarrow 0 \text{ V}, \angle \mathbf{V}_O \rightarrow 180^\circ$$

Apartado C



$$\mathbf{V}_G = V_G$$

Las inductancias de valores elevados tienden a comportarse como circuitos abiertos, en tanto que las capacidades de valores elevados tienden a comportarse como cortocircuitos. En consecuencia, el circuito queda en la forma indicada en la figura adjunta, en la que se ha utilizado notación fasorial.

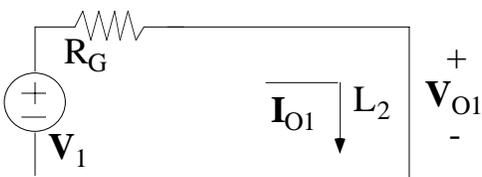
Puesto que C_1 es prácticamente un cortocircuito (y L_2 es prácticamente un circuito abierto), casi toda la corriente proporcionada por la fuente circulará por dicha capacidad. En consecuencia,

$$\mathbf{V}_C \approx \frac{\frac{1}{j\omega C_1}}{R_G + \frac{1}{j\omega C_1}} \mathbf{V}_G \approx \frac{\mathbf{V}_G}{j\omega R_G C_1}$$

$$\mathbf{I}_O \approx \frac{\mathbf{V}_C}{\frac{1}{j\omega C_2} + j\omega L_2} \approx \frac{\mathbf{V}_C}{j\omega L_2}$$

$$\mathbf{V}_O = \mathbf{I}_O j\omega L_2 \approx \mathbf{V}_C \approx -\frac{j\mathbf{V}_G}{\omega R_G C_1} \Rightarrow |\mathbf{V}_O| \rightarrow 0 \text{ V}, \angle \mathbf{V}_O \rightarrow -90^\circ$$

Apartado D



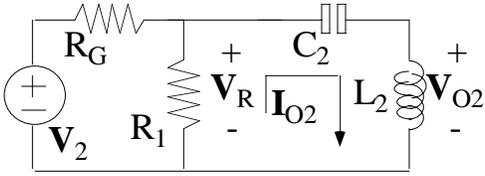
$$\mathbf{V}_1 = V_1 = 1 \text{ V}$$

A la frecuencia ω_1 , L_2 y C_2 están en resonancia, constituyendo un cortocircuito y anulando, por tanto, el efecto de los elementos que están en paralelo con tal agrupación. En consecuencia, el circuito queda en la forma indicada en la figura adjunta, en la que se ha utilizado notación fasorial, verificándose las relaciones que se indican seguidamente.

$$\mathbf{V}_{O1} = \mathbf{I}_{O1} j\omega_1 L_2 = \frac{\mathbf{V}}{R_G} j\omega_1 L_2 = j \mathbf{V} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v_{O1}(t) = \operatorname{Re}\left\{\mathbf{V}_{O1} e^{j\omega_1 t}\right\} = \cos(\omega_1 t + 90^\circ) \text{ V}, \omega_1 = 1 \text{ Mrad/s}$$

Apartado E



Para la frecuencia indicada, las inductancias y las capacidades tienden a comportarse como cortocircuitos y circuitos abiertos, respectivamente, tal y como se deduce de los siguientes datos:

$$\mathbf{V}_2 = V_2 = 1 \text{ V}$$

$$Z_{C1} = \frac{1}{j\omega_2 C_1} = -j10^6 \Omega, Z_{C2} = \frac{1}{j\omega_2 C_2} = -j10^3 \Omega$$

$$Z_{L1} = j\omega_2 L_1 = j10^{-6} \Omega, Z_{L2} = j\omega_2 L_2 = j10^{-3} \Omega$$

En consecuencia, el circuito queda en la forma indicada en la figura adjunta, en la que se ha utilizado notación fasorial. Puesto que C_2 es prácticamente un circuito abierto, casi toda la corriente proporcionada por la fuente circulará por las resistencias. Por tanto,

$$\mathbf{V}_R \approx \frac{R_1}{R_G + R_1} \mathbf{V}_2 = 0.5 \text{ V}$$

$$\mathbf{I}_{O2} \approx \frac{\mathbf{V}_R}{\frac{1}{j\omega_2 C_2} + j\omega_2 L_2} \approx \mathbf{V}_R j\omega_2 C_2 = j0.5 \text{ mA}$$

$$\mathbf{V}_{O2} = \mathbf{I}_{O2} j\omega_2 L_2 \approx -\mathbf{V}_R \omega_2^2 L_2 C_2 \approx -\frac{\omega_2^2 R_1 L_2 C_2}{R_G + R_1} \mathbf{V}_2 = -0.5 \mu\text{V} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v_{O2}(t) = \operatorname{Re}\left\{\mathbf{V}_{O2} e^{j\omega_2 t}\right\} = 0.5 \cos(\omega_2 t + 180^\circ) \mu\text{V}, \omega_2 = 1 \text{ krad/s}$$

Apartado F

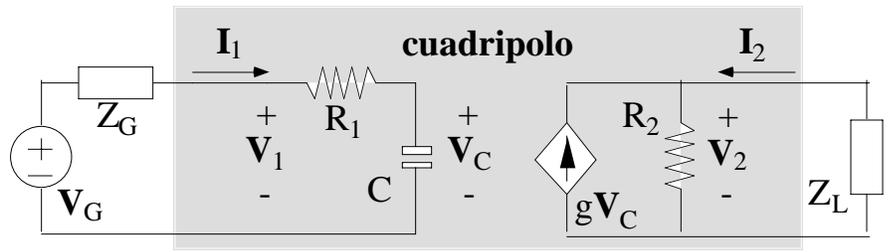
Se aplica el principio de superposición, con lo que

$$v_O(t) = v_{O1}(t) + v_{O2}(t)$$

teniendo $v_{O1}(t)$ y $v_{O2}(t)$ las expresiones indicadas en los apartados D y E, respectivamente.

Problema 4

El circuito de la figura, en cuya representación se ha utilizado notación fasorial, funciona en régimen sinusoidal permanente a una frecuencia angular ω .



- A (0.75 puntos)** Obtened los parámetros de transmisión (abcd) del cuadripolo.
B (0.75 puntos) Obtened los parámetros de impedancia del cuadripolo.
C (0.5 puntos) Obtened el valor de la ganancia de corriente (I_2/I_1) del circuito completo en función de los parámetros de admitancia del cuadripolo.

Apartado A

En el circuito se verifican las relaciones (ecuaciones de malla y de nudo)

$$V_1 = I_1 \left(R_1 + \frac{1}{j\omega C} \right) \quad (1)$$

$$I_2 = \frac{V_2}{R_2} - gV_C = \frac{V_2}{R_2} - \frac{gI_1}{j\omega C} \quad (2)$$

Reordenando (2) y sustituyendo el resultado en (1)

$$I_1 = \frac{j\omega C}{gR_2} V_2 - \frac{j\omega C}{g} I_2 \quad (3)$$

$$V_1 = \frac{1}{gR_2} (j\omega CR_1 + 1) V_2 - \frac{1}{g} (j\omega CR_1 + 1) I_2 \quad (4)$$

Los parámetros de transmisión satisfacen las relaciones

$$V_1 = V_2 a - I_2 b \quad (5)$$

$$I_1 = V_2 c - I_2 d \quad (6)$$

Comparando (3-4) y (5-6)

$$a = \frac{j\omega CR_1 + 1}{gR_2}, \quad b = \frac{j\omega CR_1 + 1}{g}$$

$$c = \frac{j\omega C}{gR_2}, \quad d = \frac{j\omega C}{g}$$

Apartado B

Reordenando (2)

$$\mathbf{V}_2 = \frac{gR_2}{j\omega C}\mathbf{I}_1 + R_2\mathbf{I}_2 \quad (7)$$

Los parámetros de impedancia satisfacen las relaciones

$$\mathbf{V}_1 = \mathbf{I}_1 z_{11} + \mathbf{I}_2 z_{12} \quad (8)$$

$$\mathbf{V}_2 = \mathbf{I}_1 z_{21} + \mathbf{I}_2 z_{22} \quad (9)$$

Comparando (1, 7) y (8-9)

$$z_{11} = R_1 + \frac{1}{j\omega C}, z_{12} = 0 \Omega$$

$$z_{21} = \frac{gR_2}{j\omega C}, z_{22} = R_2$$

Apartado C

En el circuito se verifican las relaciones

$$\mathbf{I}_1 = \mathbf{V}_1 y_{11} + \mathbf{V}_2 y_{12} \quad (10)$$

$$\mathbf{I}_2 = \mathbf{V}_1 y_{21} + \mathbf{V}_2 y_{22} \quad (11)$$

$$\mathbf{V}_2 = -\mathbf{I}_2 Z_L \quad (12)$$

Sustituyendo (12) en (11)

$$\mathbf{V}_1 = \frac{1 + Z_L y_{22}}{y_{21}} \mathbf{I}_2 \quad (13)$$

Sustituyendo (12-13) en (10)
y reordenando términos

$$\frac{\mathbf{I}_2}{\mathbf{I}_1} = \frac{y_{21}}{y_{11}(1 + Z_L y_{22}) - Z_L y_{12} y_{21}}$$