Tema II:
Régimen transitorio

Regímenes permanente y transitorio
Comportamiento de los elementos reactivos en transitorio
Regimen transitorio entre dos estados permanentes continuos
Condiciones iniciales y finales
Circuitos con un solo elemento reactivo; constante de tiempo
Circuitos con dos elementos reactivos; tipos de respuestas
Circuitos con variables parcialmente acopladas
Circuitos con cambios sucesivos

- Los conceptos expuestos en este tema son aplicables a cualquier circuito lineal funcionando en régimen transitorio.
- Sin embargo, para facilitar la exposición, en la mayoría de los ejemplos se considerarán únicamente circuitos funcionando en régimen transitorio entre dos estados permanentes continuos.

Respuesta de un circuito: tensión, corriente, potencia o energía en uno o más elementos como consecuencia de la aplicación de una o más excitaciones.

Régimen permanente: las características de la excitación (fuentes) y la respuesta no cambian durante un periodo prolongado de tiempo.

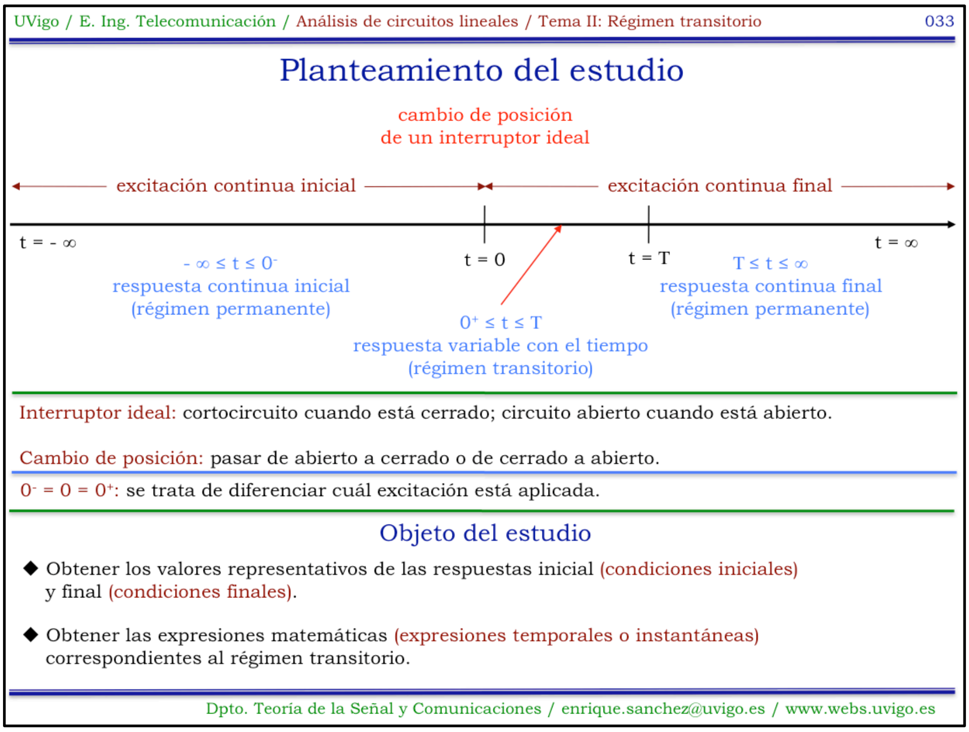
Régimen transitorio: las características de la excitación y la respuesta cambian en el transcurso de un intervalo de tiempo.
Suele suponerse que el cambio en la excitación es brusco (intervalo nulo) y que se realiza mediante la apertura o el cierre de un interruptor, mientras que el de la respuesta es gradual.
Suelen representar el paso de un régimen permanente a otro.

En circuitos lineales la respuesta en régimen permanente es de la misma naturaleza que la excitación.

La respuesta en régimen transitorio es de distinta naturaleza; generalmente, varía con el tiempo.

Estudiaremos regímenes permanentes con excitación continua (temas I y II) y sinusoidal (tema III); otras excitaciones (tema VI).

Régimen transitorio provocado por el cambio de un interruptor que fuerza el paso de una excitación continua a otra distinta (tema II).

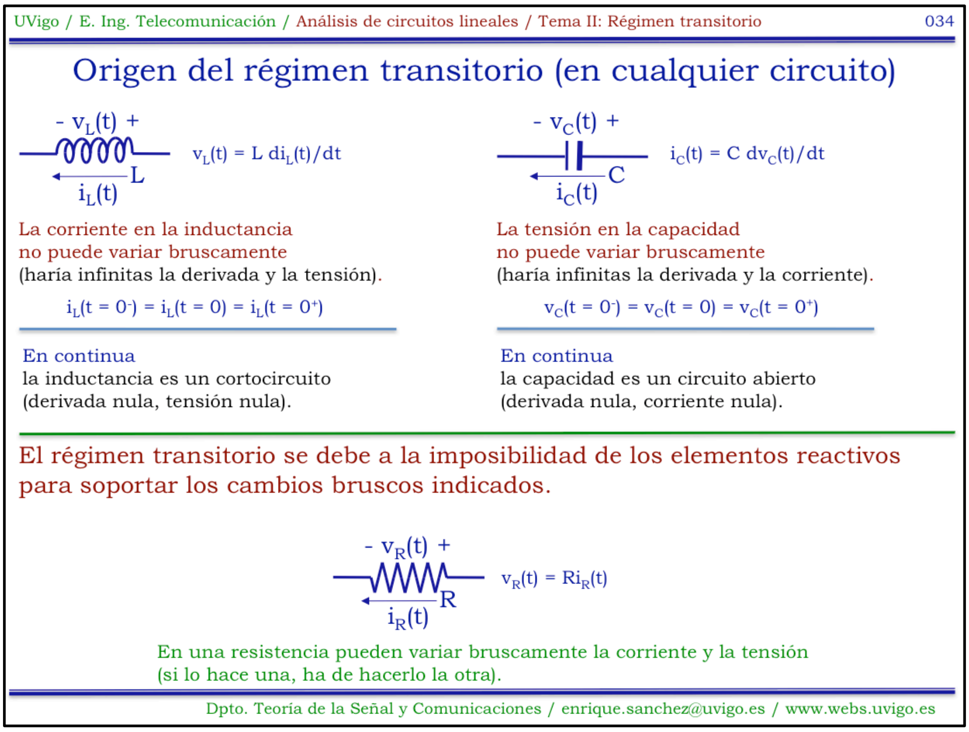


Se denomina *expresión temporal* o *expresión instantánea* a una expresión matemática en la que el tiempo es la variable independiente. Es decir, si se desea conocer el valor de la corriente (o el de la tensión o el de la potencia) en un instante dado, basta sustituir el valor del tiempo en la expresión temporal o instantánea correspondiente.

En todo momento se supone que el cambio de posición del interruptor es brusco; es decir, se produce en un intervalo nulo de tiempo.

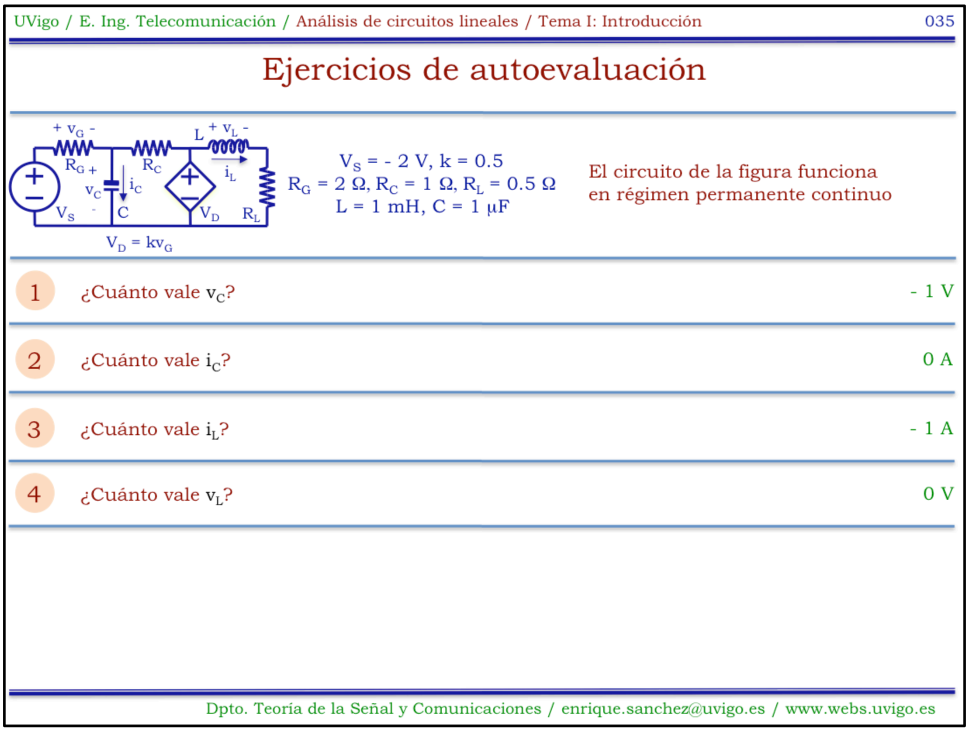
En régimen permanente continuo las expresiones temporales o instantáneas se reducen a la indicación de los valores constantes (válidos para cualquier instante) de las variables de interés.

Obsérvese que el instante $t=0^-$ s corresponde a una situación en la que está aplicada la excitación continua inicial y el circuito se encuentra en régimen permanente continuo; es equivalente a cualquier otro instante en el intervalo $-\infty \leq t \leq 0^-$. Por su parte, el instante $t=0^+$ s corresponde a una situación en la que está aplicada la excitación continua final y el circuito se encuentra en régimen transitorio (de hecho, es el momento en el que se inicia dicho régimen).



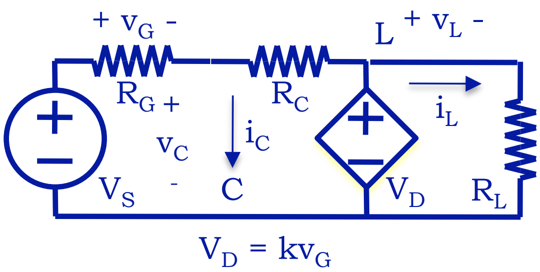
La tensión en la inductancia y la corriente en la capacidad sí pueden variar bruscamente (es decir, en un tiempo nulo).

En un circuito cuyos elementos pasivos son únicamente resistencias no hay régimen transitorio al cambiar la excitación; la respuesta se adapta instantáneamente a los cambios de ésta. En otras palabras, la causa de que aparezca un régimen transitorio al variar las condiciones de la excitación (variación originada por el cambio de posición de uno o más interruptores) es el comportamiento de los elementos reactivos, comportamiento resumido en sus respectivas relaciones funcionales.



Puesto que la excitación es continua, la respuesta también lo será (ya que no se indica nada acerca de cambios de posición de interruptores se supone que el circuito lleva mucho tiempo en el estado indicado).

En régimen permanente continuo la inductancia se comporta como si fuera un cortocircuito y la capacidad, como si fuera un circuito abierto. Es decir, el circuito queda como se indica a continuación. Como puede observarse, i_C=0 A (la corriente en un circuito abierto es nula) y v_L=0 V (la tensión en un cortocircuito es nula).



$$v_G = i_G R_G = \frac{V_S - V_D}{R_G + R_C} R_G = \frac{V_S - kv_G}{R_G + R_C} R_G = \frac{V_S - ki_G R_G}{R_G + R_C} R_G \quad \Rightarrow$$

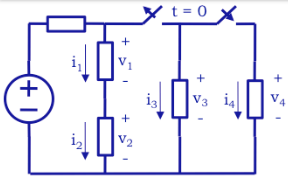
$$\Rightarrow \quad i_G R_G \left(1 + \frac{kR_G}{R_G + R_C}\right) = \frac{V_S R_G}{R_G + R_C} \quad \Rightarrow \quad i_G = \frac{V_S}{R_G(1+k) + R_C} = -0.5 \text{ A} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad v_C = V_S - i_G R_G = -1 \text{ V}$$

$$i_L = \frac{V_D}{R_L} = \frac{kv_G}{R_L} = \frac{ki_G R_G}{R_L} = -1 \text{ A}$$

UVigo / E. Ing. Telecomunicación / Análisis de circuitos lineales / Tema I: Introducción 036

Ejercicios de autoevaluación



El circuito de la figura funciona en régimen permanente continuo. Se desea averiguar la naturaleza de los elementos a partir de los resultados indicados.

	0^- s	0^+ s
i_1	1 A	1 A
v_1	0 V	0 V
i_2	1 A	1 A
v_2	1 V	1 V
i_3	0 A	- 1 A
v_3	1 V	1 V
i_4	0 A	1 A
v_4	0 V	1 V

1 inductancia

2 resistencia

3 capacidad

4 resistencia

Dpto. Teoría de la Señal y Comunicaciones / enrique.sanchez@uvigo.es / www.webs.uvigo.es

1. **Solución**.
La corriente no es nula en 0^-, por lo que no puede ser una capacidad, que sería un circuito abierto en continua. Tampoco puede ser una resistencia porque hay una tensión nula con una corriente no nula en 0^- y 0^+, lo cual violaría la ley de Ohm. Luego es una inductancia.

2. **Solución**.
La corriente no es nula en 0^-, por lo que no puede ser una capacidad, que sería un circuito abierto en continua. Tampoco puede ser una inductancia porque hay una tensión no nula en 0^-, lo cual va en contra de que la inductancia es un cortocircuito en continua. Luego es una resistencia.

3. **Solución**.
No puede ser una resistencia porque hay una tensión no nula con una corriente nula en 0^-. Tampoco puede ser una inductancia porque hay una tensión no nula en 0^-. Luego es una capacidad.

4. **Solución**.
No puede ser una capacidad porque hay un salto brusco de tensión en t=0 s. Tampoco puede ser una inductancia porque hay un salto brusco de corriente en el mismo instante. Luego es una resistencia.

Procedimiento para analizar un circuito sometido a un cambio brusco entre dos regímenes permanentes continuos

INTERVALO	EXCITACIÓN	RESPUESTA	v_L	i_C	v_C	i_L
$-\infty \leq t \leq 0^-$	continua inicial	permanente continua inicial	0 V para todo t	0 A para todo t	Hay que determinar sus valores (constantes para todo t)	
$0^+ \leq t \leq T$	continua final	transitoria	Hay que determinar sus expresiones temporales		Hay que determinar sus expresiones temporales de forma que $v_C(0^+) = v_C(0^-)$, $i_L(0^+) = i_L(0^-)$	
$T \leq t \leq \infty$	continua final	permanente continua final	0 V para todo t	0 A para todo t	Hay que determinar sus valores (constantes para todo t)	

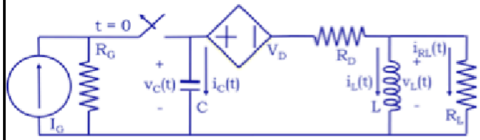
La determinación de cualquier magnitud correspondiente a cualquier elemento requiere el cálculo previo del comportamiento de los elementos reactivos, ya que son éstos quienes condicionan la evolución del circuito.

En principio, los valores (constantes) de las variables durante la excitación continua inicial pueden ser determinados en cualquier instante comprendido entre $-\infty$ y 0 s; sin embargo, es habitual calcularlos en el instante 0^- s. Análogamente, los valores de las variables una vez alcanzado el régimen permanente continuo final pueden ser hallados en cualquier instante comprendido entre T e ∞ s; sin embargo, es habitual obtenerlos en el instante $t=\infty$ (de esta manera, aunque se desconozca el valor de T, se tiene la seguridad de que el circuito se encuentra en el régimen permanente continuo final).

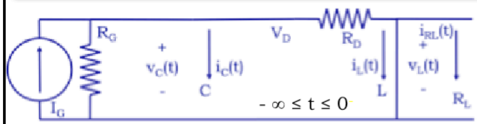
La indicación de la tabla acerca del procedimiento para determinar $v_C(t)$ e $i_L(t)$ en el intervalo $0^+ \leq t \leq T$ hace referencia a las condiciones (*condiciones de continuidad*, expuestas anteriormente) relativas a que la tensión en una capacidad y la corriente en una inductancia no pueden variar bruscamente.

UVigo / E. Ing. Telecomunicación / Análisis de circuitos lineales / Tema II: Régimen transitorio 038

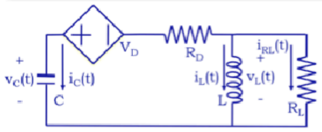
Determinación de condiciones iniciales y finales (ejemplo)



- La fuente independiente es continua.
- $V_D = ri_{RL}(t)$.
- Son datos los valores de todos los elementos y el de r.

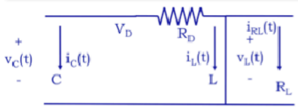


- Inductancia = cortocircuito
  $v_L = 0$ V, $i_{RL} = v_L/R_L = 0$ A, $V_D = ri_{RL} = 0$ V
- Capacidad = circuito abierto
  $i_C = 0$ A
- Haciendo cálculos:
  $i_L = R_G I_G/(R_G + R_D)$, $v_C = R_D R_G I_G/(R_G + R_D)$



$t = 0^+$

- Continuidad de la corriente en la inductancia:
  $i_L(0^+) = i_L(0^-) = R_G I_G/(R_G + R_D)$
- Continuidad de la tensión en la capacidad:
  $v_C(0^+) = v_C(0^-) = R_D R_G I_G/(R_G + R_D)$
- Haciendo cálculos:
  $v_L(0^+) = 0$ V, $i_C(0^+) = - R_G I_G/(R_G + R_D)$



$t = \infty$

- Inductancia = cortocircuito
  $v_L = 0$ V, $i_{RL} = v_L/R_L = 0$ A, $V_D = ri_{RL} = 0$ V
- Capacidad = circuito abierto
  $i_C = 0$ A
- Haciendo cálculos:
  $i_L = 0$ A, $v_C = 0$ V

Dpto. Teoría de la Señal y Comunicaciones / enrique.sanchez@uvigo.es / www.webs.uvigo.es

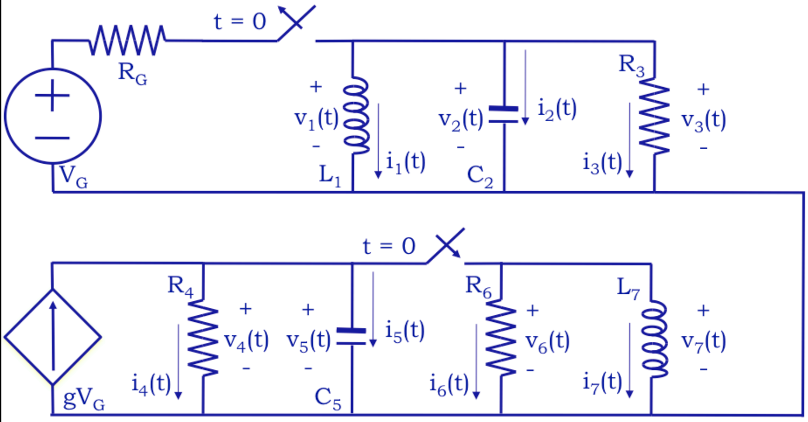
Obsérvese que, antes de la apertura del interruptor, el circuito queda reducido a un divisor de corriente, con lo que puede aplicarse la expresión correspondiente presentada en el tema I. Obsérvese también que la tensión en la capacidad es igual a las que caen en ambas resistencias y en el generador (los tres elementos están en paralelo), con lo que dicha magnitud puede calcularse multiplicando la corriente que circula por una resistencia (por ejemplo, i_L) por esta resistencia (R_D).

En $t=0^+$ se tiene (aplicando la ley de Kirchhoff de las tensiones en las mallas)

$$v_C(0^+) = ri_{RL}(0^+) + R_D i_L(0^+) + v_L(0^+) = v_L(0^+)\left(1 + \frac{r}{R_L}\right) + R_D i_L(0^+)$$

En general, salvo que se indique explícitamente que existe energía almacenada en la capacidad o la inductancia, los valores de todas las variables en régimen permanente continuo son nulos si los elementos correspondientes están desconectados de la excitación.

Ejemplo de cálculo de condiciones iniciales y finales



- La fuente independiente es continua.
- Datos: las características de todos los elementos del circuito.
- Incógnitas: $v_3(0^+)$, $i_5(0^+)$, $i_7(\infty)$,
  variación de energía en L_7 entre t = 0 y t = ∞.

Ejemplo de cálculo de condiciones iniciales y finales (continuación)

Se igualan las tensiones de elementos en paralelo.
La tensión en C_2 no cambia bruscamente.
Para t<0 s, L_1 es un cortocircuito porque está en régimen permanente continuo.

$$v_3(0^+) = v_2(0^+) = v_2(0^-) = v_1(0^-) = 0 \text{ V}$$

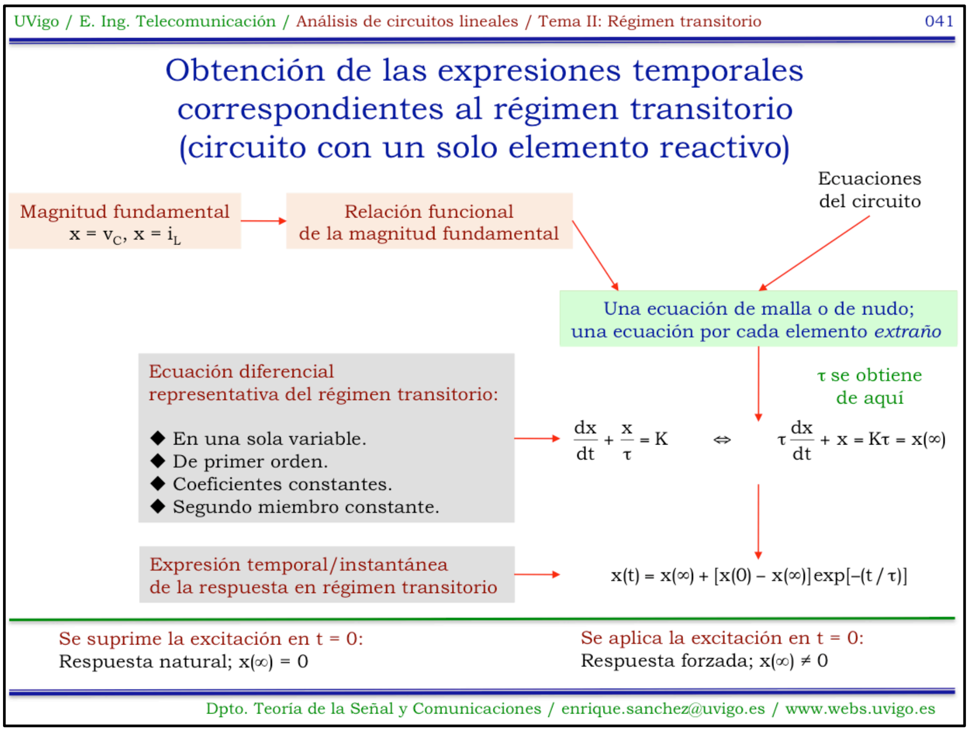
Se aplica la ley de Kirchhoff de los nudos.
Se igualan las tensiones de elementos en paralelo.
La tensión en C_5 y la corriente en L_7 no cambian bruscamente.
Para t<0 s, C_5 es un circuito abierto y L_7 es un cortocircuito porque están en régimen permanente continuo.

$$\begin{aligned} gV_G &= i_4(0^+) + i_5(0^+) + i_6(0^+) + i_7(0^+) = \\ &= \frac{v_4(0^+)}{R_4} + i_5(0^+) + \frac{v_6(0^+)}{R_6} + i_7(0^+) = \\ &= \frac{v_5(0^+)}{R_4} + i_5(0^+) + \frac{v_5(0^+)}{R_6} + i_7(0^+) = \\ &= \frac{v_5(0^-)}{R_4} + i_5(0^+) + \frac{v_5(0^-)}{R_6} + i_7(0^-) = \\ &= \frac{gV_GR_4}{R_4} + i_5(0^+) + \frac{gV_GR_4}{R_6} + 0 \quad \Rightarrow \quad i_5(0^+) = -\frac{gV_GR_4}{R_6} \end{aligned}$$

Se aplica la ley de Kirchhoff de los nudos.
Se igualan las tensiones de elementos en paralelo.
Para t=∞ s, C_5 es un circuito abierto y L_7 es un cortocircuito porque están en régimen permanente continuo.

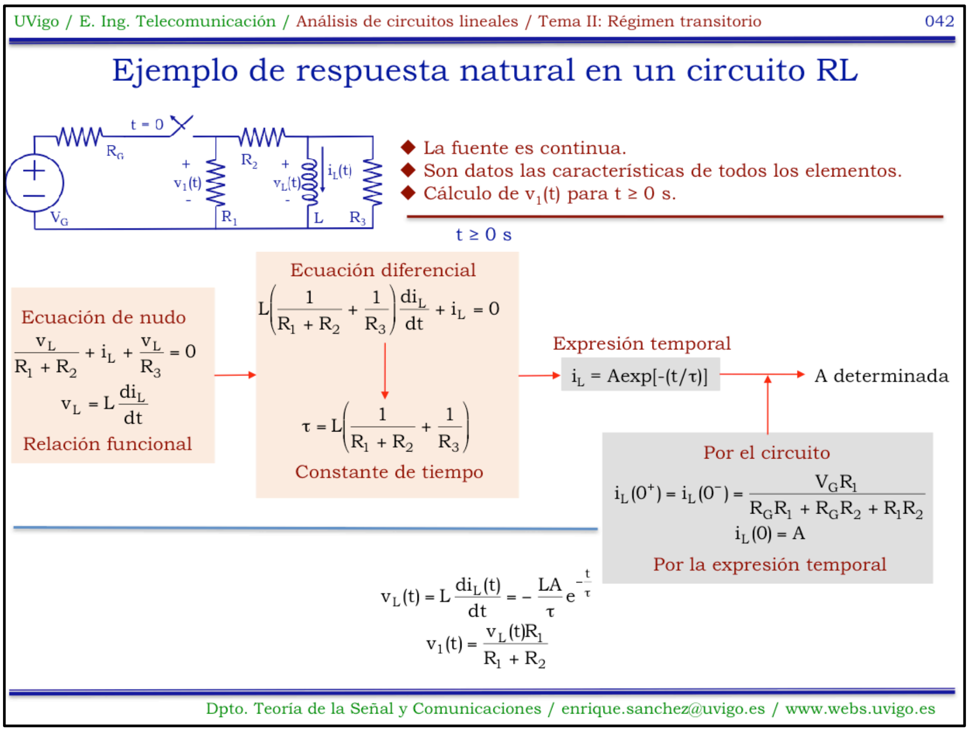
$$\begin{aligned} gV_G &= i_4(\infty) + i_5(\infty) + i_6(\infty) + i_7(\infty) = \\ &= \frac{v_4(\infty)}{R_4} + i_5(\infty) + \frac{v_6(\infty)}{R_6} + i_7(\infty) = \\ &= \frac{v_7(\infty)}{R_4} + i_5(\infty) + \frac{v_7(\infty)}{R_6} + i_7(\infty) = i_7(\infty) \end{aligned}$$

$$w_{L7} = \int_0^\infty p_{L7}(t)dt = \int_0^\infty i_7(t)L_7\frac{di_7(t)}{dt}dt = \frac{L_7}{2}\left[i_7^2(\infty) - i_7^2(0)\right] = \frac{L_7(gV_G)^2}{2}$$



Obsérvese que la magnitud fundamental es la que no puede variar bruscamente en el único elemento reactivo presente en el circuito.

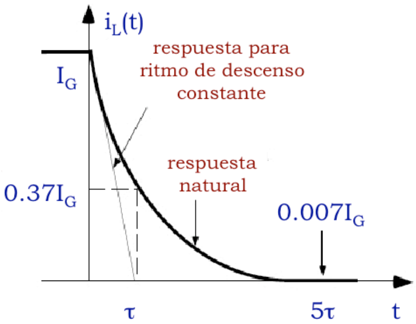
El procedimiento sigue siendo válido si hay más de un elemento reactivo, pero todos han de ser de la misma naturaleza (capacidades o inductancias) y han de poder ser agrupados (en serie o en paralelo) hasta quedar reducidos a un único elemento equivalente. Éste es el que se utiliza para aplicar el procedimiento.



La expresión correspondiente a $i_L(0^-)$ se obtiene observando que la corriente proporcionada por la fuente circula por R_G en serie con la agrupación en paralelo de R_1 y R_2. Obsérvese que la inductancia se comporta como un cortocircuito en $t=0^-$, con lo que la diferencia de tensión entre sus bornas es nula. La corriente en R_3 es nula, ya que está dada por el cociente entre dicha diferencia de tensión (puesto que la inductancia y R_3 están en paralelo, habrá la misma caída de tensión en ambas) y el valor de la resistencia. En otras palabras, un cortocircuito elimina cualquier otro elemento pasivo que tenga en paralelo (no ocurre lo mismo con las otras resistencias puesto que hay una caída de tensión adicional en R_2) o, lo que es lo mismo, no circula ninguna corriente por un elemento pasivo que esté en paralelo con un cortocircuito.

Para calcular $v_1(t)$ se ha considerado el divisor de tensión formado por la inductancia, que aporta la tensión $v_L(t)$, y las resistencias R_1 y R_2.

Constante de tiempo en circuitos con un solo elemento reactivo



representación gráfica de la respuesta natural de un circuito con un solo elemento reactivo

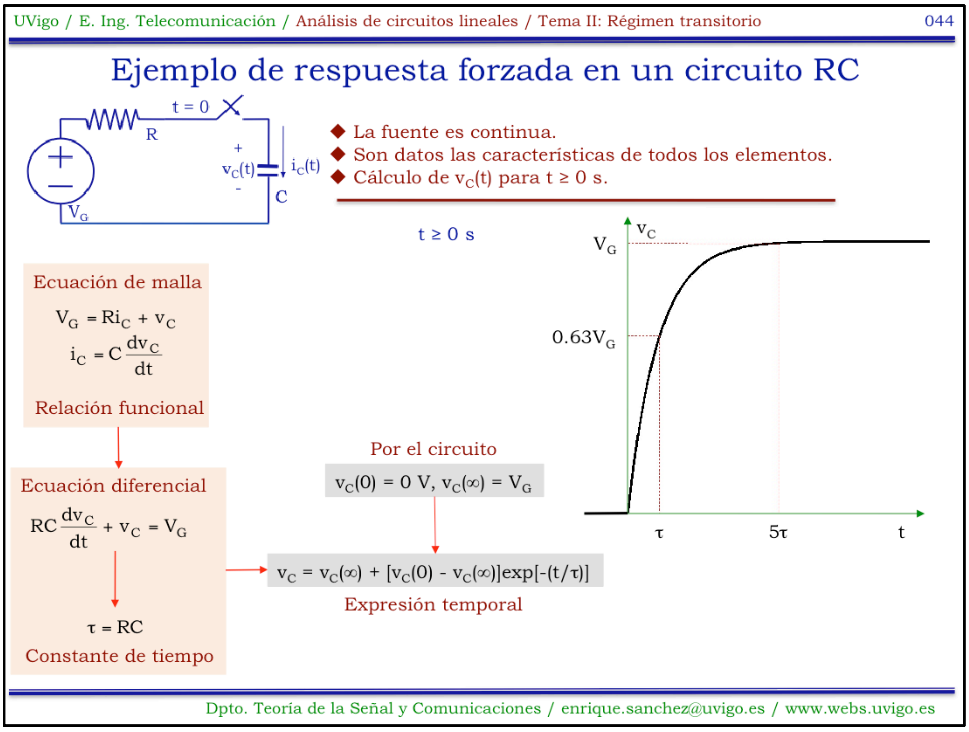
$i_L(t) = I_G\exp[-(t/\tau)]$

constante de tiempo

A la vista de la gráfica, puede decirse que el régimen transitorio dura aproximadamente cinco constantes de tiempo.

Aunque hubiera un transitorio en t = - ∞, éste se extinguiría lo suficientemente rápido como para suponer que el circuito inicia entonces un régimen permanente continuo.

La duración del régimen transitorio es lo que en diapositivas anteriores fue designado con la letra T.

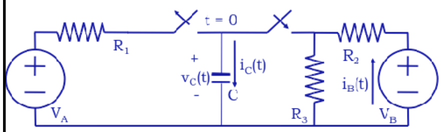


Obsérvese que la constante de tiempo también rige la variación con el tiempo de la magnitud de interés en el caso de la respuesta forzada. De hecho, las curvas mostradas en esta diapositiva y en la anterior son simétricas. El valor final de la variable se alcanza (el régimen transitorio acaba) para un tiempo aproximadamente igual a cinco veces la constante de tiempo.

El único aspecto reseñable es que, para un tiempo igual a la constante de tiempo, el valor de la magnitud en el caso de la respuesta forzada no es un 37 % del inicial, sino el complementario (63 % del valor final; 0.63 = 1 – 0.37).

Obsérvese que, si se vuelve a abrir el interruptor antes de que la tensión en la capacidad alcance su valor final, se tendría una exponencial decreciente (respuesta natural) a partir del valor que hubiera alcanzado la magnitud al cambiar de posición el interruptor.

Ejemplo de respuesta en un circuito RC



- Las fuentes son continuas.
- Son datos las características de todos los elementos.
- Cálculo de $p_B(t)$ para $t \geq 0$ s.

$t \geq 0$ s

Ecuación de nudo

$$\frac{V_B - v_C}{R_2} = i_C + \frac{v_C}{R_3}$$

$$i_C = C\frac{dv_C}{dt}$$

Relación funcional

Ecuación diferencial

$$\frac{CR_2R_3}{(R_2 + R_3)}\frac{dv_C}{dt} + v_C = \frac{V_BR_3}{R_2 + R_3}$$

$$\tau = \frac{CR_2R_3}{R_2 + R_3}$$

Constante de tiempo

Expresión temporal

$$v_C = B + (A - B)e^{-\frac{t}{\tau}}$$

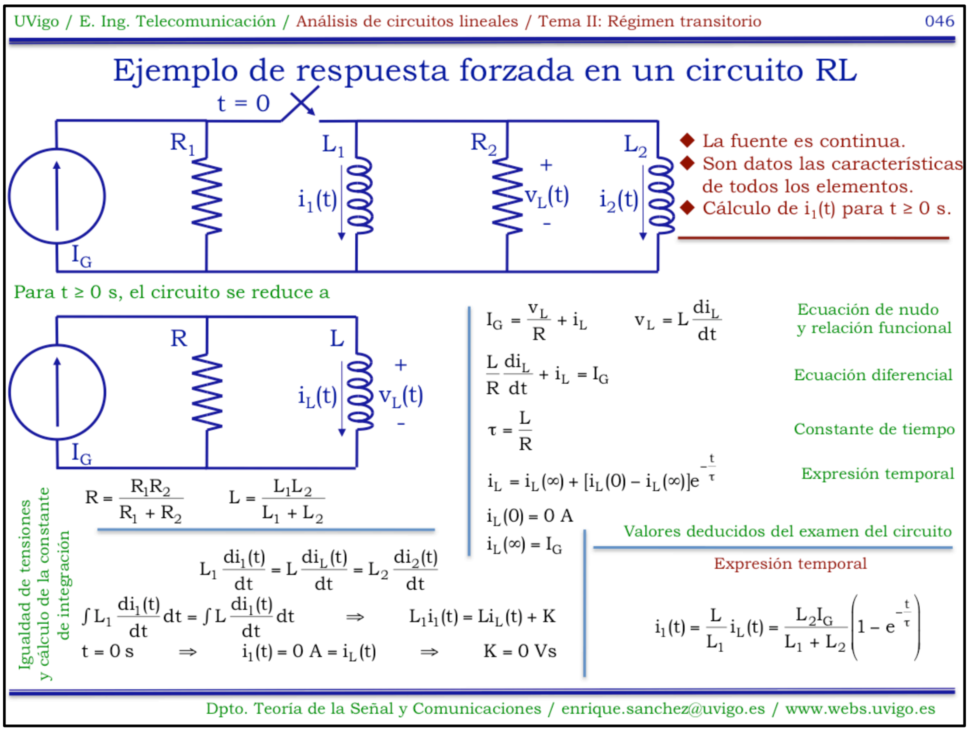
→ A, B determinadas

Por el circuito

$$B = v_C(\infty) = \frac{V_BR_3}{R_2 + R_3}$$

$$A = v_C(0) = V_A \text{ V}$$

$$p_B = -V_Bi_B = -V_B\frac{(V_B - v_C)}{R_2}$$



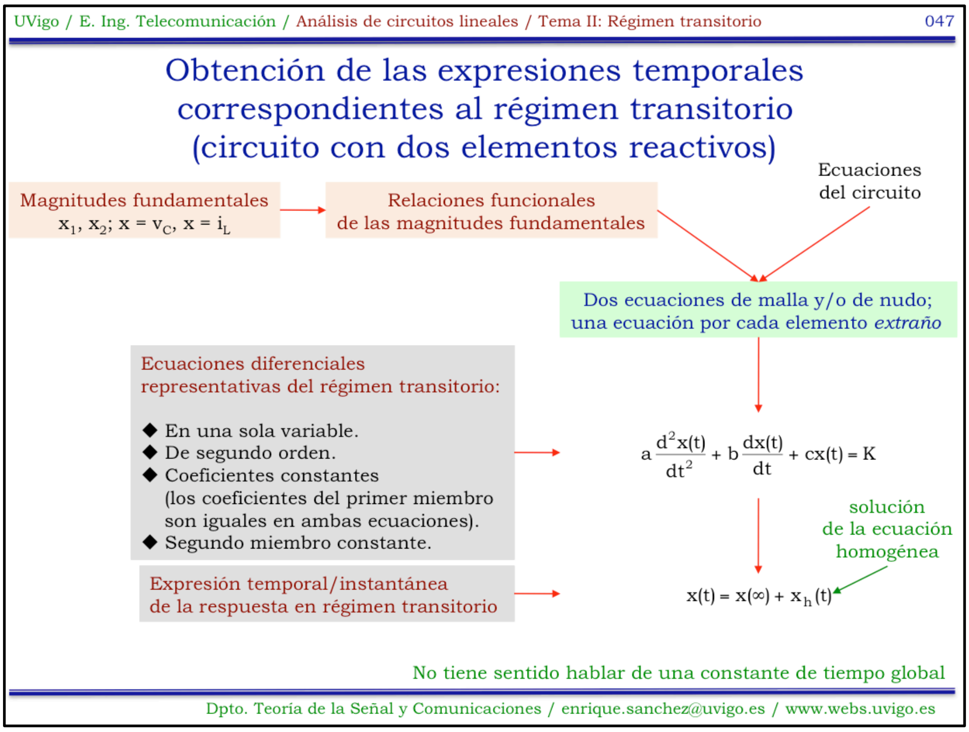
Todos los elementos soportan la misma diferencia de tensión porque están en paralelo.

Al agrupar en paralelo elementos de idéntica naturaleza el circuito se reduce a otro con un solo elemento reactivo.

La ecuación diferencial se obtiene sustituyendo la relación funcional en la ecuación de nudo.

La constante de tiempo se obtiene comparando la ecuación diferencial con la forma genérica correspondiente a circuitos con un solo elemento reactivo.

La constante de integración (que es el resultado de agrupar las constantes correspondientes a las dos integrales) surge de imponer la condición de igualdad de tensiones. En su determinación se utilizan valores nulos para las dos corrientes, ya que éstas son iguales a los valores que tenían en 0^- (la corriente en la inductancia no puede variar bruscamente) y en esas condiciones estaban desconectadas de la excitación. K se obtiene finalmente utilizando valores conocidos previamente.



Los elementos reactivos pueden ser dos inductancias, dos capacidades o una capacidad y una inductancia. En todo caso, siempre se está haciendo referencia a elementos equivalentes, resultantes de agrupar en serie o en paralelo elementos de idéntica naturaleza.

Los coeficientes del primer miembro de ambas ecuaciones diferenciales son idénticos (salvo en circuitos con elementos parcialmente acoplados; véase más adelante) y sus valores dependen de los de los elementos pasivos y de los correspondientes a las fuentes dependientes. Los valores de las fuentes independientes no influyen en tales coeficientes. Por esto se dice que la respuesta del circuito es única; es decir, el primer miembro de la ecuación diferencial es siempre el mismo, con independencia de cuál sea el elemento reactivo al que se haga referencia.

La constante que figura en el segundo miembro depende de los valores de las fuentes independientes y puede ser distinta de una a otra ecuación diferencial.

Es inmediato deducir que, si sigue aumentando el número de elementos reactivos considerados, la situación se generaliza: tres ecuaciones de circuito, tres ecuaciones diferenciales de tercer orden, etcétera. Lo único que cambia es la solución matemática de las ecuaciones diferenciales.

Solución de la ecuación homogénea

Ecuación diferencial correspondiente a una variable (cualquiera) → $a\frac{d^2x(t)}{dt^2} + b\frac{dx(t)}{dt} + cx(t) = K$

Coeficiente de amortiguamiento → $\alpha\,[s^{-1}] = \frac{b}{2a}$

Ecuación homogéna → $a\frac{d^2x(t)}{dt^2} + b\frac{dx(t)}{dt} + cx(t) = 0$

Frecuencia angular de resonancia → $\omega_0\,[\text{rad} \times s^{-1} = s^{-1}] = \sqrt{\frac{c}{a}}$

Ecuación característica → $as^2 + bs + c = 0$

Raíces de la ecuación característica

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = s_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$$

Tipos de respuestas

◆ El mismo para todas las variables.
◆ Sólo dependen de los elementos pasivos y las fuentes dependientes.

Supercrítica (sobreamortiguada)
◆ $s_{1,2}$ reales, $s_1 \neq s_2$.
◆ $s_{1,2} \leq 0$ ($\alpha > \omega_0$).

$x_h(t) = Ae^{s_1 t} + Be^{s_2 t}$

Crítica (amortiguada)
◆ $s_{1,2}$ reales, $s_1 = s_2$.
◆ $s_{1,2} \leq 0$ ($\alpha = \omega_0$).

$x_h(t) = Ate^{-\alpha t} + Be^{-\alpha t}$

Subcrítica (subamortiguada)
◆ $s_{1,2}$ complejas, $s_1 = s_2^*$.
◆ $\alpha < \omega_0$.

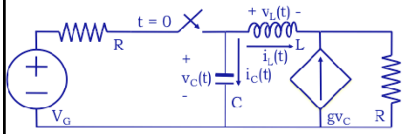
$x_h(t) = Ae^{-\alpha t}\cos(\omega_d t) + Be^{-\alpha t}\mathrm{sen}(\omega_d t)$

$\omega_d = +\sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$

Las raíces reales y las partes reales de las raíces complejas han de ser negativas; de lo contrario los términos exponenciales podrían hacerse infinitos, lo cual carece de sentido físico. Esta condición se cumple siempre, ya que se ha impuesto (tema I) la exigencia de que los elementos pasivos tengan valores positivos, a menos que los parámetros correspondientes a las fuentes dependientes determinen lo contrario; esta situación, que es posible en la práctica, queda fuera de los límites marcados para este curso.

Las raíces de la ecuación característica tienen dimensiones de s^{-1}. Por tanto puede suponerse que el circuito está caracterizado por dos constantes de tiempo, iguales a los inversos de ambas raíces. En consecuencia son aplicables las consideraciones indicadas para circuitos con un solo elemento reactivo (duración del régimen transitorio, por ejemplo) tomando como constante de tiempo efectiva la de mayor valor de las dos.

Ejemplo de respuesta en un circuito con dos elementos reactivos



- La fuente independiente es continua.
- Son datos las características de todos los elementos.
- Ecs. diferenciales de v_C e i_L para $t \geq 0$ s.

$t \geq 0$ s

Ecuación de nudo

(1) $$\frac{V_G - v_C}{R} = i_C + i_L$$

(2) $$v_C = v_L + (i_L + gv_C)R$$

Ecuación de malla

Relaciones funcionales

(3) $$v_L = L\frac{di_L}{dt}$$

(4) $$i_C = C\frac{dv_C}{dt}$$

- Despejando i_L de (1)
- Utilizando (4)

(5) $$i_L = \frac{V_G}{R} - \frac{v_C}{R} - C\frac{dv_C}{dt}$$

- Sustituyendo (5) en (2)
- Utilizando (3)

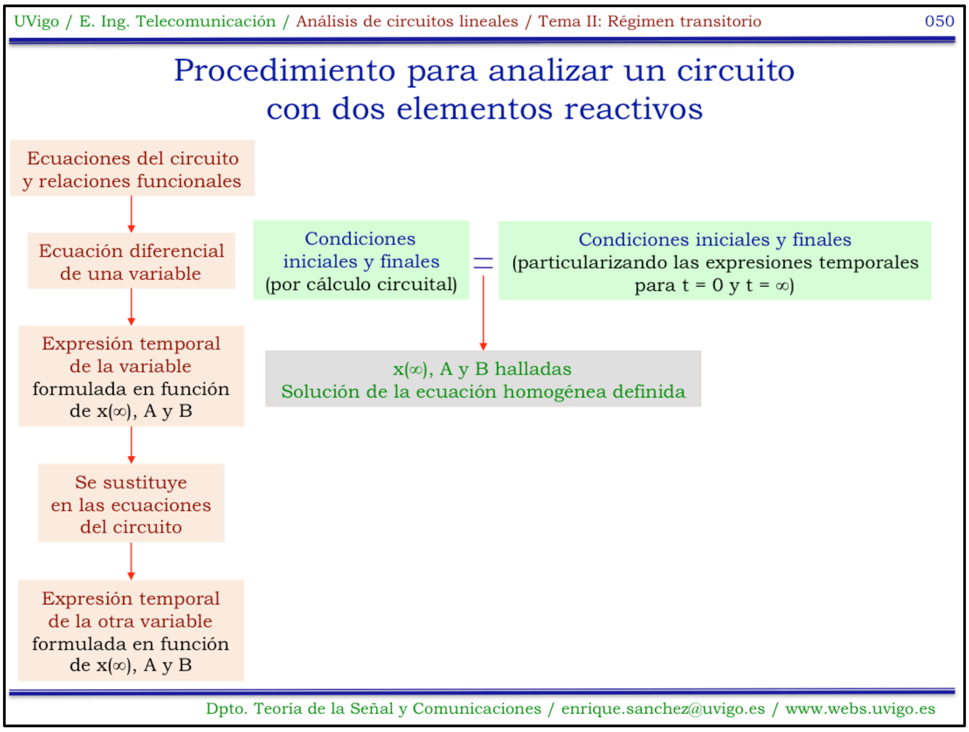
(6) $$LC\frac{d^2v_C}{dt^2} + \left(\frac{L}{R} + RC\right)\frac{dv_C}{dt} + (2 - gR)v_C = V_G$$

- Despejando v_C de (2)
- Sustituyendo el resultado en (1)
- Utilizando (4)

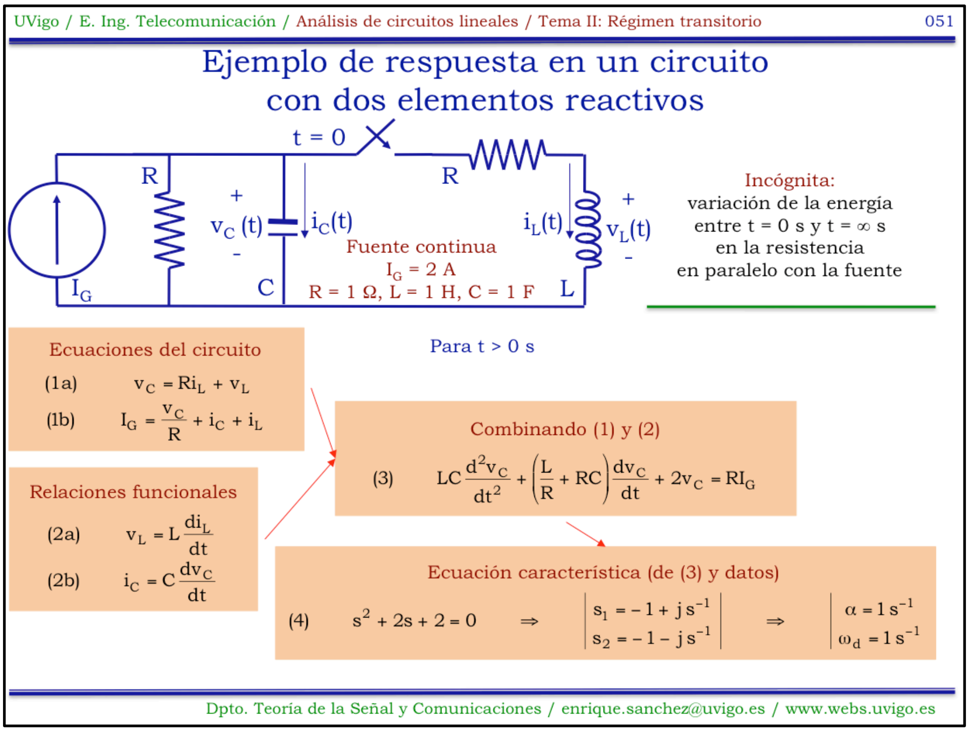
(7) $$LC\frac{d^2i_L}{dt^2} + \left(\frac{L}{R} + RC\right)\frac{di_L}{dt} + (2 - gR)i_L = \frac{(1 - gR)V_G}{R}$$

- Coeficientes primer miembro iguales (> 0).
- Para determinar el tipo de respuesta, hay que saber los valores de los elementos pasivos y la fuente dependiente.

Los coeficientes del primer miembro de la ecuación diferencial correspondiente a una variable han de ser positivos a fin de garantizar que la parte real de las raíces de la ecuación característica no es positiva.



Recuérdese que la expresión temporal buscada es la suma del valor de la variable correspondiente a $t=\infty$ y la solución de la ecuación homogénea, que también es una expresión temporal, con lo que no puede prescindirse del primer sumando en la aplicación de este procedimiento.



(3) se obtiene utilizando primero las relaciones funcionales y, a continuación, despejando i_L de (1b) y sustituyendo el resultado en (1a)

Obsérvese que ω_d coincide con la parte imaginaria de las raíces de la ecuación característica.

Ejemplo de respuesta en un circuito con dos elementos reactivos (continuación)

Expresiones temporales

(5a)
$$v_C = v_C(\infty) + Ae^{-\alpha t}\cos(\omega_d t) + Be^{-\alpha t}\mathrm{sen}(\omega_d t) = v_C(\infty) + Ae^{-t}\cos(t) + Be^{-t}\mathrm{sen}(t)$$

(5b)
$$i_L = I_G - \frac{v_C}{R} - C\frac{dv_C}{dt} =$$
$$= I_G - \frac{v_C(\infty)}{R} + Ae^{-\alpha t}\left[\left(\alpha C - \frac{1}{R}\right)\cos(\omega_d t) + \omega_d C\,\mathrm{sen}(\omega_d t)\right] + Be^{-\alpha t}\left[\left(\alpha C - \frac{1}{R}\right)\mathrm{sen}(\omega_d t) - \omega_d C\cos(\omega_d t)\right] =$$
$$= 2 - v_C(\infty) + Ae^{-t}\mathrm{sen}(t) - Be^{-t}\cos(t)$$

Determinación de las constantes

Del circuito		De (5)		
$RI_G = 2$ V	$v_C(0)$	$v_C(\infty) + A$	$\Rightarrow$	$v_C(\infty) = 1$ V
0 A	$i_L(0)$	$2 - v_C(\infty) - B$		$A = 1$ V
$\frac{RI_G}{2} = 1$ V	$v_C(\infty)$	$v_C(\infty)$		$B = 1$ V

Los valores identificados como *Del circuito* se obtienen examinando directamente el circuito; los marcados como *De (5)*, particularizando la citada expresión para los instantes especificados. Se obtiene un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas; resolviéndolo, se hallan los valores de las constantes.

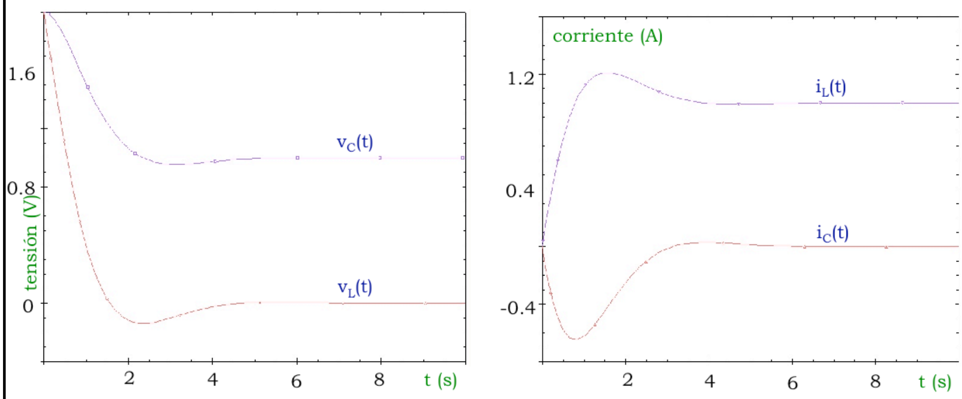
Ejemplo de respuesta en un circuito con dos elementos reactivos (continuación)

$$v_C(t) = 1 + e^{-t}\cos(t) + e^{-t}\mathrm{sen}(t)\ \mathrm{V}$$

$$i_L(t) = 1 - e^{-t}\cos(t) + e^{-t}\mathrm{sen}(t)\ \mathrm{A}$$

$$w_R = \int_0^\infty p_R(t)dt = \int_0^\infty \frac{v_C^2(t)}{R}dt = \int_0^\infty \left[1 + e^{-t}\cos(t) + e^{-t}\mathrm{sen}(t)\right]^2 dt$$

t en s



UVigo / E. Ing. Telecomunicación / Análisis de circuitos lineales / Tema I: Introducción 054

Ejercicios de autoevaluación

El régimen transitorio para t > 0 s de un circuito está caracterizado por la ecuación diferencial

$$LC\left(\frac{r}{R_L}+1\right)\frac{d^2 i_L}{dt^2}+R_D C\frac{di_L}{dt}+i_L=0$$

$R_D = 8\ \Omega$, $R_L = 1\ \Omega$, $r = 1\ \Omega$, $L = 8$ H, $C = 1$ F

1. ¿Cuál es el rango de posibles valores de r? — $> -R_L$
2. Con los datos del enunciado, ¿cuánto valen el coeficiente de amortiguamiento y la frecuencia angular de resonancia? — $\alpha = 0.25\ s^{-1} = \omega_0$
3. Con los datos del enunciado, ¿cuánto valen las raíces de la ecuación característica? — $-0.25\ s^{-1}$ (raíz doble)
4. Si las raíces de la ecuación característica son $s_1 = -1\ s^{-1}$ y $s_2 = -0.16\ s^{-1}$ ¿cuánto valen el coeficiente de amortiguamiento y la frecuencia angular de resonancia? — $\alpha = 0.58\ s^{-1}$, $\omega_0 = 0.4\ s^{-1}$

Dpto. Teoría de la Señal y Comunicaciones / enrique.sanchez@uvigo.es / www.webs.uvigo.es

1. **Solución**.
   Si $r \le -R_L$, el coeficiente que multiplica a la derivada segunda será nulo o negativo, con lo que la situación debería ser abordada de otra forma.

2. **Solución**.

$$a = LC\left(\frac{r}{R_L}+1\right) = 16\ s^{-2} \qquad b = R_D C = 8\ s^{-1} \qquad c = 1$$

$$\alpha = \frac{b}{2a} = \qquad 0.25\ s^{-1} \qquad = \sqrt{\frac{c}{a}} = \omega_0$$

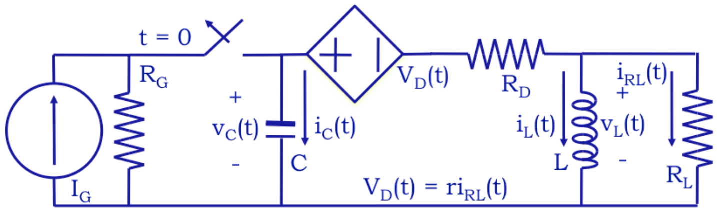
3. **Solución**.

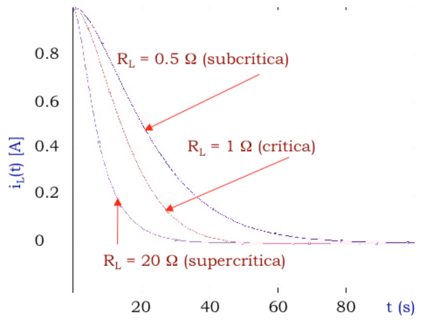
$$s_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2-\omega_0^2} = -0.25\ s^{-1}$$

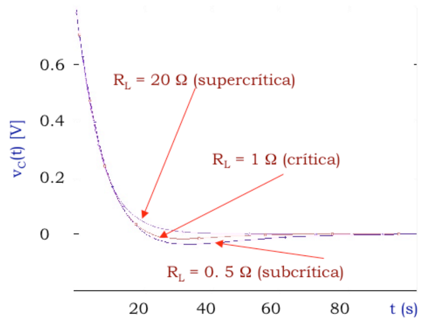
4. **Solución**.

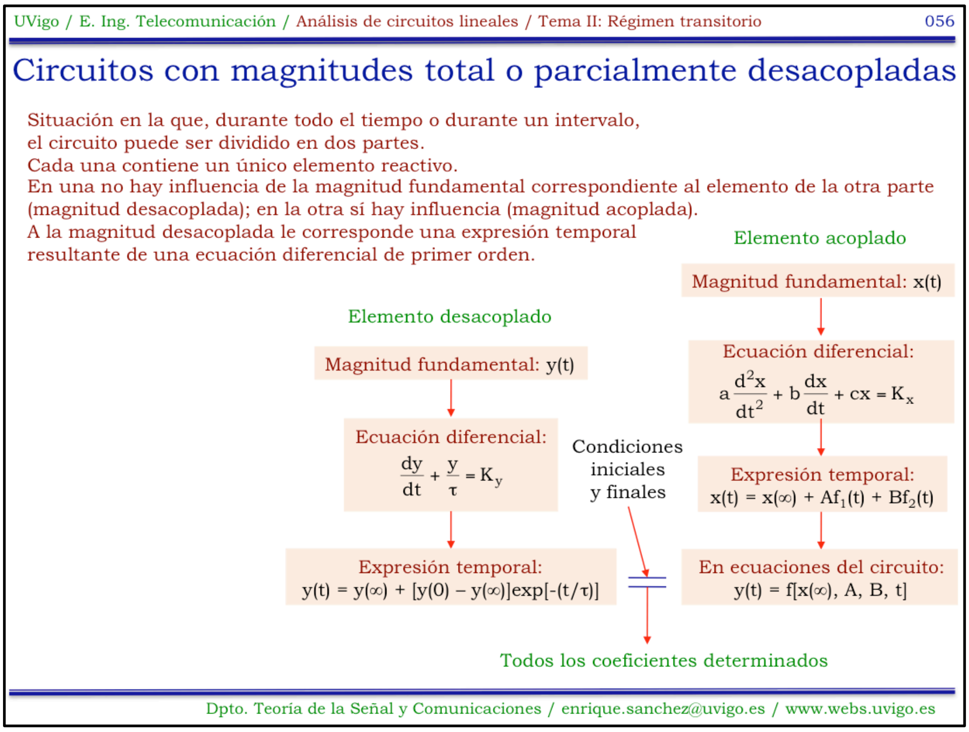
$$\left.\begin{aligned} s_1 &= -\alpha + \sqrt{\alpha^2-\omega_0^2} \\ s_1 &= -\alpha - \sqrt{\alpha^2-\omega_0^2} \end{aligned}\right| \quad \Rightarrow \quad \left|\begin{aligned} \alpha &= -\left(\frac{s_1+s_2}{2}\right) = 0.58\ s^{-1} \\ \omega_0 &= \sqrt{s_1 s_2} = 0.4\ s^{-1} \end{aligned}\right.$$

Ejemplos de respuestas



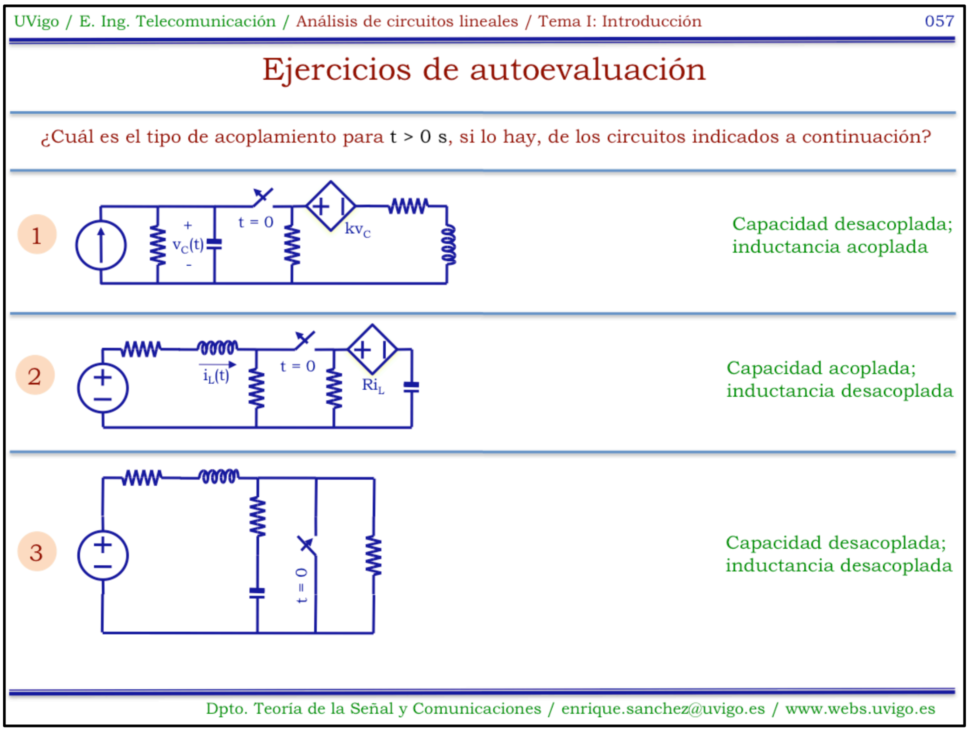






Los elementos total o parcialmente desacoplados suelen presentarse en circuitos en los que existe algún tipo de separación bien definida en dos partes, de modo que sería más correcto decir que se están analizando simultáneamente dos circuitos distintos.

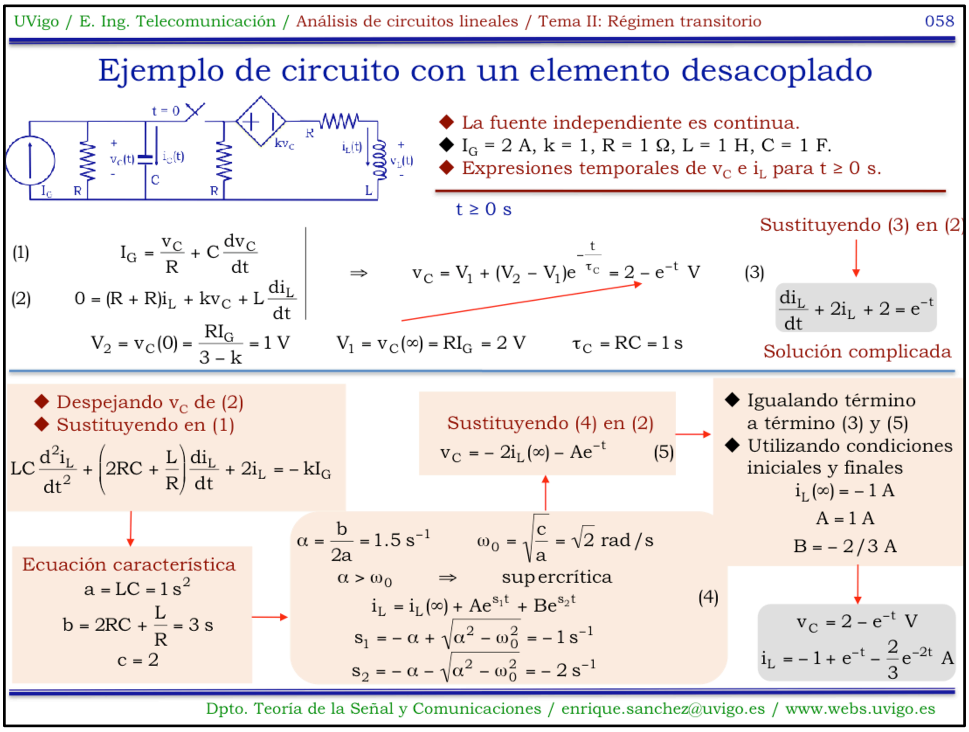
Un cortocircuito o una fuente de tensión independiente conectados directamente entre dos nudos (la rama que los une no contiene otros elementos) separan el circuito en otros dos, estando cada uno de ellos a uno de los lados del par de nudos.



1. **Solución**.
   El comportamiento de la capacidad sólo está determinado por la fuente y la resistencia a las que está conectada; es decir, está desacoplada. En el comportamiento de la inductancia influye la capacidad a través de la fuente dependiente; es decir, está acoplada. El circuito está parcialmente acoplado (desacoplado).

2. **Solución**.
   El comportamiento de la inductancia sólo está determinado por la fuente y las resistencias a las que está conectada; es decir, está desacoplada. En el comportamiento de la capacidad influye la inductancia a través de la fuente dependiente; es decir, está acoplada. El circuito está parcialmente acoplado (desacoplado).

3. **Solución**.
   El cortocircuito impone una tensión nula en el nudo esencial superior, con lo que la inductancia forma parte de un circuito en el que figuran la fuente, una resistencia serie y la conexión a tierra a través del cortocircuito. Por su parte, la suma de las caídas de tensión en la capacidad y la resistencia que está en serie con ella ha de ser nula, con independencia de lo que ocurra en la inductancia. Es decir, se trata de un circuito completamente desacoplado.



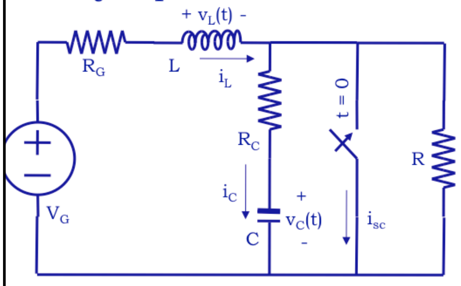
El valor de B se obtiene comparando el valor de $i_L(0)$ que se obtiene sustituyendo t=0 en (4) con el que se deduce del examen del circuito. En este se verifica

$$t = 0^- \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{|l} i_C(0^-) = 0 \text{ A} \\ v_L(0^-) = 0 \text{ V} \end{array}$$

$$I_G = i_C(0^-) + \frac{v_C(0^-)}{R} + \frac{v_C(0^-)}{R} + i_L(0^-) \qquad -kv_C(0^-) = (R + R)i_L(0^-) + v_L(0^-)$$

$$i_L(0^-) = i_L(0) = i_L(0^+) = -\frac{2}{3} \text{ A}$$

Ejemplo de circuito con dos elementos desacoplados



- La fuente independiente es continua.
- Expresión temporal de $i_{sc}(t)$ para $t \geq 0$ s.

V_G = 2 V, R_G = 2 Ω
R_C = R = 1 Ω, L = 1 H, C = 0.5 F

UVigo / E. Ing. Telecomunicación / Análisis de circuitos lineales / Tema II: Régimen transitorio 060

Ejemplo de circuito con dos elementos desacoplados (continuación)

Para t > 0 s

$$v_C + R_C C \frac{dv_C}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad \left| \begin{array}{l} v_C(t) = v_C(\infty) + \left[v_C(0) - v_C(\infty)\right] e^{-t/\tau_C} \\ \tau_C = R_C C = 0.5\text{ s} \\ v_C(0) = \dfrac{RV_G}{R_G + R} = \dfrac{2}{3}\text{ V} \\ v_C(\infty) = 0\text{ V} \\ v_C(t) = \dfrac{2e^{-2t}}{3}\text{ V (t en s)} \end{array} \right.$$

$$V_G = R_G i_L + L\frac{di_L}{dt} \quad \Rightarrow \quad \left| \begin{array}{l} i_L(t) = i_L(\infty) + \left[i_L(0) - i_L(\infty)\right] e^{-t/\tau_L} \\ \tau_L = \dfrac{L}{R_G} = 0.5\text{ s} \\ i_L(0) = \dfrac{V_G}{R_G + R} = \dfrac{2}{3}\text{ A} \\ i_L(\infty) = \dfrac{V_G}{R_G} = 1\text{ A} \\ i_L(t) = 1 - \dfrac{e^{-2t}}{3}\text{ A (t en s)} \end{array} \right.$$

$$i_{sc}(t) = i_L(t) - C\frac{dv_C(t)}{dt} = 1 + \frac{e^{-2t}}{3}\text{ A (t en s)}$$

Dpto. Teoría de la Señal y Comunicaciones / enrique.sanchez@uvigo.es / www.webs.uvigo.es

Al tener en cuenta que la tensión ha de ser nula en el nudo superior del cortocircuito resultan las dos ecuaciones diferenciales mostradas en la diapositiva. Como puede observarse, se trata de ecuaciones de primer orden, con coeficientes constantes y segundo miembro constante, por lo que se resuelven como se indicó anteriormente.

La tensión inicial en la capacidad es igual a la que hay en la resistencia que está en paralelo con el cortocircuito (no conectado antes de t=0 s) porque la corriente que circula por ella es nula. Dicha tensión es la correspondiente a un divisor de tensión, formado por R_G y R (la inductancia es un cortocircuito en la situación considerada). La tensión final en la capacidad es nula, ya que ha de coincidir con la del cortocircuito (de nuevo, téngase en cuenta que no circula corriente por dicho elemento).

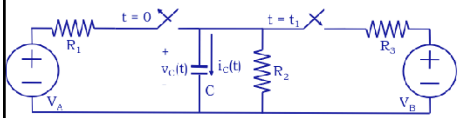
La corriente inicial en la inductancia es la que circula por la malla formada por la fuente, la propia inductancia (un cortocircuito) y R_G y R. La corriente final en la inductancia es la necesaria para que toda la tensión de la fuente caiga en R_G, dada la condición que impone el cortocircuito.

Obsérvese que, en el cálculo final de la corriente en el cortocircuito, no se tiene en cuenta la que circula por la resistencia que está en paralelo con dicho elemento. Dicha corriente es nula, porque la tensión en la resistencia, impuesta por el cortocircuito que tiene en paralelo, también lo es.

Circuitos con cambios sucesivos (uno o más interruptores cambian en 0, t_1, t_2, …, t_n)

- Hay un juego de expresiones temporales para cada intervalo t_i-t_{i+1}.
- En cada intervalo, las expresiones temporales se obtienen como se indicó anteriormente con las siguientes salvedades:
  - Se aplican las condiciones de continuidad en cada cambio de intervalo.
  - El instante final de cada intervalo es siempre $t = \infty$.
  - Las expresiones del tipo exp(st) se sustituyen por expresiones del tipo $\exp[s(t - t_i)]$.

Ejemplo de circuito con cambios sucesivos



- Las fuentes son continuas.
- $V_A = 4$ V, $V_B = 3$ V, $t_1 = 1$ s, C = 1 F, $R_1 = R_2 = R_3 = 2\ \Omega$.
- Expresión temporal de v_C para $\infty \geq t \geq 0$ s.

$t_1 \geq t \geq 0$ s

$$R_2 C \frac{dv_C}{dt} + v_C = 0$$

$$v_C(0) = \frac{V_A R_2}{R_1 + R_2} = 2\ \text{V} \qquad v_C(\infty) = 0\ \text{V} \qquad \tau = R_2 C = 2\ \text{s}$$

$$v_C = v_C(\infty) + [v_C(0) - v_C(\infty)]e^{-\frac{t}{\tau}} = 2e^{-0.5t}\ \text{V}$$

$\infty \geq t \geq t_1$

$$\frac{R_2 R_3 C}{(R_2 + R_3)} \frac{dv_C}{dt} + v_C = \frac{V_B R_2}{R_2 + R_3}$$

$$v_C(t_1) = 2e^{-0.5t_1} = 1.21\ \text{V} \qquad v_C(\infty) = \frac{V_B R_2}{R_2 + R_3} = 1.5\ \text{V} \qquad \tau = \frac{R_2 R_3 C}{R_2 + R_3} = 1\ \text{s}$$

$$v_C = v_C(\infty) + [v_C(t_1) - v_C(\infty)]e^{-\frac{(t-t_1)}{\tau}} = 1.5 - 0.29e^{-(t-t_1)}\ \text{V}$$