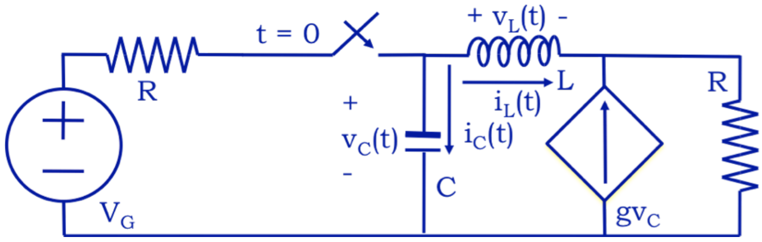
Análisis de redes. Examen de junio de 2011

PROBLEMA 1 (2.5 puntos).

En el circuito de la figura, la fuente independiente es continua. Sabiendo que

V_G = 1 V, g = 1 S, C = 1 F

¿qué valores han de tener R y L para que el coeficiente de amortiguamiento valga 1 s^{-1} y la frecuencia de resonancia 1/(2π) Hz?



Para t ≥ 0 s, el circuito se caracteriza por las ecuaciones

$$\frac{V_G - v_C}{R} = C\frac{dv_C}{dt} + i_L \quad (1) \qquad v_C = L\frac{di_L}{dt} + (i_L + gv_C)R \quad (2)$$

Despejando i_L de (1) y sustituyendo en (2),

$$LC\frac{d^2v_C}{dt^2} + \left(\frac{L}{R} + RC\right)\frac{dv_C}{dt} + (2 - gR)v_C = V_G \qquad (3)$$

Despejando v_C de (2) y sustituyendo en (1),

$$LC\frac{d^2i_L}{dt^2} + \left(\frac{L}{R} + RC\right)\frac{di_L}{dt} + (2 - gR)i_L = \frac{(1 - gR)V_G}{R} \qquad (4)$$

De (3) o (4) se obtienen los coeficientes de la ecuación característica.

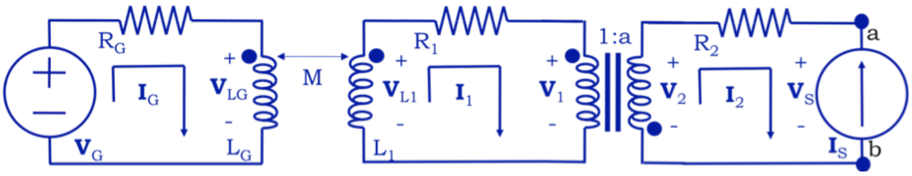
$$a = LC \qquad b = \frac{L}{R} + RC \qquad c = 2 - gR$$

$$\left.\begin{array}{r} 1\ s^{-1} = \alpha = \dfrac{b}{2a} \\ 2\pi\left(\dfrac{1}{2\pi}\right) rad/s = \omega_0 = \sqrt{\dfrac{c}{a}} \end{array}\right| \Rightarrow \left|\begin{array}{ll} R = 1\ \Omega & L = 1\ H \\ R = \dfrac{2}{3}\ \Omega & L = \dfrac{4}{3}\ H \end{array}\right.$$

PROBLEMA 2
(2.5 puntos).

a) Escribid tres ecuaciones en las que las únicas incógnitas sean $\mathbf{I}_G$, $\mathbf{I}_1$ e $\mathbf{I}_2$ (**1 punto**).

b) Obtened el equivalente de Thévenin entre **a** y **b** (**1.5 puntos**).



$\mathbf{V}_G$ = 8 V, $\mathbf{I}_S$ = 1 A, a = 2, ωM = 0.5 Ω,
R_G = 1 Ω, R_1 = 0.2 Ω, R_2 = 0.7 Ω, ωL_G = 1 Ω, ωL_1 = 1.125 Ω

Apartado a

$$\mathbf{I}_2 = -\mathbf{I}_S \qquad \mathbf{I}_1 = -a\mathbf{I}_2 \qquad \mathbf{V}_G = \mathbf{I}_G(R_G + j\omega L_G) - \mathbf{I}_1 j\omega M$$

Apartado b

$$\mathbf{V}_G = \mathbf{I}_G(R_G + j\omega L_G) - \mathbf{I}_1 j\omega M \quad \Rightarrow \quad \mathbf{I}_G = \frac{\mathbf{V}_G + a\mathbf{I}_S j\omega M}{R_G + j\omega L_G}$$

$$0 = -\mathbf{I}_G j\omega M + \mathbf{I}_1(j\omega L_1 + R_1) + \mathbf{V}_1 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{V}_1 = \frac{\mathbf{V}_G j\omega M}{R_G + j\omega L_G} - a\mathbf{I}_S\left[\frac{(\omega M)^2}{R_G + j\omega L_G} + j\omega L_1 + R_1\right]$$

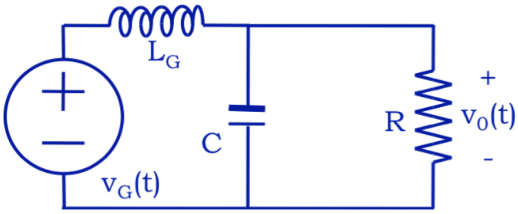
$$\mathbf{V}_2 = -a\mathbf{V}_1 = -\frac{a\mathbf{V}_G j\omega M}{R_G + j\omega L_G} + a^2\mathbf{I}_S\left[\frac{(\omega M)^2}{R_G + j\omega L_G} + j\omega L_1 + R_1\right]$$

$$\mathbf{V}_2 = \mathbf{I}_2 R_2 + \mathbf{V}_S \quad \Rightarrow \quad \mathbf{V}_{Th} = \mathbf{V}_S = -\frac{a\mathbf{V}_G j\omega M}{R_G + j\omega L_G} + a^2\mathbf{I}_S\left[\frac{(\omega M)^2}{R_G + j\omega L_G} + j\omega L_1 + R_1\right] + \mathbf{I}_S R_2 = -2 \text{ V}$$

$$Z_{Th} = \left[\frac{(\omega M)^2}{R_G + j\omega L_G} + j\omega L_1 + R_1\right]a^2 + R_2 = 2 + j4 \ \Omega$$

PROBLEMA 3 (1.5 puntos).

a) Siendo $V_G(s)$ y $V_0(s)$ las transformadas de Laplace, respectivamente, de $v_G(t)$ y $v_0(t)$, obtened la función de transferencia, $H(s) = V_0(s)/V_G(s)$, del circuito de la figura (**0.75 puntos**).



$R = 1\,\Omega \qquad L_G = 5\text{ H} \qquad C = 0.2\text{ F}$

b) Suponiendo que la función de transferencia es

$$H(s) = \frac{V_0(s)}{V_G(s)} = \frac{1}{s^2 + 3s + 2}$$

obtened la función de ponderación (**0.75 puntos**).

Apartado a

$$H(s) = \frac{V_0(s)}{V_G(s)} = \frac{\dfrac{R\dfrac{1}{sC}}{R + \dfrac{1}{sC}}}{sL_G + \dfrac{R\dfrac{1}{sC}}{R + \dfrac{1}{sC}}} = \frac{\dfrac{R}{sRC + 1}}{sL_G + \dfrac{R}{sRC + 1}} = \frac{1}{s^2 L_G C + s\dfrac{L_G}{R} + 1} = \frac{1}{s^2 + 5s + 1}$$

Apartado b

$$H(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{1}{s^2 + 3s + 2} = \frac{1}{(s+1)(s+2)} = \frac{K_1}{s+1} + \frac{K_2}{s+2}$$

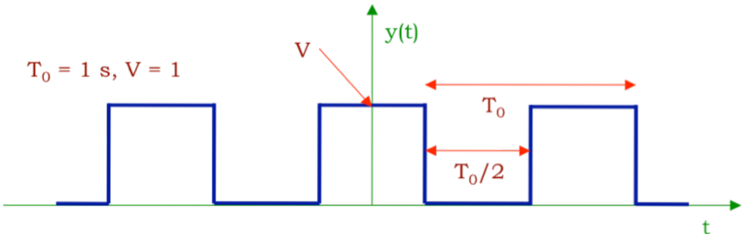
$$K_1 = \left[\frac{(s+1)N(s)}{(s+1)(s+2)}\right]_{s=-1} = 1 \qquad K_2 = \left[\frac{(s+2)N(s)}{(s+1)(s+2)}\right]_{s=-2} = -1$$

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\} - \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+2}\right\} = e^{-t} - e^{-2t}$$

PROBLEMA 4 (2 puntos).

a) Obtened la serie de Fourier (forma trigonométrica alternativa) correspondiente a la función periódica mostrada en la figura (**1 punto**).

b) Suponiendo que la figura queda reducida al pulso central (la función es nula para cualquier otro valor de t), obtened su transformada de Fourier (**1 punto**).



Apartado a

$$a_v = \frac{2}{T_0}\int_0^{T_0/2} y(t)dt = \frac{2}{T_0}\int_0^{T_0/4} Vdt + \frac{2}{T_0}\int_{T_0/4}^{T_0/2} 0dt = \frac{V}{2}$$

$$a_k = \frac{4}{T_0}\int_0^{T_0/2} y(t)\cos\left(\frac{2\pi kt}{T_0}\right)dt = \frac{4}{T_0}\int_0^{T_0/4} V\cos\left(\frac{2\pi kt}{T_0}\right)dt + \frac{4}{T_0}\int_{T_0/4}^{T_0/2} 0\cos\left(\frac{2\pi kt}{T_0}\right)dt = \frac{2V}{k\pi}\operatorname{sen}\left(\frac{k\pi}{2}\right)$$

$b_k = 0$, porque y(t) es una función par

$$y(t) = a_v + \sum_{k=1}^{\infty}\sqrt{a_k^2 + b_k^2}\cos\left[\frac{2\pi kt}{T_0} - \operatorname{arctg}\left(\frac{b_k}{a_k}\right)\right]$$

Apartado b

$$y(t)\ \text{par} \Rightarrow \left| \begin{array}{c} A(\omega) = 2\int_0^{\infty} y(t)\cos(\omega t)dt = 2\int_0^{T_0/4} V\cos(\omega t)dt = \frac{2V}{\omega}\operatorname{sen}\left(\frac{\omega T_0}{4}\right) \\ B(\omega) = 0 \\ F(\omega) = A(\omega) - jB(\omega) = A(\omega) \end{array} \right.$$

PROBLEMA 5 (1.5 puntos).

a) Indicad de que tipo es un filtro cuya característica de transferencia es (**0.5 puntos**)

$$H(s) = \frac{1}{s+1}$$

b) Indicad a qué valor tiende el módulo del filtro indicado en el apartado anterior cuando la frecuencia angular toma valores muy bajos (**0.5 puntos**).

c) Indicad a qué valor tiende la fase del filtro indicado en el primer apartado cuando la frecuencia angular toma valores muy elevados (**0.5 puntos)**.

Apartado a

$$H(j\omega) = \{H(s)\}_{s=j\omega} = \frac{1}{1+j\omega} \quad \Rightarrow \quad |H(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1+\omega^2}} \quad \Rightarrow \quad \left| \begin{array}{c} \omega \to 0\ \text{rad/s} \ \Rightarrow \ |H(j\omega)| \to 1 \\ \omega \to \infty\ \text{rad/s} \ \Rightarrow \ |H(j\omega)| \to 0 \\ \omega\ \text{intermedia} \ \Rightarrow \ |H(j\omega)| \to \text{valor intermedio} \end{array} \right| \quad \Rightarrow \quad \text{filtro paso bajo}$$

Apartado b

Como se indicó en el apartado anterior,

$$\omega \to 0\ \text{rad/s} \quad \Rightarrow \quad |H(j\omega)| \to 1$$

Apartado c

$$H(j\omega) = \{H(s)\}_{s=j\omega} = \frac{1}{1+j\omega} \quad \Rightarrow \quad \angle H(j\omega) = -\,\text{arctg}\,\omega \quad \Rightarrow \quad \omega \to \infty\,\text{rad/s} \quad \Rightarrow \quad \angle H(j\omega) \to -90\,°$$