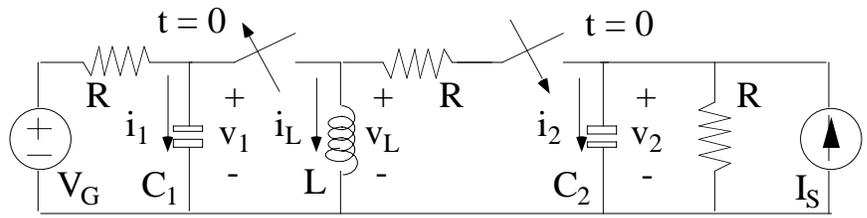


Problema 1

En el circuito de la figura las fuentes son continuas, y son datos las características de todos los elementos.



El circuito ha permanecido mucho tiempo sin cambios antes del cambio de posición de los interruptores. Producido éste, el circuito ya no sufre más cambios. Se pide:

A (1.2 puntos) Hallar v_1 , v_L , i_L y v_2 en los instantes $t = 0^-$, $t = 0^+$ y $t = \infty$.

B (0.9 puntos) Hallar las ecuaciones diferenciales que caracterizan la evolución de v_1 , i_L y v_2 para $t \geq 0$.

C (0.4 puntos) Suponiendo que una de las ecuaciones diferenciales calculadas en el apartado anterior es de la forma

$$LC_2 \frac{d^2 x_j}{dt^2} + \left(RC_2 + \frac{L}{R} \right) \frac{dx_j}{dt} + 2x_j = K, \quad x = i \text{ ó } v, \quad j = L \text{ ó } 2, \quad \text{siendo } RC_2 = \frac{L}{R} = \sqrt{LC_2}$$

demostrar que la respuesta de la parte del circuito que contiene a L y C_2 es subcrítica para $t > 0$.

Apartado A

En régimen permanente continuo las capacidades son circuitos abiertos y la inductancia es un cortocircuito

$$i_1(0^-) = 0 \text{ A} = i_2(0^-), \quad v_L(0^-) = 0 \text{ V}$$

Elementos en paralelo y ecuaciones de nudo

$$\begin{aligned} v_1(0^-) &= v_L(0^-) = 0 \text{ V} \\ i_L(0^-) &= \frac{V_G - v_1(0^-)}{R} - i_1(0^-) = \frac{V_G}{R} \\ v_2(0^-) &= [I_S - i_2(0^-)]R = RI_S \end{aligned}$$

Continuidad de corrientes en inductancias y tensiones en capacidades $v_1(0^+) = v_1(0^-) = 0 \text{ V}$, $i_L(0^+) = i_L(0^-) = \frac{V_G}{R}$, $v_2(0^+) = v_2(0^-) = RI_S$

Ecuación de malla

$$v_L(0^+) = v_2(0^+) - Ri_L(0^+) = RI_S - V_G$$

En régimen permanente continuo las capacidades son circuitos abiertos y la inductancia es un cortocircuito

$$i_1(\infty) = 0 \text{ A} = i_2(\infty), \quad v_L(\infty) = 0 \text{ V}$$

Ecuación de malla

$$v_1(\infty) = V_G - Ri_1(\infty) = V_G$$

Ecuaciones de nudo y de malla	$i_L(\infty) = I_S - \frac{v_2(\infty)}{R} - i_2(\infty)$ $v_2(\infty) = R i_L(\infty) + v_L(\infty)$	$\Rightarrow i_L(\infty) = \frac{I_S}{2}, v_2(\infty) = \frac{R I_S}{2}$
----------------------------------	---	--

Apartado B

Para $t > 0$ se tiene

Ecuación de malla y relación funcional	$RC_1 \frac{dv_1}{dt} + v_1 = V_G \quad (1)$
--	--

Ecuaciones de nudo y de malla y relaciones funcionales	$i_L = I_S - \frac{v_2}{R} - C_2 \frac{dv_2}{dt} \quad (2)$
---	---

$v_2 = R i_L + L \frac{di_L}{dt} \quad (3)$

Sustituyendo (2) en (3),	$LC_2 \frac{d^2 v_2}{dt^2} + \left(RC_2 + \frac{L}{R} \right) \frac{dv_2}{dt} + 2v_2 = R I_S \quad (4)$
--------------------------	--

Sustituyendo (3) en (2),	$LC_2 \frac{d^2 i_L}{dt^2} + \left(RC_2 + \frac{L}{R} \right) \frac{di_L}{dt} + 2i_L = I_S \quad (5)$
--------------------------	--

(1), (4) y (5) son las ecuaciones diferenciales buscadas.

Apartado C

$$a = LC_2, b = RC_2 + \frac{L}{R}, c = 2$$

Ecuación característica

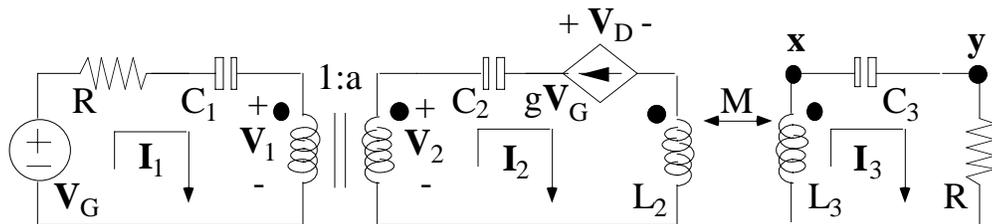
$$\alpha = \frac{b}{2a} = \frac{RC_2 + \frac{L}{R}}{2LC_2}, \omega_0 = \sqrt{\frac{c}{a}} = \sqrt{\frac{2}{LC_2}}$$

Las tres posibles relaciones entre el coeficiente de amortiguamiento y la frecuencia angular de resonancia pueden ser expresadas como

$$\alpha^2 \geq \omega_0^2 \Rightarrow \left(RC_2 + \frac{L}{R} \right)^2 - 8LC_2 \geq 0$$

Teniendo en cuenta la relación indicada en el enunciado entre R , C_2 y L , es evidente que, de las tres relaciones sólo una puede verificarse, y que ésta es justamente la que corresponde a la condición de respuesta subcrítica.

Problema 2



El circuito de la figura, en cuya representación se ha utilizado notación fasorial, funciona en régimen sinusoidal permanente a una frecuencia angular ω .

1 (1.2 puntos) Formulad un sistema algebraico de seis ecuaciones a partir del cual sea posible obtener los valores de \mathbf{I}_1 , \mathbf{I}_2 , \mathbf{I}_3 , \mathbf{V}_1 , \mathbf{V}_2 , y \mathbf{V}_D .

Utilizando los valores $\mathbf{V}_G = j0.5 \text{ V}$, $\omega = 100 \text{ krad/s}$, $a = 0$, $g = 2 \text{ S}$, $R = 0.5 \text{ } \Omega$, $M = 5 \text{ } \mu\text{H}$, $L_2 = 40 \text{ } \mu\text{H}$, $L_3 = 10 \text{ } \mu\text{H}$, $C_1 = 2.5 \text{ } \mu\text{F}$, $C_2 = 2.5 \text{ } \mu\text{F}$, y $C_3 = 10 \text{ } \mu\text{F}$,

2 (0.5 puntos) Obtened las potencias aparente, media y reactiva en la fuente dependiente.

3 (0.8 puntos) Obtened el equivalente de Thèvenin entre \mathbf{x} e \mathbf{y} .

Apartado A

Ecuaciones de malla

$$\mathbf{V}_G = \mathbf{I}_1 \left(R + \frac{1}{j\omega C_1} \right) + \mathbf{V}_1$$

$$\mathbf{V}_2 = \mathbf{I}_2 \left(\frac{1}{j\omega C_2} + j\omega L_2 \right) + \mathbf{V}_D - \mathbf{I}_3 j\omega M$$

$$0 = -\mathbf{I}_2 j\omega M + \mathbf{I}_3 \left(j\omega L_3 + \frac{1}{j\omega C_3} + R \right)$$

Ecuación de la fuente dependiente

$$\mathbf{I}_2 = -g\mathbf{V}_G$$

Ecuaciones del transformador ideal

$$\mathbf{V}_2 = a\mathbf{V}_1, \mathbf{I}_1 = a\mathbf{I}_2$$

Apartado B

$$a = 0 \Rightarrow \mathbf{V}_2 = 0 \text{ V}; \mathbf{I}_2 = -g\mathbf{V}_G = -j \text{ A}$$

$$0 = -\mathbf{I}_2 j\omega M + \mathbf{I}_3 \left(j\omega L_3 + \frac{1}{j\omega C_3} + R \right) \Rightarrow \mathbf{I}_3 = 1 \text{ A}$$

$$\mathbf{V}_2 = \mathbf{I}_2 \left(\frac{1}{j\omega C_2} + j\omega L_2 \right) + \mathbf{V}_D - \mathbf{I}_3 j\omega M \Rightarrow \mathbf{V}_D = j0.5 \text{ V}$$

$$S_D = \frac{\mathbf{V}_D \mathbf{I}_2^*}{2} = -0.25 \text{ VA} \Rightarrow |S_D| = 0.25 \text{ VA}$$

$$P_D = \text{Re}\{S_D\} = -0.25 \text{ W}, Q_D = \text{Im}\{S_D\} = 0 \text{ VAR}$$

Apartado C

La tensión de circuito abierto se calcula con el circuito en las condiciones del apartado anterior. En consecuencia,

$$\mathbf{V}_{Th} = \mathbf{V}_{xy} = \frac{\mathbf{I}_3}{j\omega C_3} = -j \text{ V}$$

Para calcular la corriente de cortocircuito, se sustituye C_3 por dicho cortocircuito.

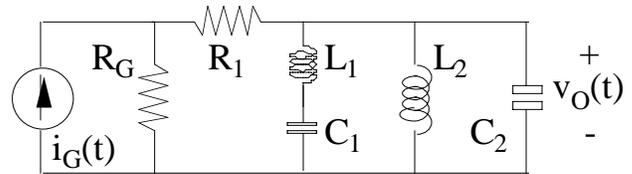
$$\mathbf{I}_2 = -g\mathbf{V}_G = -j \text{ A}$$

$$0 = -\mathbf{I}_2 j\omega M + \mathbf{I}_3 (j\omega L_3 + R) \Rightarrow \mathbf{I}_3 = 0.2 - j0.4 \text{ A} = \mathbf{I}_N$$

$$Z_{Th} = \frac{\mathbf{V}_{Th}}{\mathbf{I}_N} = 2 - j \Omega$$

Problema 3

En el circuito de la figura se suponen conocidos los valores de los elementos pasivos.



Suponiendo que $i_G(t) = I_G \cos(\omega t)$, siendo I_G dato (real y positivo),

A (0.5 puntos) Obtened al menos un valor de la frecuencia de resonancia (suponiendo que haya más de uno) del circuito, que debe ser finito, no nulo y positivo.

B (0.5 puntos) Obtened los valores a los que tienden el módulo y la fase del fasor representativo de la tensión v_O cuando la frecuencia angular toma valores muy elevados.

C (0.5 puntos) Obtened los valores a los que tienden el módulo y la fase del fasor representativo de v_O cuando las inductancias y las capacidades tienen valores muy bajos.

Suponiendo que $i_G(t) = I_1 \cos(\omega_1 t) + I_2 \cos(\omega_2 t)$, $I_1 = I_2 = 1$ A, $\omega_1 = 1$ Mrad/s, $\omega_2 = 1$ krad/s, $R_G = R_1 = 1 \Omega$, $L_1 = 1 \mu\text{H}$, $L_2 = 1$ mH, $C_1 = 1 \mu\text{F}$, y $C_2 = 1$ mF,

D (0.5 puntos) Obtened la tensión $v_O(t)$ cuando sólo está aplicada la excitación de frecuencia angular ω_1 .

E (0.5 puntos) Obtened la tensión $v_O(t)$ cuando sólo está aplicada la excitación de frecuencia angular ω_2 .

F (0.5 puntos) Obtened la tensión $v_O(t)$ cuando están aplicadas simultáneamente ambas excitaciones.

Se recomienda utilizar aproximaciones razonables antes que cálculos exactos.

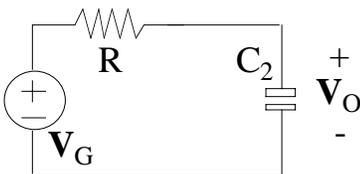
Apartado A

Puede observarse que, si la agrupación L_1 - C_1 está en cortocircuito, este cortocircuito cancela el efecto de L_2 y C_2 , y la fuente ve una impedancia puramente resistiva (R_G en paralelo con R_1).

En consecuencia, una posible frecuencia de resonancia del circuito es la que provoca el cortocircuito en la agrupación indicada. Es decir,

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L_1 C_1}}$$

Apartado B

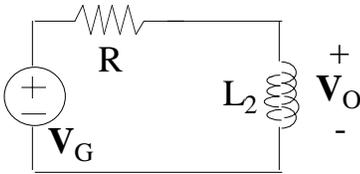


$$V_G = I_G R_G, \quad R = R_G + R_1$$

Para frecuencias muy elevadas, las inductancias y las capacidades tienden a comportarse como circuitos abiertos y cortocircuitos, respectivamente. En consecuencia, el circuito queda en la forma indicada en la figura adjunta, en la que se ha utilizado notación fasorial y se ha hecho una transformación de fuentes.

$$\mathbf{V}_O \approx \frac{\frac{1}{j\omega C_2}}{R + \frac{1}{j\omega C_2}} \mathbf{V}_G \approx \frac{\mathbf{V}_G}{j\omega R C_2} \Rightarrow |\mathbf{V}_O| \rightarrow 0 \text{ V}, \angle \mathbf{V}_O \rightarrow -90^\circ$$

Apartado C

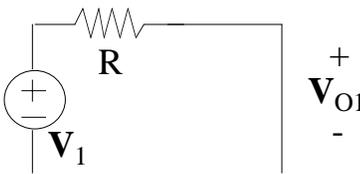


$$\mathbf{V}_G = \mathbf{I}_G R_G, \quad R = R_G + R_1$$

Las inductancias de valores bajos tienden a comportarse como cortocircuitos, en tanto que las capacidades de valores bajos tienden a comportarse como circuitos abiertos. En consecuencia, el circuito queda en la forma indicada en la figura adjunta, en la que se ha utilizado notación fasorial y se ha hecho una transformación de fuentes.

$$\mathbf{V}_O \approx \frac{j\omega L_2}{R + j\omega L_2} \mathbf{V}_G \approx \frac{j\omega L_2 \mathbf{V}_G}{R} \Rightarrow |\mathbf{V}_O| \rightarrow 0 \text{ V}, \angle \mathbf{V}_O \rightarrow 90^\circ$$

Apartado D

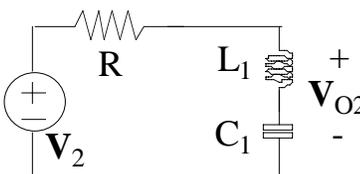


$$\begin{aligned} \mathbf{V}_1 &= \mathbf{I}_1 R_G = 1 \text{ V} \\ R &= R_G + R_1 = 2 \Omega \end{aligned}$$

A la frecuencia ω_1 , L_1 y C_1 están en resonancia, constituyendo un cortocircuito y anulando, por tanto, el efecto de los elementos que están en paralelo con tal agrupación. En consecuencia, el circuito queda en la forma indicada en la figura adjunta, en la que se ha utilizado notación fasorial, verificándose

$$\mathbf{V}_{O1} = 0 \text{ V} \Rightarrow v_{O1}(t) = \text{Re}\left\{\mathbf{V}_{O1} e^{j\omega_1 t}\right\} = 0 \text{ V}$$

Apartado E



$$\begin{aligned} \mathbf{V}_2 &= \mathbf{I}_2 R_G = 1 \text{ V} \\ R &= R_G + R_1 = 2 \Omega \end{aligned}$$

A la frecuencia ω_2 , L_2 y C_2 están en resonancia, constituyendo un circuito abierto, con lo que el circuito queda en la forma indicada en la figura adjunta, en la que se ha utilizado notación fasorial y se verifica

$$\left| \frac{1}{j\omega_2 C_1} \right| = \left| -j10^3 \right| \Omega \gg R = 2 \Omega \gg \left| j\omega_2 L_1 \right| = \left| j10^{-3} \right| \Omega$$

$$\mathbf{V}_{O2} = \frac{j\omega_2 L_1 + \frac{1}{j\omega_2 C_1}}{R + j\omega_2 L_1 + \frac{1}{j\omega_2 C_1}} \mathbf{V}_2 \approx \mathbf{V}_2 = 1 \text{ V} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v_{O2}(t) = \text{Re}\left\{\mathbf{V}_{O2} e^{j\omega_2 t}\right\} = \cos(\omega_2 t) \text{ V}, \omega_2 = 1 \text{ krad/s}$$

Apartado F

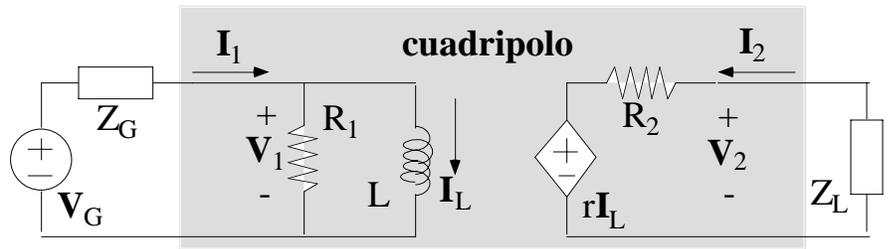
Se aplica el principio de superposición, con lo que

$$v_O(t) = v_{O1}(t) + v_{O2}(t)$$

teniendo $v_{O1}(t)$ y $v_{O2}(t)$ las expresiones indicadas en los apartados D y E, respectivamente.

Problema 4

El circuito de la figura, en cuya representación se ha utilizado notación fasorial, funciona en régimen sinusoidal permanente a una frecuencia angular ω .



- A (0.75 puntos)** Obtened los parámetros de admitancia del cuadripolo.
B (0.75 puntos) Obtened los parámetros híbridos (h) del cuadripolo.
C (0.5 puntos) Obtened el valor de \mathbf{I}_2 en el circuito completo en función de los parámetros de transmisión (abcd) del cuadripolo.

Apartado A

En el circuito se verifican las relaciones (ecuaciones de malla y de nudo)

$$\mathbf{I}_1 = \mathbf{V}_1 \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{j\omega L} \right) \quad (1)$$

$$\mathbf{V}_2 = \mathbf{I}_2 R_2 + r\mathbf{I}_L = \mathbf{I}_2 R_2 + r \frac{\mathbf{V}_1}{j\omega L} \quad (2)$$

Reordenando (2)

$$\mathbf{I}_2 = -\frac{r\mathbf{V}_1}{j\omega R_2 L} + \frac{\mathbf{V}_2}{R_2} \quad (3)$$

Los parámetros de admitancia satisfacen las relaciones

$$\mathbf{I}_1 = \mathbf{V}_1 y_{11} + \mathbf{V}_2 y_{12} \quad (4)$$

$$\mathbf{I}_2 = \mathbf{V}_1 y_{21} + \mathbf{V}_2 y_{22} \quad (5)$$

Comparando (1, 3) y (4-5)

$$y_{11} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{j\omega L}, y_{12} = 0 \text{ S}$$

$$y_{21} = -\frac{r}{j\omega R_2 L}, y_{22} = \frac{1}{R_2}$$

Apartado B

$$\mathbf{V}_1 = \frac{j\omega R_1 L}{R_1 + j\omega L} \mathbf{I}_1 \quad (6)$$

Reordenando (1)
y sustituyendo el resultado en (2)

$$\mathbf{I}_2 = -\frac{rR_1 \mathbf{I}_1}{R_2(R_1 + j\omega L)} + \frac{\mathbf{V}_2}{R_2} \quad (7)$$

Los parámetros híbridos (h)
satisfacen las relaciones

$$\mathbf{V}_1 = \mathbf{I}_1 h_{11} + \mathbf{V}_2 h_{12} \quad (8)$$

$$\mathbf{I}_2 = \mathbf{I}_1 h_{21} + \mathbf{V}_2 h_{22} \quad (9)$$

Comparando (6-7) y (8-9)

$$h_{11} = \frac{j\omega R_1 L}{R_1 + j\omega L}, h_{12} = 0$$
$$h_{21} = -\frac{rR_1}{R_2(R_1 + j\omega L)}, h_{22} = \frac{1}{R_2}$$

Apartado C

$$\mathbf{V}_G = \mathbf{I}_1 Z_G + \mathbf{V}_1 \quad (10)$$

En el circuito se verifican las relaciones

$$\mathbf{V}_1 = \mathbf{V}_2 a - \mathbf{I}_2 b \quad (11)$$

$$\mathbf{I}_1 = \mathbf{V}_2 c - \mathbf{I}_2 d \quad (12)$$

$$\mathbf{V}_2 = -\mathbf{I}_2 Z_L \quad (13)$$

Sustituyendo (13) en (12)

$$\mathbf{I}_1 = -\mathbf{I}_2 (Z_L c + d) \quad (14)$$

Sustituyendo (13) en (11)

$$\mathbf{V}_1 = -\mathbf{I}_2 (Z_L a + b) \quad (15)$$

Sustituyendo (14-15) en (10)

$$\mathbf{I}_2 = -\frac{\mathbf{V}_G}{Z_G(Z_L c + d) + Z_L a + b}$$