Tema III:
Régimen sinusoidal permanente

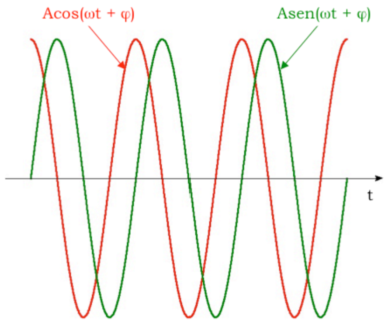
Caracterización matemática de señales sinusoidales
Respuesta de un circuito a una excitación sinusoidal
Identidades de Euler y números complejos: fasores e impedancias
Análisis en régimen sinusoidal
Inducción mutua y transformadores
Potencia en régimen sinusoidal
Equivalentes de Thévenin y Norton
Respuesta en frecuencia
Aplicación del principio de superposición

- Muchos circuitos funcionan en régimen sinusoidal permanente.
- Las excitaciones no sinusoidales pueden aproximarse por sumas de excitaciones sinusoidales (tema VII).

UVigo / E. Ing. Telecomunicación / Análisis de circuitos lineales / Tema III: Régimen sinusoidal permanente 064

Caracterización matemática de señales sinusoidales

Son señales sinusoidales las que pueden ser descritas por una función *sen* o una función *cos* siendo el tiempo la variable independiente.



Es indiferente elegir una u otra función, porque $\cos(\alpha) = \mathrm{sen}\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)$ $\quad \mathrm{sen}(\alpha) = \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)$

En este texto se utiliza la función *cos* como representativa del régimen sinusoidal.

Dpto. Teoría de la Señal y Comunicaciones / enrique.sanchez@uvigo.es / www.webs.uvigo.es

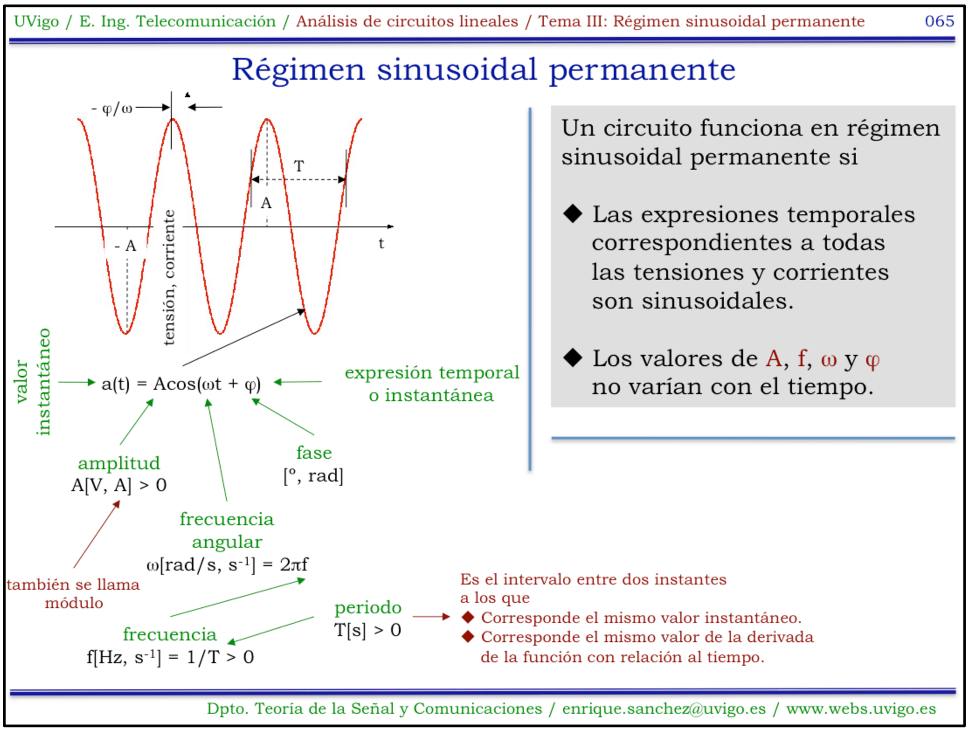
Algunos valores de funciones trigonométricas.

Ángulo (º)	Ángulo (rad)	sen	cos	tg
30	π/6	0.5	√3/2 = 0.87	1/√3 = √3/3 = 0.58
45	π/4	1/√2 = √2/2 = 0.71	1/√2 = √2/2 = 0.71	1
60	π/3	√3/2 = 0.87	0.5	√3 = 1.73
90	π/2	1	0	∞
180	π	0	-1	0
- 90	3π/2	-1	0	- ∞

Relación entre el seno y el coseno de un ángulo.

$$\mathrm{sen}\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = \mathrm{sen}(\alpha)\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)\cos(\alpha) \quad \Rightarrow \quad \cos(\alpha) = \mathrm{sen}\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = \cos(\alpha)\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)\mathrm{sen}(\alpha) \quad \Rightarrow \quad \mathrm{sen}(\alpha) = \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)$$



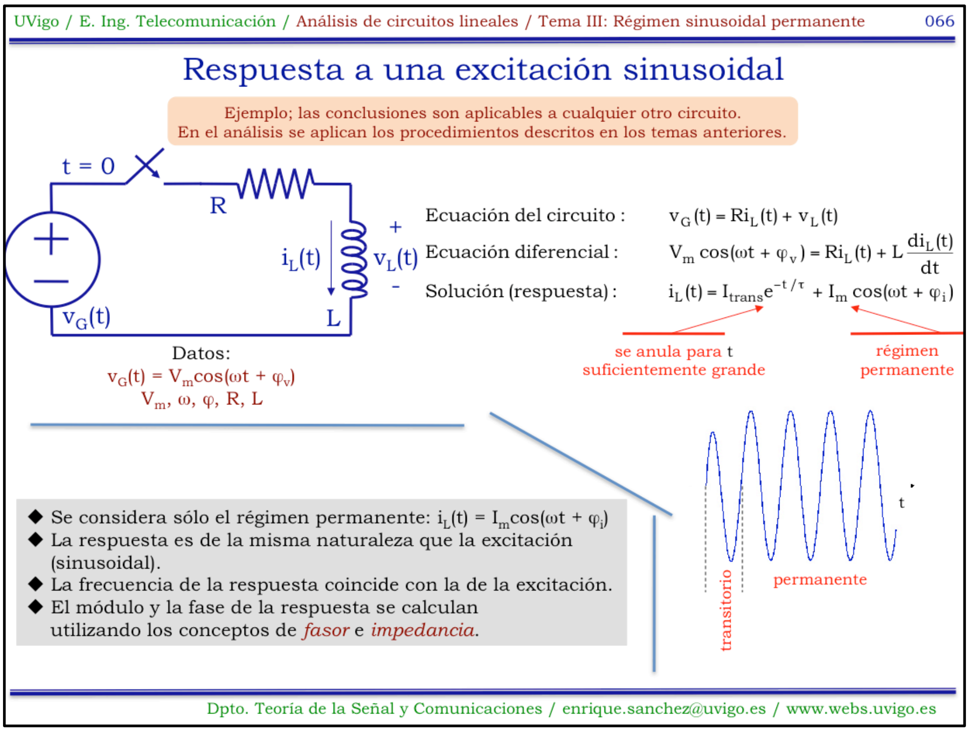
El módulo podría ser negativo, con lo que se cumpliría

$$A = -|A| \qquad \Rightarrow \qquad a(t) = -|A|\cos(\omega t + \vartheta) = |A|\cos(\omega t + \vartheta - \pi) = |A|\cos(\omega t + \varphi)$$

Es decir, se prefiere cambiar la fase para mantener positiva la amplitud.

Si consideramos los puntos de un circuito sometido a régimen sinusoidal permanente en un instante dado, se tiene una representación análoga a la mostrada, aunque con las siguientes diferencias:
- El eje de abscisas representa puntos sobre una recta.
- El concepto de periodo es sustituido por el de *longitud de onda* (λ), que se relaciona con aquél mediante la expresión $\lambda = c/f = cT$, en la que *c* es la velocidad de la luz en el circuito (si éste se encuentra al aire, aproximadamente $c = 3\times10^8$ m/s).

Siendo d_{max} la separación máxima entre dos puntos de un circuito, si $d_{max} > 10\lambda$ el circuito ha de ser analizado con ayuda de la teoría de líneas de transmisión o bien empleando directamente las ecuaciones de Maxwell. Si $d_{max} < \lambda/10$, puede utilizarse en el análisis la teoría convencional de circuitos sin cometer un error apreciable.



Para obtener la curva se han utilizado las siguientes expresiones

$$\varphi_i = \varphi_v - \operatorname{arctg}\left(\frac{\omega L}{R}\right) \qquad \tau = \frac{L}{R}$$

$$I_{trans} = -\frac{V_m \cos(\varphi_i)}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} \qquad I_m = \frac{V_m}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}}$$

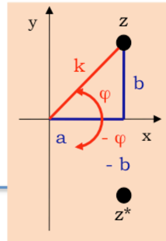
con los siguientes datos: $V_m = 1$ V, $\omega = 1$ rad/s, $\varphi_v = 0°$, R = 1 Ω, L = 1 H.

Identidades de Euler y números complejos

Las identidades de Euler establecen que un número complejo puede escribirse como

$$z = a + jb = ke^{j\varphi} = k_{\angle\varphi} = k\left[\cos(\varphi) + j\mathrm{sen}(\varphi)\right]$$

notación cartesiana — notación polar — notación trigonométrica



propiedades de interés

unidad de los números imaginarios :	$j = \sqrt{-1}$
módulo de z :	$k = \sqrt{a^2 + b^2}$
fase de z :	$\varphi = \mathrm{arctg}\left(\frac{b}{a}\right)$
parte real de z :	$\mathrm{Re}\{z\} = a = k\cos(\varphi) = k\,\mathrm{Re}\{e^{j\varphi}\} = \mathrm{Re}\{ke^{j\varphi}\}$
parte imaginaria de z :	$\mathrm{Im}\{z\} = b = k\mathrm{sen}(\varphi) = k\,\mathrm{Im}\{e^{j\varphi}\} = \mathrm{Im}\{ke^{j\varphi}\}$
complejo conjugado de z :	$z^* = a - jb = ke^{-j\varphi} \quad \Rightarrow \quad zz^* = k^2 = a^2 + b^2$ (real)

operaciones elementales

$$\left.\begin{array}{l} z_1 = a_1 + jb_1 = k_1e^{j\varphi_1} \\ z_2 = a_2 + jb_2 = k_2e^{j\varphi_2} \end{array}\right| \Rightarrow$$

$$z_1 \pm z_2 = (a_1 \pm a_2) + j(b_1 \pm b_2)$$

$$z_1z_2 = (a_1a_2 - b_1b_2) + j(a_1b_2 + b_1a_2) = (k_1k_2)_{\angle\varphi_1+\varphi_2}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(a_1 + jb_1)z_2^*}{z_2z_2^*} = \frac{(a_1a_2 + b_1b_2) + j(a_1b_2 - b_1a_2)}{c^2 + d^2} = \left(\frac{k_1}{k_2}\right)_{\angle\varphi_1-\varphi_2}$$

En la división de números complejos expresados en notación cartesiana se suele multiplicar el numerador y el denominador por el complejo conjugado del segundo. De este modo, en el denominador del cociente queda un número real, con lo que se simplifican las operaciones subsiguientes.

Obsérvese que *j* coincide con lo que en matemáticas se designa habitualmente como *i*. La razón de esta discrepancia entre el ámbito de la electricidad y la electrónica y el de las matemáticas es la conveniencia de evitar confusiones entre la unidad de los números imaginarios y el símbolo empleado habitualmente para denotar la corriente eléctrica.

Leonhard Paul Euler (1707-1783) fue un matemático (el más importante del siglo XVIII y uno de los más importantes de todos los tiempos) y físico suizo. Doctorado en la Universidad de Basilea (Suiza), trabajó en la Academia de las Ciencias de Rusia en San Petersburgo y en la Academia Prusiana de las Ciencias en Berlín. Contribuyó al análisis matemático, a las teorías de números y de grafos y a la notación; en relación con el último aspecto, definió los números *e*, *i* y π. Véase, por ejemplo, http://es.wikipedia.org/wiki/Euler.

Ejercicios de autoevaluación

Se desea obtener la expresión polar o cartesiana (la que corresponda en cada caso) de los siguientes números complejos

1	1	$1e^{j0°}$
2	$-j3$	$3e^{-j90°}$
3	$\sqrt{2} - j\sqrt{2}$	$2e^{-j45°}$
4	-8	$8e^{j180°}$
5	$\sqrt{2}e^{j135°}$	$-2 + j2$
6	$4e^{j0°}$	4
7	$\sqrt{2}e^{j225°}$	$-2 - j2$

$$\left.\begin{array}{l} \mathrm{Re}\{z\} = 1 \\ \mathrm{Im}\{z\} = 0 \end{array}\right| \Rightarrow \left|\begin{array}{c} k = \sqrt{\mathrm{Re}^2\{z\} + \mathrm{Im}^2\{z\}} = 1 \\ \mathrm{sen}(\varphi) = 0 \Rightarrow \varphi = \mathrm{arcsen}(0) = 0° \end{array}\right| \Rightarrow z = ke^{j\varphi} = e^{j0°}$$

$$\left.\begin{array}{l} \mathrm{Re}\{z\} = 0 \\ \mathrm{Im}\{z\} = -3 \end{array}\right| \Rightarrow \left|\begin{array}{c} k = \sqrt{\mathrm{Re}^2\{z\} + \mathrm{Im}^2\{z\}} = 3 \\ \cos(\varphi) = 0 \Rightarrow \varphi = \arccos(0) = -90° \end{array}\right| \Rightarrow z = ke^{j\varphi} = 3e^{-j90°}$$

Hay dos posibles valores para φ: 90° y -90°. Se elige el segundo porque es el que proporciona un valor negativo a Im{z}.

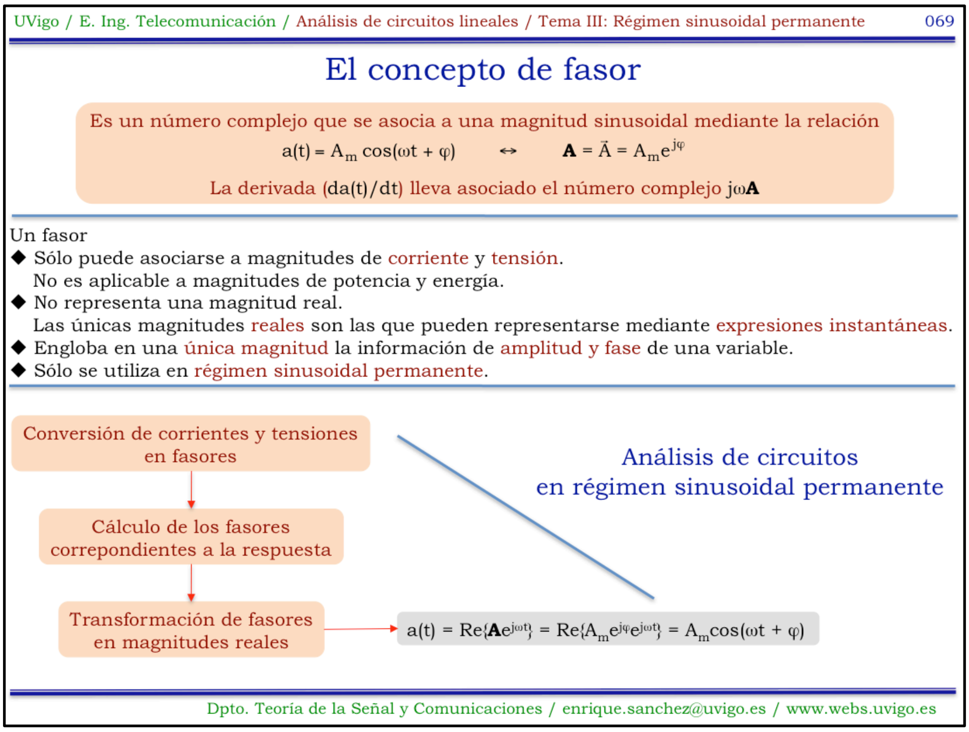
$$\left.\begin{array}{l} \mathrm{Re}\{z\} = \sqrt{2} \\ \mathrm{Im}\{z\} = -\sqrt{2} \end{array}\right| \Rightarrow \left|\begin{array}{c} k = \sqrt{\mathrm{Re}^2\{z\} + \mathrm{Im}^2\{z\}} = 2 \\ \varphi = \mathrm{arctg}\left(\dfrac{\mathrm{Im}\{z\}}{\mathrm{Re}\{z\}}\right) = -45° \end{array}\right| \Rightarrow z = ke^{j\varphi} = 2e^{-j45°}$$

$$\left.\begin{array}{l} \mathrm{Re}\{z\} = -8 \\ \mathrm{Im}\{z\} = 0 \end{array}\right| \Rightarrow \left|\begin{array}{c} k = \sqrt{\mathrm{Re}^2\{z\} + \mathrm{Im}^2\{z\}} = 8 \\ \cos(\varphi) = -1 \Rightarrow \varphi = \arccos(0) = 180° \end{array}\right| \Rightarrow z = ke^{j\varphi} = 8e^{j180°}$$

$$\sqrt{2}_{\angle 135°} = \sqrt{2}[\cos(135°) + j\mathrm{sen}(135°)] = -2 + j2$$

$$4_{\angle 0°} = 4[\cos(0°) + j\mathrm{sen}(0°)] = 4$$

$$\sqrt{2}_{\angle 225°} = \sqrt{2}[\cos(225°) + j\mathrm{sen}(225°)] = -2 - j2$$



La expresión temporal o instantánea correspondiente a un fasor dado es el producto del módulo del fasor por la función *cos*. En esta figuran la misma frecuencia angular a la que está funcionando el circuito y la fase del fasor. En esta expresión no pueden aparecer números complejos o imaginarios puros (denotados por la presencia de *j*).

Ejercicios de autoevaluación

Se desea obtener el fasor o la expresión instantánea (lo que corresponda en cada caso) de las siguientes magnitudes

1	$3\cos(\omega t)$	3
2	$2\cos(\omega t + 90^\circ)$	$j2$
3	$\sqrt{2}\cos(\omega t + 225^\circ)$	$-1 - j$
4	$-j4$	$4\cos(\omega t - 90^\circ)$
5	-1	$\cos(\omega t + 180^\circ)$
6	$-1 + j$	$\sqrt{2}\cos(\omega t + 135^\circ)$

Dpto. Teoría de la Señal y Comunicaciones / enrique.sanchez@uvigo.es / www.webs.uvigo.es

$$a(t) = 3\cos(\omega t) \rightarrow \mathbf{A} = 3e^{j0^\circ} = 3[\cos(0^\circ) + j\,\mathrm{sen}(0^\circ)] = 3$$

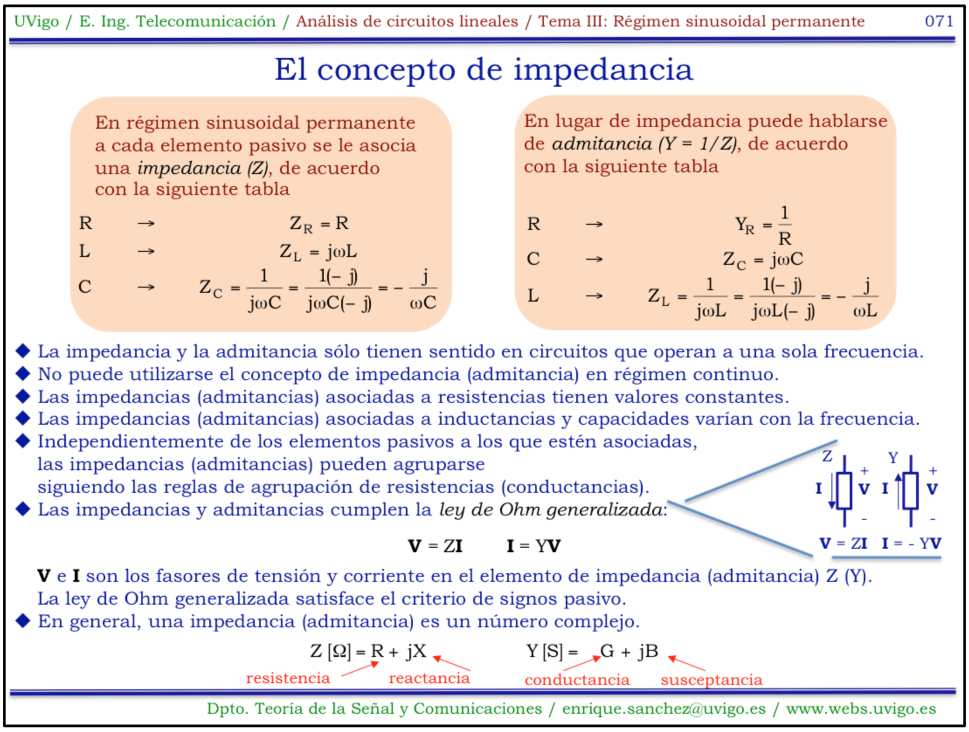
$$a(t) = 2\cos(\omega t + 90^\circ) \rightarrow \mathbf{A} = 2e^{j90^\circ} = 2[\cos(90^\circ) + j\,\mathrm{sen}(90^\circ)] = j2$$

$$a(t) = \sqrt{2}\cos(\omega t + 225^\circ) \rightarrow \mathbf{A} = \sqrt{2}e^{j225^\circ} = \sqrt{2}[\cos(225^\circ) + j\,\mathrm{sen}(225^\circ)] = -1 - j$$

$$\mathbf{A} = -j4 \rightarrow a(t) = \mathrm{Re}\{4e^{j(\omega t - 90^\circ)}\} = 4\cos(\omega t - 90^\circ)$$

$$\mathbf{A} = -1 \rightarrow a(t) = \mathrm{Re}\{1e^{j(\omega t + 180^\circ)}\} = 1\cos(\omega t + 180^\circ)$$

$$\mathbf{A} = -1 + j \rightarrow a(t) = \mathrm{Re}\{\sqrt{2}e^{j(\omega t + 135^\circ)}\} = \sqrt{2}\cos(\omega t + 135^\circ)$$



Que una impedancia (admitancia) resulte un número complejo suele ser el resultado de agrupar, en serie o en paralelo, dos o más impedancias (admitancias). En consecuencia, el símbolo *R* o los nombres *resistencia* y *conductancia* no deben ser confundidos con los correspondientes a elementos pasivos individuales.

Por ejemplo, supóngase que se agrupan en paralelo una resistencia, R, y una inductancia, L. De acuerdo con las reglas de agrupación se tiene

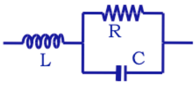
$$Z_{eq} = \frac{(R)(j\omega L)}{(R) + (j\omega L)} = \frac{j\omega LR(R - j\omega L)}{(R + j\omega L)(R - j\omega L)} = \frac{(\omega L)^2 R + j\omega LR^2}{R^2 + (\omega L)^2} \quad \Rightarrow \quad R_{eq} = \frac{(\omega L)^2 R}{R^2 + (\omega L)^2}, \quad X_{eq} = \frac{\omega LR^2}{R^2 + (\omega L)^2}$$

Obsérvese que la parte real de la impedancia resultante de la agrupación sí depende de la frecuencia de operación, al contrario de lo que ocurre cuando se trata de la impedancia asociada a una resistencia simple.

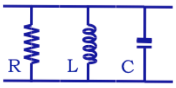
El término *impedancia* fue propuesto por Heaviside en 1886. Oliver Heaviside (1850-1925), aunque no tuvo formación universitaria fue un físico, ingeniero eléctrico, radiotelegrafista y matemático inglés. Se le debe la elaboración de la teoría de las líneas de transmisión, que permite analizar circuitos en situaciones en las que el análisis de redes no es aplicable directamente. También mejoró la formulación matemática de la teoría de Maxwell, si bien mantenía dudas acerca de su validez. Véase, por ejemplo, http://es.wikipedia.org/wiki/Oliver_Heaviside.

Ejercicios de autoevaluación

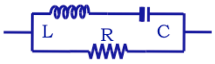
Se desea obtener la impedancia equivalente de las siguientes agrupaciones (en todos los casos R = 3 Ω, L = 2 H, C = 1 F, ω = 1 rad/s)

1 

0.3 + j1.7 Ω

2 

(12 - j18)/13 Ω

3 

0.3 + j0.9 Ω

Solución cuestión 1.

$$Z_{eq} = j\omega L + \frac{(R)\left(\frac{1}{j\omega C}\right)}{(R) + \left(\frac{1}{j\omega C}\right)} = j\omega L + \frac{R}{1 + j\omega RC} = j\omega L + \frac{R(1 - j\omega RC)}{1 + (\omega RC)^2} =$$

$$= \frac{R}{1 + (\omega RC)^2} + j\omega\left[L - \frac{RC}{1 + (\omega RC)^2}\right] = 0.3 + j1.7\ \Omega$$

Solución cuestión 2.

$$Y_{eq} = \frac{1}{R} + \frac{1}{j\omega L} + j\omega C = \frac{1}{3} + j\frac{1}{2}\ \text{S} \quad \Rightarrow \quad Z_{eq} = \frac{1}{Y_{eq}} = \frac{\frac{1}{3} - j\frac{1}{2}}{\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{12 - j18}{13}\ \Omega$$

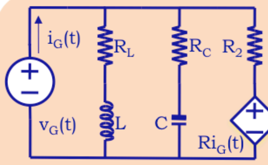
Solución cuestión 3.

$$Z_{eq} = \frac{(R)\left(j\omega L + \frac{1}{j\omega C}\right)}{(R) + \left(j\omega L + \frac{1}{j\omega C}\right)} = \frac{-jR(-\omega^2 LC + 1)}{\omega RC + j(\omega^2 LC + 1)} = \frac{j3}{3 + j}\ \Omega = \frac{j3(3 - j)}{3^2 + 1^2}\ \Omega = 0.3 + j0.9\ \Omega$$

Análisis de circuitos en régimen sinusoidal permanente

- Cálculo de los fasores asociados a las magnitudes de las fuentes.
- Cálculo (y agrupación) de las impedancias asociadas a los elementos pasivos.
- Hallar (aplicando análisis por mallas o nudos, divisores, simplificaciones) los fasores correspondientes a las magnitudes que constituyen la respuesta.
- Cálculo de las expresiones temporales de las magnitudes que constituyen la respuesta.

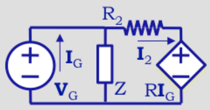
Ejemplo



$v_G(t) = V_m\cos(\omega t + \varphi)$

$V_m = 1.41$ V
$\omega = 1$ Mrad/s
$\varphi = 45°$
$R = 1\ \Omega$
$R_L = 3\ \Omega$
$R_C = 1\ \Omega$
$R_2 = 1\ \Omega$
$L = 1\ \mu$H
$C = 1\ \mu$F

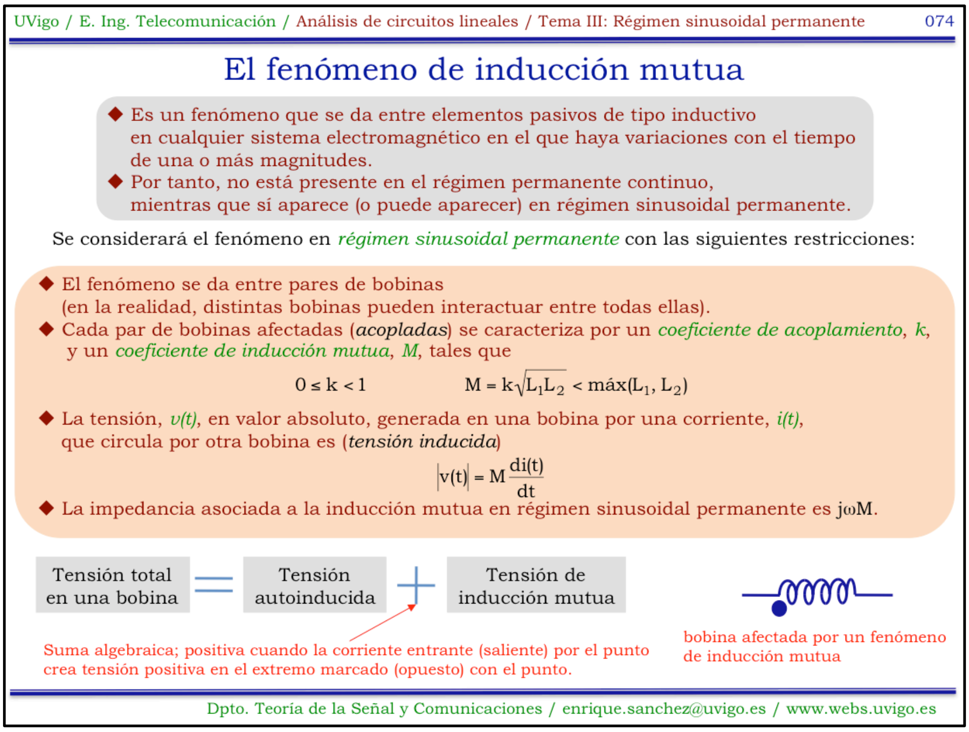
$$\mathbf{V}_G = V_m e^{j\varphi} = 1 + j\ \text{V}$$
$$Z_L = R_L + j\omega L = 3 + j\ \Omega$$
$$Z_C = R_C - \frac{j}{\omega C} = 1 - j\ \Omega$$
$$Z = \frac{Z_L Z_C}{Z_L + Z_C} = 1 - j0.5\ \Omega$$



$$\left.\begin{array}{l}\mathbf{I}_G = \dfrac{\mathbf{V}_G}{Z} + \mathbf{I}_2 \\ \mathbf{V}_G = R_2\mathbf{I}_2 + R\mathbf{I}_G\end{array}\right| \Rightarrow \mathbf{I}_2 = 0.3 - j0.1\ \text{A} \Rightarrow \left|\begin{array}{l} i_2(t) = \text{Re}\{\mathbf{I}_2 e^{j\omega t}\} = 0.32\cos[10^6 t + \text{arctg}(-0.33)]\ \text{A (t en s)} \\ v_2(t) = \text{Re}\{R_2\mathbf{I}_2 e^{j\omega t}\} = 0.32\cos[10^6 t + \text{arctg}(-0.33)]\ \text{V (t en s)} \\ p_2(t) = v_2(t)i_2(t) = 0.1\cos^2[10^6 t + \text{arctg}(-0.33)]\ \text{W (t en s)}\end{array}\right.$$

El objeto del problema es calcular distintas magnitudes relativas a R_2. Aunque no se indica explícitamente, se supone que la tensión en la resistencia es positiva en el terminal por el que entra la corriente, lo cual justifica los signos en las expresiones matemáticas.

Obsérvese que la potencia instantánea no se obtiene a partir de ningún fasor, ya que los fasores únicamente pueden aparecer asociados a corrientes y tensiones. En consecuencia, para obtener dicha magnitud es forzoso determinar antes las expresiones instantáneas de la corriente y la tensión; la potencia instantánea es, precisamente, el producto de estas magnitudes.



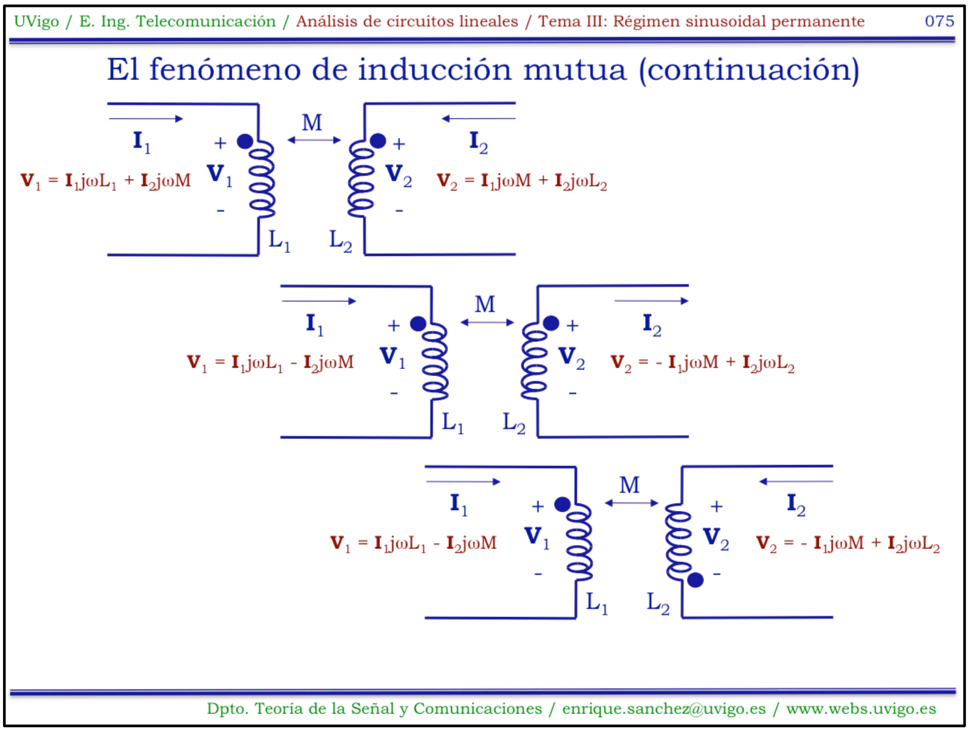
En lo que antecede se ha supuesto que, en el circuito en régimen sinusoidal, no se producen fenómenos de inducción mutua, con lo que las tensiones en las inductancias se deben únicamente al paso por ellas de las corrientes correspondientes; es decir, se trataba de tensiones autoinducidas.

Marcar el extremo de una inductancia con un punto es una reminiscencia de la tecnología de fabricación de bobinas arrollando un hilo conductor sobre un material ferroeléctrico. Según el arrollamiento fuera a derechas o a izquierdas, así era la posición del punto. De forma más correcta puede decirse que el punto está relacionado con el sentido del campo electromagnético en el que está inmersa la bobina.

Para que *k* fuese 1 las dos bobinas habrían de ocupar exactamente el mismo espacio en el mismo instante, lo cual es imposible. En la actualidad pueden encontrarse bobinas capaces de exhibir coeficientes de acoplamiento de *cuatro nueves* (0.9999).

Obsérvese que, si se conocen las impedancias asociadas a dos bobinas y correspondientes a una frecuencia dada, puede determinarse el coeficiente de acoplamiento aplicando las relaciones

$$k = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}} = \frac{\omega M}{\omega\sqrt{L_1 L_2}} = \frac{(\omega M)}{\sqrt{(\omega L_1)(\omega L_2)}}$$

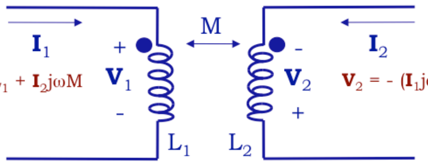


Las dos bobinas que participan conjuntamente en un fenómeno de inducción mutua se denotan mediante una fecha de doble sentido, a la que acompaña la indicación del valor del coeficiente de inducción mutua.

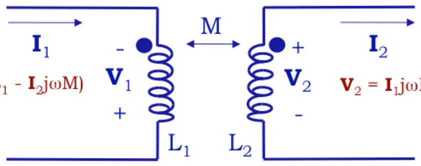
La polaridad de la tensión debida a la inducción mutua coincide con la de la autoinducida (y se utiliza un signo + en la expresión que da la tensión total) cuando origina una tensión positiva en el mismo extremo de la bobina en la que aparece el positivo de la tensión autoinducida, provocada por la corriente que recorre aquélla.

Los signos de las tensiones utilizados en el dibujo son establecidos por el usuario. Para las tensiones autoinducidas se supone que son positivas en los extremos de las bobinas por las que entran las corrientes. Para las tensiones debidas a la inducción mutua, la comparación se hace entre la tensión autoinducida y la que aparece por inducción mutua (*regla del punto*). La tensión total resultante se compara con la decidida por el usuario.

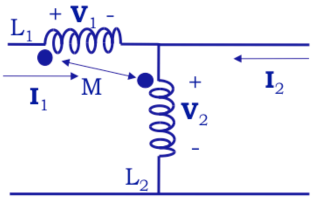
El fenómeno de inducción mutua (continuación)



$$\mathbf{V}_1 = \mathbf{I}_1 j\omega L_1 + \mathbf{I}_2 j\omega M$$
$$\mathbf{V}_2 = -(\mathbf{I}_1 j\omega M + \mathbf{I}_2 j\omega L_2)$$



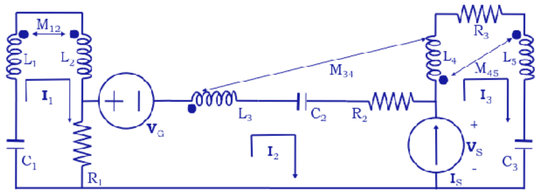
$$\mathbf{V}_1 = -(\mathbf{I}_1 j\omega L_1 - \mathbf{I}_2 j\omega M)$$
$$\mathbf{V}_2 = \mathbf{I}_1 j\omega M - \mathbf{I}_2 j\omega L_2$$



$$\mathbf{V}_1 = \mathbf{I}_1 j\omega L_1 + (\mathbf{I}_1 + \mathbf{I}_2) j\omega M$$
$$\mathbf{V}_2 = \mathbf{I}_1 j\omega M + (\mathbf{I}_1 + \mathbf{I}_2) j\omega L_2$$

UVigo / E. Ing. Telecomunicación / Análisis de circuitos lineales / Tema III: Régimen sinusoidal permanente 077

El fenómeno de inducción mutua (ejemplo)



Ecuaciones del circuito

$$\underbrace{0 = \mathbf{I}_1\left(-\frac{j}{\omega C_1} + j\omega L_1 + j\omega L_2 + R_1\right) - \mathbf{I}_2 R_1}_{\text{malla 1}} \underbrace{- \mathbf{I}_1 j\omega M_{12}}_{L_1 \text{ en } L_2} \underbrace{- \mathbf{I}_1 j\omega M_{12}}_{L_2 \text{ en } L_1}$$

$$\underbrace{-\mathbf{V}_G = -\mathbf{I}_1 R_1 + \mathbf{I}_2\left(R_1 + j\omega L_3 - \frac{j}{\omega C_2} + R_2\right) + \mathbf{V}_S}_{\text{malla 2}} + \underbrace{\mathbf{I}_3 j\omega M_{34}}_{L_4 \text{ en } L_3}$$

$$\underbrace{\mathbf{V}_S = \mathbf{I}_3\left(j\omega L_4 + R_3 + j\omega L_5 - \frac{j}{\omega C_3}\right)}_{\text{malla 3}} + \underbrace{\mathbf{I}_2 j\omega M_{34}}_{L_3 \text{ en } L_4} + \underbrace{\mathbf{I}_3 j\omega M_{45}}_{L_4 \text{ en } L_5} + \underbrace{\mathbf{I}_3 j\omega M_{45}}_{L_5 \text{ en } L_4}$$

$$\underbrace{\mathbf{I}_S = \mathbf{I}_3 - \mathbf{I}_2}_{\text{ecuación adicional}}$$

debida a la presencia de la fuente de corriente

Tensión en L_3

$$\mathbf{V}_{L3} = \underbrace{\mathbf{I}_2 j\omega L_3}_{\text{tensión autoinducida}} + \underbrace{\mathbf{I}_3 j\omega M_{34}}_{\text{tensión debida a inducción mutua}}$$

Dpto. Teoría de la Señal y Comunicaciones / enrique.sanchez@uvigo.es / www.webs.uvigo.es

Obsérvese que $\mathbf{I}_1$, en su calidad de corriente de malla, crea tensiones positivas en las partes inferiores de C_1 y L_1 y en las superiores de L_2 y R_1, mientras que, a causa de un fenómeno de inducción mutua y por la regla del punto, crea una tensión positiva en la parte superior de L_1. Es decir, en esta inductancia se establecen dos polaridades contrapuestas (la de la malla y la de la inducción mutua). Esta situación se representa introduciendo signos opuestos para ambas tensiones. Así, si la generada en la malla es positiva, la debida a la inducción mutua es negativa.

Consideraciones similares pueden aplicarse a las restantes situaciones en las que se hacen patentes efectos de inducción mutua.

Obsérvese también que L_4 interacciona con otras dos inductancias. Pero tales interacciones se manifiestan siempre en acoplamientos de dos de ellas, con lo que se respetan las condiciones básicas establecidas anteriormente para el estudio de este fenómeno.

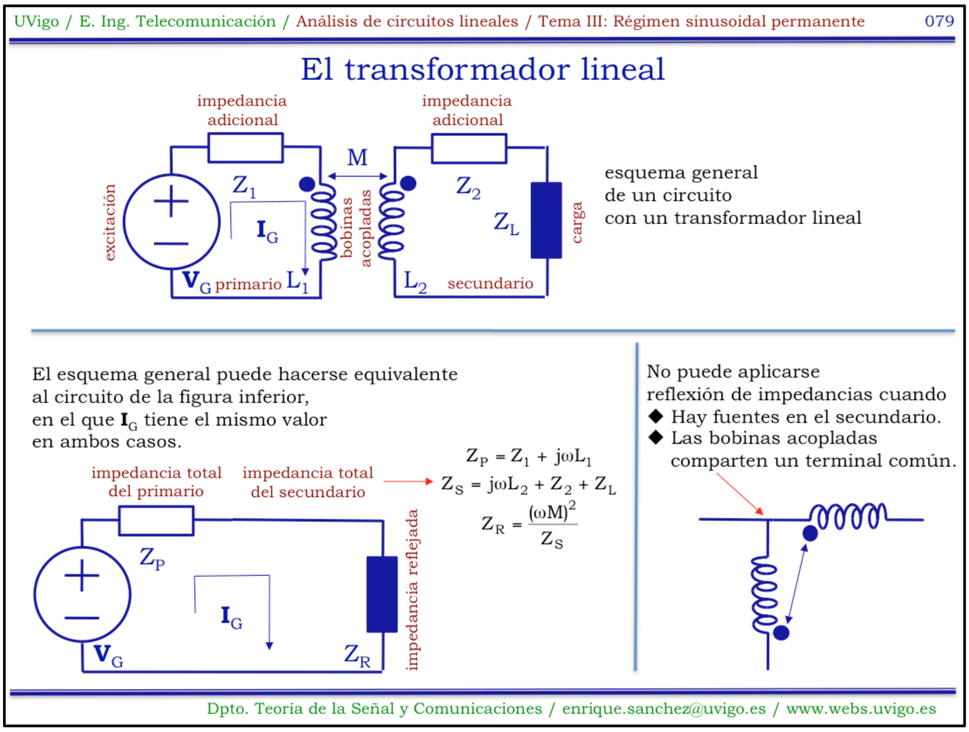
Transformadores

Son elementos pasivos de cuatro terminales (dos puertas)
en los que la señal proporcionada por la excitación
es modificada antes de ser entregada a una impedancia de carga.

esquema general de circuito con transformador

- A la bobina más próxima a la excitación se le denomina *primario*.
  La parte del circuito que la contiene se denomina *circuito primario* o, sencillamente, *primario*.
- A la bobina más próxima a la impedancia de carga (o *carga*) se la denomina *secundario*.
  La parte del circuito que la contiene se denomina *circuito secundario* o, sencillamente, *secundario*.

En continua, las bobinas que constituyen el transformador
se comportan como si fueran cortocircuitos.

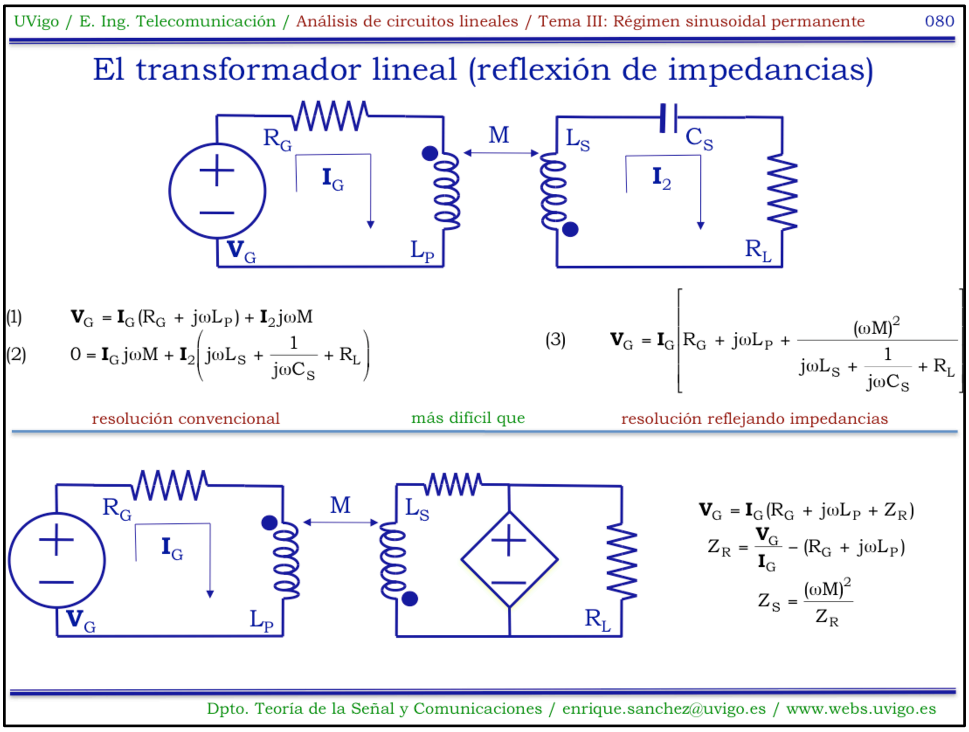


Obsérvese que el transformador lineal no permite el paso de excitación continua desde el primario hacia el secundario.

La reflexión de impedancias sirve para simplificar los cálculos en determinadas situaciones. La fórmula para obtener la impedancia reflejada es independiente de las posiciones de los puntos en las bobinas que definen el transformador. Puede reflejarse la impedancia del primario en el secundario (prescindiendo de la fuente como se indicará más adelante) utilizando la misma fórmula, pero sustituyendo la impedancia total del secundario por la del primario.

Obsérvese que la impedancia reflejada se añade a la del primario, sin modificar nada en esta parte del circuito.

Obsérvese, como demuestra la fórmula de la impedancia reflejada, que la presencia del transformador *modifica* e *invierte* la impedancia de carga que *ve* la fuente. La carga es Z_L, pero el generador ve una impedancia reflejada distinta. Para comprender qué significa la *inversión*, supóngase que Z_S es predominantemente inductiva (es decir, es del tipo jX_1, con $X_1>0\ \Omega$). La impedancia reflejada es de tipo capacitivo, ya que al calcularla aparece un término del tipo $-jX_2$, con $X_2>0\ \Omega$.



La diapositiva muestra dos aplicaciones prácticas del concepto de reflexión de impedancias.

En la primera se trata de analizar un circuito que incluye un transformador lineal. Puede hacerse, como indican las ecuaciones (1)-(2), planteando las ecuaciones de las mallas (incluyendo el fenómeno de inducción mutua) y resolviendo el sistema algebraico resultante. Pero es más sencillo escribir una sola ecuación, relativa al primario, en la que la corriente de malla es la única incógnita. A continuación, se obtienen las demás corrientes de las correspondientes ecuaciones de malla; en el ejemplo indicado, una vez obtenida $\mathbf{I}_G$, $\mathbf{I}_2$ puede calcularse a partir de (1) o de (2).

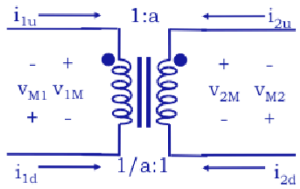
Anteriormente se dijo que no es posible aplicar el concepto de reflexión de impedancias cuando hay fuentes en el secundario. En realidad sí es posible, pero las correspondientes expresiones matemáticas son más complicadas. La segunda aplicación propone un método indirecto de calcular la impedancia total del secundario. Se basa en determinar el valor de $\mathbf{I}_G$ por el procedimiento convencional y luego utilizar este valor en las expresiones típicas de la reflexión de impedancias.

El transformador ideal

Está constituido por dos bobinas afectadas por el fenómeno de inducción mutua descrito antes con las siguientes particularidades:

- $k \rightarrow 1$.
- $L_1, L_2 \rightarrow \infty$.
- Las relaciones entre corrientes y tensiones se expresan en función del parámetro a (real, > 0), denominado *relación de espiras*.
- $a = n_2/n_1$, siendo n_1 y n_2 los números de espiras de las bobinas L_1 y L_2, respectivamente.
- Las tensiones que figuran en las relaciones siguientes son totales (incluyen la autoinducida y la creada por inducción mutua).

La relación de corrientes es positiva si una entra y otra sale por los extremos con puntos.
La relación de tensiones es positiva si ambas son positivas o negativas en el punto.



$$a = \frac{v_{2M}}{v_{1M}} = -\frac{v_{2M}}{v_{M1}} = \frac{v_{M2}}{v_{M1}} = -\frac{v_{M2}}{v_{1M}}$$

$$a = \frac{i_{1u}}{i_{2d}} = -\frac{i_{1u}}{i_{2u}} = \frac{i_{1d}}{i_{2u}} = -\frac{i_{1d}}{i_{2d}}$$

Las polaridades de las tensiones y los sentidos de las corrientes se eligen arbitrariamente.

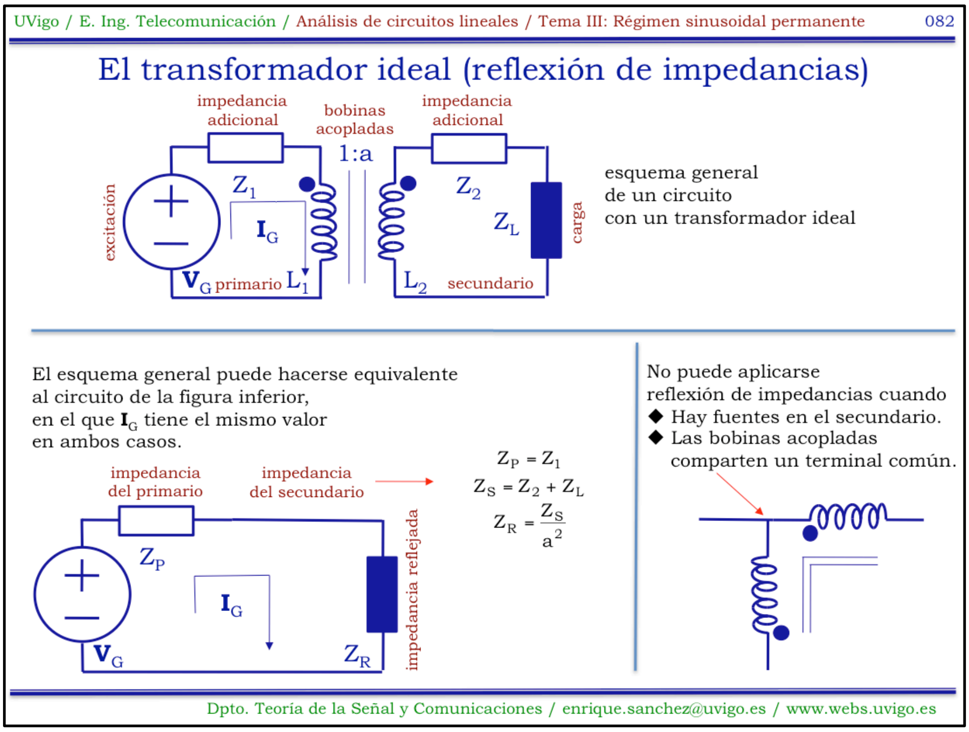
En régimen sinusoidal permanente, las tensiones y las corrientes se expresan en forma fasorial.

A pesar de su nombre, el transformador ideal es más habitual en la práctica que el lineal. Como se indicó anteriormente, en la actualidad existen valores de k tan altos (0.9999) que pueden suponerse muy aproximadamente iguales a la unidad. Por otro lado, no se requiere estrictamente que las bobinas presenten impedancias infinitas, sino que a la frecuencia de interés su impedancia sea al menos diez veces mayor que cualquier otra impedancia presente en el circuito.

El concepto de *relación de espiras* se introduce para evitar tener que operar con valores infinitos de impedancia.

La eliminación de los infinitos también se consigue eliminando la distinción entre tensión autoinducida y tensión debida a inducción mutua. Como se indicó antes, en los cálculos puede obtenerse la tensión total en la bobina del primario o en la bobina del secundario, pero no es posible precisar qué partes de dicha tensión son atribuibles a uno u otro fenómeno.

Obsérvese que el transformador ideal no permite el paso de excitación continua desde el primario hacia el secundario.

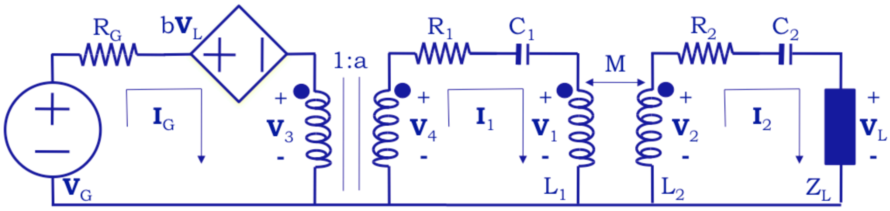


La reflexión de impedancias sirve para simplificar los cálculos en determinadas situaciones. La fórmula para obtener la impedancia reflejada es independiente de las posiciones de los puntos en las bobinas que definen el transformador. Puede reflejarse la impedancia del primario en el secundario (prescindiendo de la fuente como se indicará más adelante) como $Z_R = a^2 Z_P$.

Obsérvese que la impedancia reflejada no se añade a la del primario, sino que sustituye la impedancia de la bobina del primario. Además, la impedancia de la bobina del secudario no se tiene en cuenta. Ambas circunstancias se deben al hecho de que, tal y como se ha definido el transformador ideal, tales impedancias son infinitas.

Obsérvese, como demuestra la fórmula de la impedancia reflejada, que la presencia del transformador *modifica*, pero no *invierte* la impedancia de carga que *ve* la fuente. La carga es Z_L, pero el generador ve una impedancia reflejada distinta.

Transformadores (ejemplo)



Análisis convencional

Malla G : $\mathbf{V}_G = \mathbf{I}_G R_G + b\mathbf{V}_L + \mathbf{V}_3$

Malla 1 : $\mathbf{V}_4 = \mathbf{I}_1\left(R_1 + \dfrac{1}{j\omega C_1} + j\omega L_1\right) - \mathbf{I}_2 j\omega M$

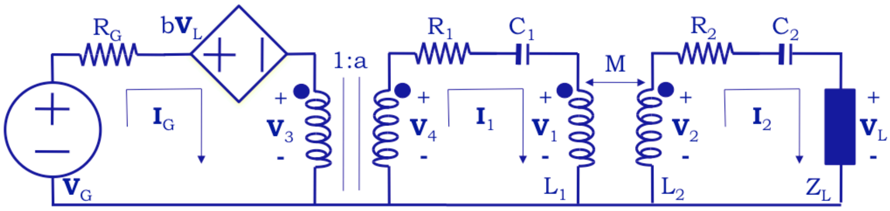
Malla 2 : $0 = -\mathbf{I}_1 j\omega M + \mathbf{I}_2\left(j\omega L_2 + R_2 + \dfrac{1}{j\omega C_2} + Z_L\right)$

Adicional : $\mathbf{V}_L = \mathbf{I}_2 Z_L$

Transf. ideal : $\mathbf{V}_4 = a\mathbf{V}_3 \qquad \mathbf{I}_G = a\mathbf{I}_1$

El transformador ideal se comporta como un *elemento extraño*, que introduce dos incógnitas adicionales. Para calcularlas, se necesitan dos ecuaciones: las relaciones de corrientes y tensiones en el elemento.

Transformadores (ejemplo)



Análisis reflejando impedancias

Transf. ideal: $\mathbf{I}_G = a\mathbf{I}_1$

Malla 2: $0 = -\mathbf{I}_1 j\omega M + \mathbf{I}_2\left(j\omega L_2 + R_2 + \frac{1}{j\omega C_2} + Z_L\right)$

Malla G: $\mathbf{V}_G = \mathbf{I}_G\left\{R_G + \frac{1}{a^2}\left[R_1 + \frac{1}{j\omega C_1} + j\omega L_1 + \frac{(\omega M)^2}{j\omega L_2 + R_2 + \frac{1}{j\omega C_2} + Z_L}\right]\right\} + b\mathbf{I}_2 Z_L$

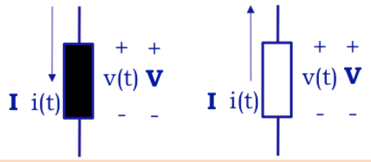
impedancia reflejada
en el primario
del transformador lineal

impedancia reflejada en el primario
del transformador ideal

El análisis reflejando impedancias requiere menos ecuaciones que el convencional. Es menos susceptible a errores por cuanto no es preciso tener en cuenta las posiciones relativas de los puntos de las bobinas. Las impedancias reflejadas se escriben directamente, sin necesidad de cálculos adicionales.

Potencia en régimen sinusoidal permanente

Impedancia
(Z = R + jX)



Potencia instantánea (real) (W, watio)	$p(t) = v(t)i(t) = \mathrm{Re}\{\mathbf{V}e^{j\omega t}\}\mathrm{Re}\{\mathbf{I}e^{j\omega t}\}$	$p(t) = -v(t)i(t) = -\mathrm{Re}\{\mathbf{V}e^{j\omega t}\}\mathrm{Re}\{\mathbf{I}e^{j\omega t}\}$
Potencia compleja (VA, voltio – amperio)	$S = \frac{\mathbf{V}\mathbf{I}^*}{2} = P + jQ$	$S = -\frac{\mathbf{V}\mathbf{I}^*}{2} = P + jQ$
Potencia aparente (VA, voltio – amperio)	$\lvert S\rvert$	$\lvert S\rvert$
Potencia media (W, watio)	$P = \mathrm{Re}\{S\}$	$P = \mathrm{Re}\{S\}$
Potencia reactiva (VAR, voltio – amperio reactivo)	$Q = \mathrm{Im}\{S\}$	$Q = \mathrm{Im}\{S\}$
Potencia en una resistencia (Z = R + j0)	$P = \frac{\lvert\mathbf{V}\rvert^2}{2R} = \frac{\lvert\mathbf{I}\rvert^2 R}{2}$ $Q = 0$ VAR	$P = \frac{\lvert\mathbf{V}\rvert^2}{2R} = \frac{\lvert\mathbf{I}\rvert^2 R}{2}$ $Q = 0$ VAR
Potencia en una reactancia (Z = 0 + jX)	$P = 0$ W $Q = \frac{\lvert\mathbf{V}\rvert^2}{2X} = \frac{\lvert\mathbf{I}\rvert^2 X}{2}$	$P = 0$ W $Q = \frac{\lvert\mathbf{V}\rvert^2}{2X} = \frac{\lvert\mathbf{I}\rvert^2 X}{2}$

- S, P y Q no son fasores. $p(t) \neq \mathrm{Re}\{Pe^{j\omega t}\}$.
- La frecuencia de la potencia instantánea es el doble de la de la tensión o de la corriente.

En el cálculo de potencias es habitual utilizar valores eficaces (rms).

Valor eficaz es el de la magnitud dividido por $\sqrt{2}$ (≈ 1.4).

Fasor eficaz (si procede) es el original dividido por $\sqrt{2}$ (≈ 1.4).

Otro parámetro muy utilizado en este contexto, sobre todo al hacer referencia a máquinas industriales, es el *factor de potencia*, definido como *cos(φ)*, siendo φ la fase de la potencia compleja (S). Es decir, φ=arctg(Q/P).

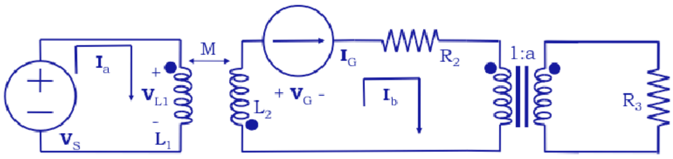
Potencia en régimen sinusoidal permanente (continuación)

$\mathbf{V}_S = 2 + j2$ V

$\mathbf{I}_G = 2$ A

$\omega = 100$ krad/s

$a = 2$



$R_2 = 5\ \Omega$

$R_3 = 4\ \Omega$

$\omega L_1 = 2\ \Omega$

$\omega L_2 = 6.5\ \Omega$

$\omega M = 1\ \Omega$

¿Potencia compleja, media, reactiva y real
en la fuente de corriente?

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{V}_S &= \mathbf{I}_a j\omega L_1 + \mathbf{I}_b j\omega M \\ -\mathbf{V}_G &= \mathbf{I}_a j\omega M + \mathbf{I}_b\left(j\omega L_2 + R_2 + \frac{R_3}{a^2}\right) \\ \mathbf{I}_b &= \mathbf{I}_G \end{aligned}\right| \Rightarrow \left|\begin{aligned} \mathbf{I}_b &= 2\text{ A} \\ \mathbf{I}_a &= -j\text{ A} \\ \mathbf{V}_G &= -13 - j13\text{ V} \end{aligned}\right.$$

$$S_G = \frac{\mathbf{V}_G \mathbf{I}_G^*}{2} = -13 - j13\text{ VA}$$

$$P_G = \mathrm{Re}\{S_G\} = -13\text{ W}$$

$$Q_G = \mathrm{Im}\{S_G\} = -13\text{ VAR}$$

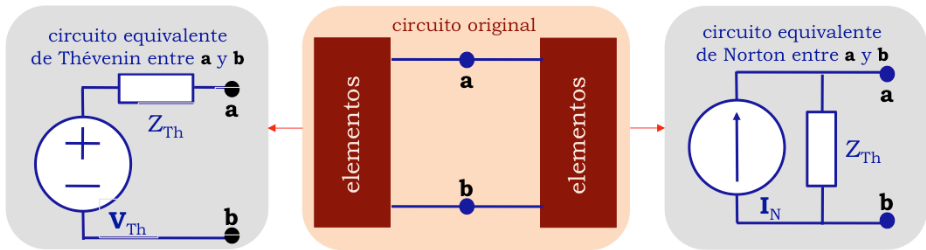
$$p_G(t) = v_G(t) i_G(t) = [\mathrm{Re}\{(-13 - j13)e^{j\omega t}\}][\mathrm{Re}\{2e^{j\omega t}\}] =$$

$$= 13\sqrt{2}\cos\left(10^5 t + \frac{3\pi}{4}\text{rad}\right) \times 2\cos\left(10^5 t\right)\text{ W (t en s)}$$

UVigo / E. Ing. Telecomunicación / Análisis de circuitos lineales / Tema III: Régimen sinusoidal permanente 087

Circuitos equivalentes en régimen sinusoidal permanente

De cara a la conexión de elementos a los terminales **a** y **b**,
el circuito original puede sustituirse por cualquiera de ambos circuitos equivalentes.
Éstos son equivalentes entre sí si $\mathbf{V}_{Th} = \mathbf{I}_N Z_{Th}$.



- $\mathbf{V}_{Th}$: generador equivalente de Thévenin;
  tensión (de circuito abierto) entre **a** y **b** en el circuito original (positiva en **a**).
- $\mathbf{I}_N$: generador equivalente de Norton; corriente que circula por un cortocircuito conectado entre **a** y **b**.
  Corrientes y tensiones en el circuito cambian al conectar el cortocircuito.
- Z_{Th}: impedancia equivalente de Thévenin. $Z_{Th} = \mathbf{V}_{Th}/\mathbf{I}_N$.

Es inmediato obtener el circuito equivalente a partir de medidas realizadas sobre el circuito.

Dpto. Teoría de la Señal y Comunicaciones / enrique.sanchez@uvigo.es / www.webs.uvigo.es

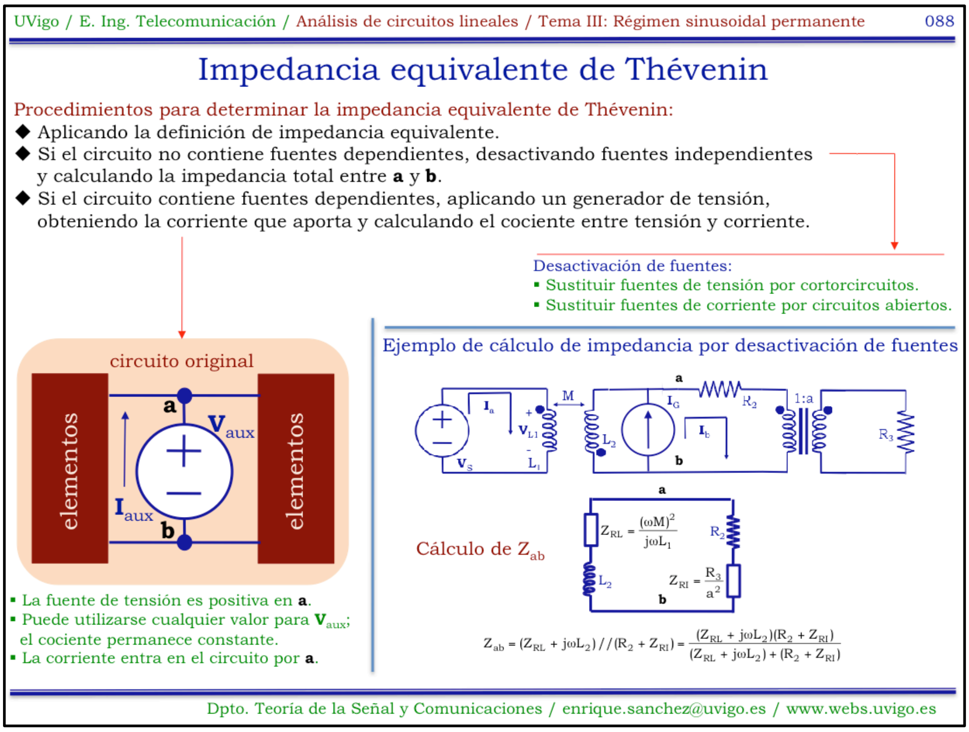
Los circuitos equivalentes permiten determinar el comportamiento de un circuito en dos de sus terminales sin necesidad de conocer las características de dicho circuito. Un circuito tiene tantos equivalentes como pares de terminales puedan identificarse en aquél. El sentido de la corriente y la polaridad de la tensión en un equivalente se especifican nombrando primero el terminal que es positivo o desde el que fluye la corriente.

La tensión de circuito abierto que define el generador equivalente de Thévenin se calcula sin modificar ninguna de las características del circuito. La determinación de la corriente de Norton (también denominada *corriente de cortocircuito*) requiere incluir un cortocircuito entre los terminales de interés, lo cual implica modificar los valores de las tensiones y las corrientes en el circuito con relación a los que se producen cuando no está tal cortocircuito.

Aunque se ignorne la topología del circuito y los valores de sus elementos, siempre es posible determinar su circuito equivalente de interés a partir de medidas realizadas con los terminales correspondientes en circuito abierto o en cortocircuito.

El concepto de generador equivalente se aplica a cualquier régimen de funcionamiento y no sólo al sinusoidal permanente.

Léon Charles Thévenin (1851-1926) fue un ingeniero de telégrafos francés, que extendió el análisis de la ley de Ohm a circuitos eléctricos complejos (http://es.wikipedia.org/wiki/Léon_Charles_Thévenin). Edward Lawry Norton (1898-1983) fue un ingeniero y científico estadounidense, que trabajó en los Laboratorios Bell (http://es.wikipedia.org/wiki/Edward_Lawry_Norton).

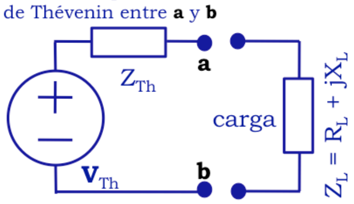


En el ejemplo de desactivación de fuentes, dado que la fuente de tensión ha de ser sustituida por un cortocircuito, la impedancia total del primario del transformador lineal queda reducida a la de la inductancia L_1. En el circuito intermedio la fuente ha de ser sustituida por un circuito abierto y la impedancia del secundario del ideal que hay que reflejar es la correspondiente a R_3 (no se tiene en cuenta la impedancia de la bobina para determinar la impedancia total del secundario). Obsérvese que la impedancia reflejada del primario del lineal en el secundario no afecta a la impedancia (la correspondiente a L_2) ya presente en el último, mientras que la impedancia del secundario del ideal reflejada en el primario supone la desaparición de la impedancia de la bobina presente en éste. La expresión que permite calcular la impedancia total es la correspondiente a una agrupación en paralelo porque hay dos caminos posibles y distintos para *ir* desde **a** hasta **b**.

Impedancia de máxima potencia

Se trata de determinar la impedancia que hay que colocar en los terminales elegidos como salida de un circuito dado para que se disipe en ella la máxima potencia media que se puede conseguir con la configuración considerada.

circuito equivalente de Thévenin entre **a** y **b**



$Z_{Th} = R_{Th} + jX_{Th}$

Si $Z_L = Z_{Th}^*$ ($R_L = R_{Th}$, $X_L = -X_{Th}$)
la potencia media en la carga es la máxima posible y vale

$$P_{max} = \frac{|\mathbf{V}_{Th}|^2}{8R_{Th}}$$

El formalismo de circuitos equivalentes también es aplicable al régimen permanente continuo (cambiando impedancias por resistencias y fasores por tensiones y corrientes continuas).
La condición de máxima potencia es $R_L = R_{Th}$
y la máxima potencia vale

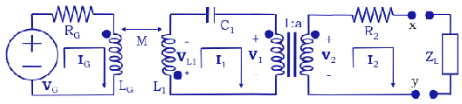
$$P_{max} = \frac{V_{Th}^2}{4R_{Th}}$$

Limitaciones en los valores de R_L y X_L.

- Si R_L y X_L sólo pueden tomar valores predeterminados, entre ellos se escogen los más próximos a $-X_{Th}$ y $R_L = \sqrt{R_{Th}^2 + (X_L + X_{Th})^2}$
- Si la fase de Z_L sólo puede tomar valores predeterminados, se escoge la carga cuyo módulo esté más próximo al de Z_{Th}.

Impedancia de máxima potencia (ejemplo)

$\mathbf{V}_G = 4 - j2$ V
$\omega = 1$ Mrad/s
$a = 2$
$M = 0.5\ \mu$H
$L_G = 1\ \mu H = L_1$
$R_G = 1\ \Omega = R_2$
$C_1 = 1\ \mu$F



Valor de Z_L para que en ella se disipe la máxima potencia media y valor de dicha potencia.

Hay que determinar Z_{Th}. El cálculo se hace sin Z_L, ya que es el elemento a obtener.

Procedimiento general

Tensión de circuito abierto entre x e y (circuito como está):

$$\mathbf{I}_2 = 0\text{ A} \Rightarrow \mathbf{I}_1 = a\mathbf{I}_2 = 0\text{ A} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \mathbf{V}_{Th} = \mathbf{V}_2 = a\mathbf{V}_1 = -a\mathbf{V}_{L1} =$$
$$= -a\mathbf{I}_G j\omega M = -\frac{a\mathbf{V}_G j\omega M}{R_G + j\omega L_G} = -3 - j\text{ V}$$

Corriente de cortocircuito de x a y (cambian corrientes y tensiones con relación a la situación anterior):

$$\mathbf{V}_G = \mathbf{I}_G\left[R_G + j\omega L_G + \frac{(\omega M)^2}{j\omega L_1 + \frac{1}{j\omega C_1} + \frac{R_2}{a^2}}\right]$$
$$0 = \mathbf{I}_G j\omega M + \mathbf{I}_1\left(j\omega L_1 + \frac{1}{j\omega C_1} + \frac{R_2}{a^2}\right)$$
$$\mathbf{I}_1 = a\mathbf{I}_2$$

$$\Rightarrow \mathbf{I}_N = \mathbf{I}_2 = -\frac{8 + j6}{5}\text{ A}$$

$$Z_{Th} = \frac{\mathbf{V}_{Th}}{\mathbf{I}_N} = 1.5 - j0.5\ \Omega \Rightarrow Z_L = Z^*_{Th} = 1.5 + j0.5\ \Omega$$

Procedimiento simplificado (no hay fuentes dependientes)

Se desactiva la fuente (cortocircuito).
Reflejando impedancias hacia el secundario del ideal:

$$Z_{Th} = Z_{xy} = R_2 + a^2\left[j\omega L_1 + \frac{1}{j\omega C_1} + \frac{(\omega M)^2}{R_G + j\omega L_G}\right] = 1.5 - j0.5\ \Omega \Rightarrow$$
$$\Rightarrow Z_L = Z^*_{Th} = 1.5 + j0.5\ \Omega$$

$$P_{max} = \frac{|\mathbf{V}_{Th}|^2}{8R_{Th}} = \frac{5}{6}\text{ W}$$

Dpto. Teoría de la Señal y Comunicaciones / enrique.sanchez@uvigo.es / www.webs.uvigo.es

En el procedimiento general las igualdades de tensiones ($\mathbf{V}_{L1}$ y $\mathbf{V}_1$, $\mathbf{V}_2$ y $\mathbf{V}_{xy}$) se deben a que son nulas las caídas de tensión en los elementos intermedios (C_1 y R_2, respectivamente) porque también lo son las corrientes que circulan por ellas.

Impedancia de máxima potencia (ejemplo)

Si sólo están disponibles, por ejemplo, valores de resistencia y reactancia que sean múltiplos exactos de 0.4 Ω, los valores de las partes real e imaginaria de la impedancia de carga son

- $X_L = 0.4\ \Omega$, como valor más próximo a $-X_{Th}$ entre los disponibles.
- $R_L = 1.6\ \Omega$, como valor más próximo a $\sqrt{R_{Th}^2 + (X_L + X_{Th})^2} = 1.5\ \Omega$ entre los disponibles.

En el circuito cargado con la impedancia que se acaba de calcular se verifica

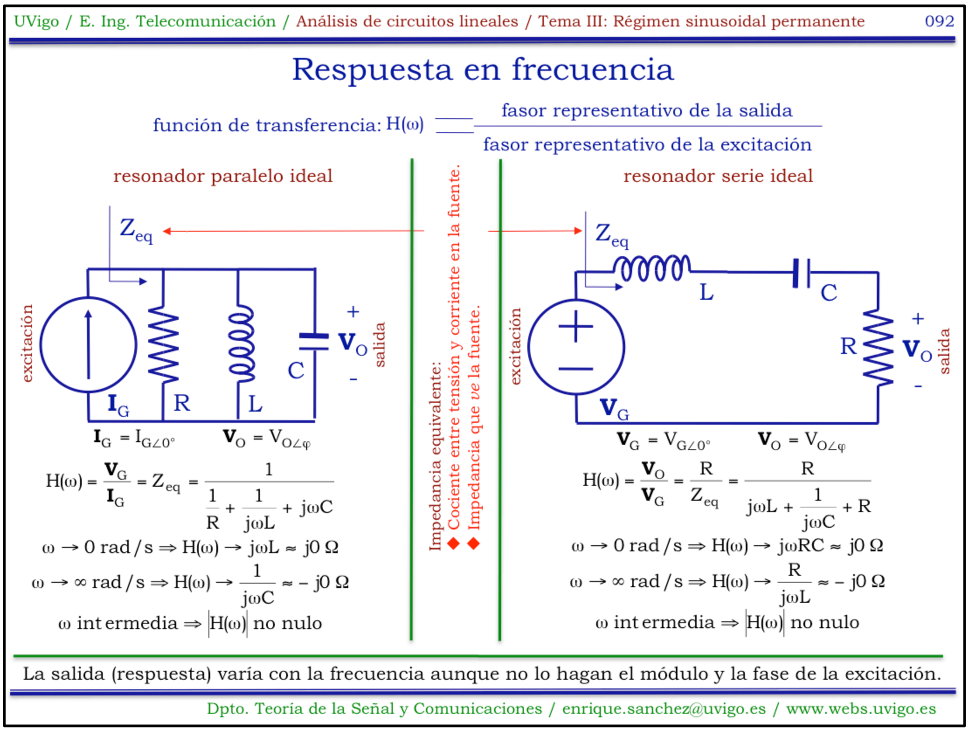
$$\left.\begin{aligned} \mathbf{V}_G &= \mathbf{I}_G\left[R_G + j\omega L_G + \frac{(\omega M)^2}{j\omega L_1 + \dfrac{1}{j\omega C_1} + \dfrac{R_2 + Z_L}{a^2}}\right] \\ 0 &= \mathbf{I}_G j\omega M + \mathbf{I}_1\left(j\omega L_1 + \frac{1}{j\omega C_1} + \frac{R_2}{a^2}\right) \\ \mathbf{I}_1 &= a\mathbf{I}_2 \end{aligned}\right| \Rightarrow \quad \mathbf{I}_2 = -0.3 + j0.05\ \Omega \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad P_L = \mathrm{Re}\{S_L\} = \mathrm{Re}\left\{\frac{(\mathbf{I}_2 Z_L)\mathbf{I}_2^*}{2}\right\} = \frac{|\mathbf{I}_2|^2 R_L}{2} = 0.72\ \mathrm{W}$$

Esta potencia es un 13.2 % inferior a la que se obtendría (5/6 = 0.83 W) si la impedancia de carga fuera realmente la de máxima potencia.

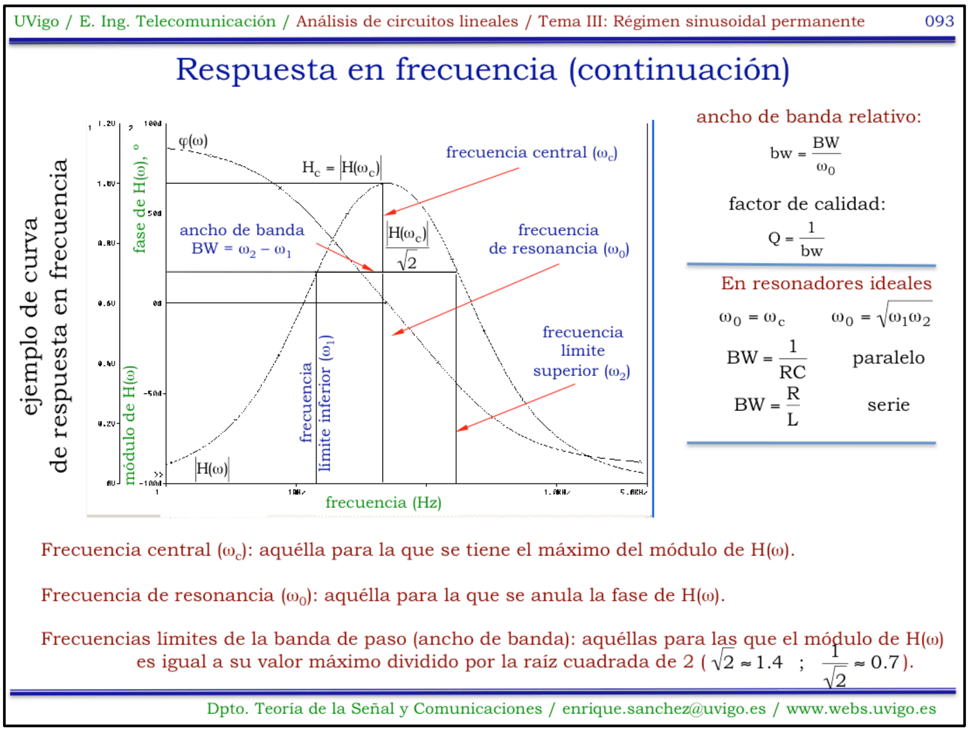
La caída de potencia media se calcula como

$$\Delta = 100 \times \frac{83 - 72}{83} = 13.2\ \%$$



Un circuito destinado a operar en régimen sinusoidal permanente no se comporta de la misma forma para todos los valores de la frecuencia de la excitación, como puede observarse en esta diapositiva y en la siguiente.

Volverá a hablarse de la función de transferencia en los temas VI y VII.



Se han propuesto distintas formas de definir la *frecuencia de resonancia*. Entre ellas se encuentran la que hace coincidir esta frecuencia con la central (es decir, aquélla para la que se obtiene el máximo de la función de transferencia) y la que la identifica como la frecuencia para la que la impedancia total del circuito es puramente resistiva (es decir, la frecuencia a la que se anula la parte imaginaria de la impedancia total). Estas definiciones no coinciden entre sí salvo en determinados circuitos.

A la hora de optar por un criterio, en este texto se ha elegido el indicado en la diapositiva, que supone que las fases del numerador y el denominador de la función de transferencia son iguales.

No debe confundirse el *factor de calidad* con la *potencia reactiva* a pesar de que ambos conceptos sean representados mediante el mismo símbolo.

Obsérvese la relación inmediata que existe entre los anchos de banda en resonadores ideales y las constantes de tiempo en tales circuitos. Esto es un indicativo de la estrecha relación que hay entre los regímenes transitorio y sinusoidal permanente; es posible obtener información acerca de uno de ellos haciendo funcionar el circuito en el otro.

Respuesta en frecuencia (continuación)

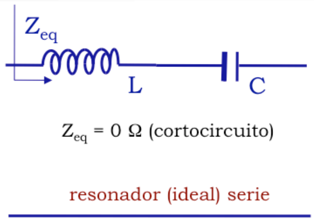
Variación con la frecuencia de la impedancia de los elementos reactivos

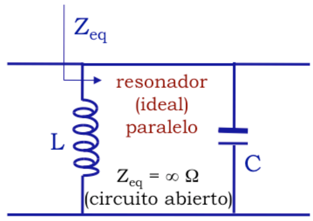
ω	→ 0 rad/s	→ ∞ rad/s
$Z = -\frac{j}{\omega C}$	→ $-j\infty\ \Omega$ circuito abierto, - 90 º	→ $-j0\ \Omega$ cortocircuito, - 90 º
$Z = j\omega L$	→ $j0\ \Omega$ cortocircuito, 90 º	→ $j\infty\ \Omega$ circuito abierto, 90 º

L, C	→ 0 (H, F)	→ ∞ (H, F)
$Z = -\frac{j}{\omega C}$	→ $-j\infty\ \Omega$ circuito abierto, - 90 º	→ $-j0\ \Omega$ cortocircuito, - 90 º
$Z = j\omega L$	→ $j0\ \Omega$ cortocircuito, 90 º	→ $j\infty\ \Omega$ circuito abierto, 90 º

comportamiento a la frecuencia

$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$





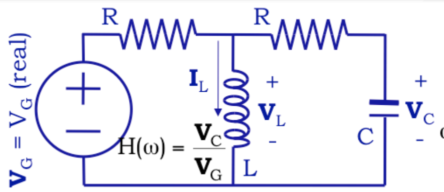
La variación del comportamiento de un circuito con la frecuencia de operación se debe a que las impedancias de los elementos reactivos cambian con aquélla. Un circuito compuesto exclusivamente por resistencias se comporta igual a cualquier frecuencia, ya que las impedancias de tales elementos son invariables.

Existe una cierta similitud entre los comportamientos de los elementos reactivos a bajas frecuencias y en continua (la inductancia y la capacidad se comportan, aproximadamente, como cortocircuitos y circuitos abiertos, respectivamente). Sin embargo, pese a esta coincidencia, la operación en continua y la operación en régimen sinusoidal son radicalmente distintas. En otras palabras, no es lo mismo decir que un circuito opera a una frecuencia angular ω=0 rad/s que decir que el circuito lo hace en continua.

Ejercicios de autoevaluación

Se desea obtener los valores a los que tienden los módulos y las fases de las funciones de transferencia de los siguientes circuitos para valores extremadamente bajos y extremadamente altos de la frecuencia de operación

1



$$\omega \to 0 \text{ rad/s} \quad \Rightarrow \quad \left| \begin{array}{l} |H(\omega)| \to 0 \\ \angle H(\omega) \to 90° \end{array} \right.$$

$$\omega \to \infty \text{ rad/s} \quad \Rightarrow \quad \left| \begin{array}{l} |H(\omega)| \to 0 \\ \angle H(\omega) \to -90° \end{array} \right.$$

Los cálculos pedidos pueden ser efectuados analizando los circuitos por mallas y obteniendo en cada caso la tensión en la salida, pero es más sencillo (y tiene más sentido físico) realizarlos como se indica seguidamente.

1. **Solución**.

   Para frecuencias muy bajas, la inductancia y la capacidad se comportan, aproximadamente, como un cortocircuito y un circuito abierto, con lo que toda la corriente proporcionada por la fuente se va por la primera. En consecuencia, la tensión en la capacidad coincide aproximadamente con la de la inductancia (no hay corriente en la resistencia intermedia entre ambos elementos). Esa tensión es el producto de la corriente por la impedancia de la inductancia. La primera es, aproximadamente, el cociente entre la tensión de la fuente y la primera resistencia (ya que la inductancia es un cortocircuito). Es decir,

$$\mathbf{V}_C \approx \mathbf{V}_L \to \left(\frac{\mathbf{V}_G}{R}\right) j\omega L \quad \Rightarrow \quad \left| \begin{array}{l} |H(\omega)| \to \dfrac{\omega L}{R} \to 0 \\ \angle H(\omega) \to \angle \mathbf{V}_G + 90° = 90° \end{array} \right.$$

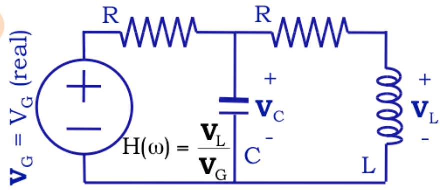
   De forma análoga, para frecuencias muy altas la inductancia y la capacidad se comportan, aproximadamente, como un circuito abierto y un cortocircuito, con lo que la corriente que se va por la primera es nula y

$$\mathbf{V}_C \approx \to \left(\frac{\mathbf{V}_G}{2R}\right) \frac{1}{j\omega C} \quad \Rightarrow \quad \left| \begin{array}{l} |H(\omega)| \to \dfrac{1}{2\omega RC} \to 0 \\ \angle H(\omega) \to \angle \mathbf{V}_G - 90° = -90° \end{array} \right.$$

Ejercicios de autoevaluación (continuación)

Se desea obtener los valores a los que tienden los módulos y las fases de las funciones de transferencia de los siguientes circuitos para valores extremadamente bajos y extremadamente altos de la frecuencia de operación

2



$$\omega \to 0 \text{ rad/s} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} |H(\omega)| \to 0 \\ \angle H(\omega) \to 90\,° \end{cases}$$

$$\omega \to \infty \text{ rad/s} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} |H(\omega)| \to 0 \\ \angle H(\omega) \to -\,90\,° \end{cases}$$

2. **Solución**.

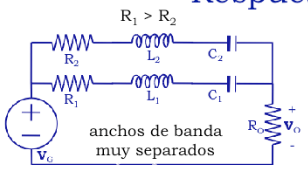
Para frecuencias muy bajas, la inductancia y la capacidad se comportan, aproximadamente, como un cortocircuito y un circuito abierto, con lo que toda la corriente proporcionada por la fuente se va por la primera. En consecuencia, la tensión en la inductancia es aproximadamente igual al producto de dicha corriente y la impedancia del elemento. La primera es, aproximadamente, el cociente entre la tensión de la fuente y la suma de las resistencias (ya que la inductancia es un cortocircuito). Es decir,

$$\mathbf{V}_L \to \left(\frac{\mathbf{V}_G}{2R}\right) j\omega L \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} |H(\omega)| \to \dfrac{\omega L}{2R} \to 0 \\ \angle H(\omega) \to \angle \mathbf{V}_G + 90° = 90° \end{cases}$$

De forma análoga, para frecuencias muy altas la inductancia y la capacidad se comportan, aproximadamente, como un circuito abierto y un cortocircuito, con lo que toda la corriente aportada por la fuente se va por la primera es nula y

$$\mathbf{V}_C \approx \to \left(\frac{\mathbf{V}_G}{R}\right) \frac{1}{j\omega C} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} |H(\omega)| \to \dfrac{1}{\omega RC} \to 0 \\ \angle H(\omega) \to \angle \mathbf{V}_G - 90° = -\,90° \end{cases}$$

Respuesta en frecuencia (ejemplo)



$$\omega_{01} = \frac{1}{\sqrt{L_1 C_1}} >> \frac{1}{\sqrt{L_2 C_2}} = \omega_{02}$$

$$H(\omega) = \frac{\mathbf{V}_O}{\mathbf{V}_G}$$

Representación cualitativa de la variación con la frecuencia del módulo de $H(\omega)$.

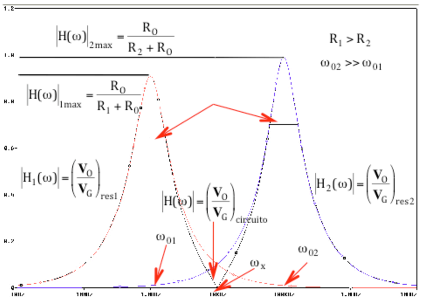
$$i = 1, 2 \Rightarrow Z_i = R_i + j\omega L_i + \frac{1}{j\omega C_i}$$

$$H(\omega) = \frac{\mathbf{V}_O}{\mathbf{V}_G} = \frac{R_O}{(Z_1 // Z_2) + R_O}$$

cálculo complicado

resonador individual

$$\omega << \omega_{0i} \Rightarrow Z_i \to -j\infty\ \Omega$$
$$\omega \approx \omega_{0i} \Rightarrow Z_i \to R_i$$
$$\omega >> \omega_{0i} \Rightarrow Z_i \to j\infty\ \Omega$$



$$\omega << \omega_x \Rightarrow Z_1 // Z_2 \approx Z_1 \Rightarrow |H(\omega)| \to \frac{R_O}{|Z_1 + R_O|} = |H_1(\omega)|$$

$$\omega \approx \omega_x \Rightarrow Z_1 // Z_2 \approx \infty\ \Omega \Rightarrow |H(\omega)| \to \frac{R_O}{|Z_1 // Z_2 + R_O|} \approx 0$$

$$\omega >> \omega_x \Rightarrow Z_1 // Z_2 \approx Z_2 \Rightarrow |H(\omega)| \to \frac{R_O}{|Z_2 + R_O|} = |H_2(\omega)|$$

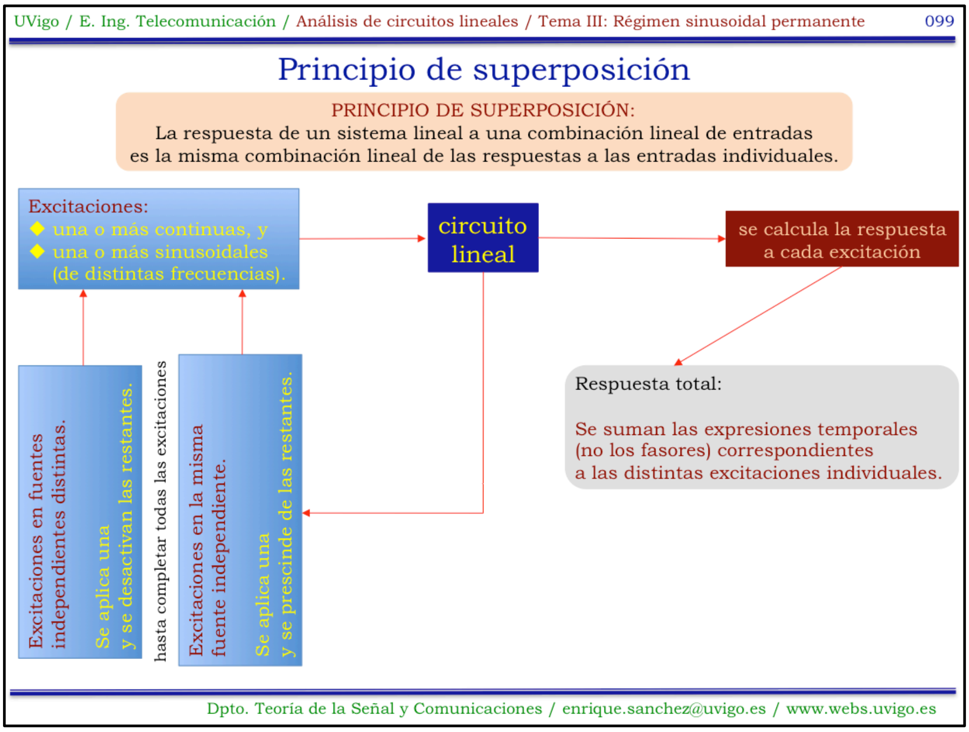
Respuesta en frecuencia (continuación)

Los problemas de respuesta en frecuencia suelen consistir en

- Calcular los módulos y las fases de variables a determinadas frecuencias.
- Hallar la frecuencia a la que se verifica una condición en el circuito.

Algunas de las condiciones típicas a determinar son:

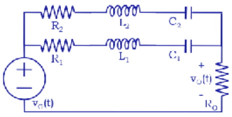
- Hallar la impedancia *vista* por una fuente.
- Hallar la frecuencia de resonancia.
- Hallar la frecuencia a la que se obtiene la máxima potencia
  (no debe confundirse con hallar la impedancia en la que se absorbe la máxima potencia).
- Hallar la frecuencia para la que hay un desfase dado entre entrada y salida.
- Hallar el rango de frecuencias para las que el módulo o la fase
  de la función de transferencia tienen valores superiores o inferiores a uno dado.



En situaciones en las que hay dos o más excitaciones distintas (pueden ser de la misma naturaleza) no tiene sentido tratarlas de forma unificada. Por ejemplo, si un circuito opera en régimen sinusoidal permanente, pero con dos frecuencias diferentes, no puede hablarse de fasores o impedancias, porque uno y otro concepto están ligados al hecho de que exista una frecuencia única.

Lo que hace el principio de superposición es, precisamente, permitir tratar de forma individualizada cada una de las excitaciones simples que están englobadas en la excitación o la señal múltiple. Una vez efectuado ese desglose, ya es posible, haciendo referencia al caso de régimen sinusoidal permanente, aplicar por separado a cada excitación el tratamiento a base de fasores e impedancias.

Principio de superposición (ejemplo)



$v_G(t) = V_1\cos(\omega_1 t) + V_2\cos(\omega_2 t)$

$V_1 = 1\ \text{V} = V_2$

$\omega_1 = 1\ \text{Mrad/s},\ \omega_2 = 1\ \text{Grad/s}$

$R_1 = 1\ \Omega,\ L_1 = 1\ \mu\text{H},\ C_1 = 1\ \mu\text{F}$

$R_2 = 1\ \Omega,\ L_2 = 1\ \text{mH},\ C_2 = 1\ \text{mF}$

$R_O = 1\ \Omega$

Hallar $v_O(t)$

$v_O(t) = v_{O1}(t) + v_{O2}(t)$

Cuando está aplicada
la señal de frecuencia ω_1

$$\mathbf{V}_1 = V_1 = 1\ \text{V}$$

$$Z_1 = R_1 + j\omega_1 L_1 + \frac{1}{j\omega_1 C_1} = 1\ \Omega$$

$$Z_2 = R_2 + j\omega_1 L_2 + \frac{1}{j\omega_1 C_2} \approx j10^3\ \Omega$$

$$Z_1 // Z_2 \approx 1\ \Omega$$

$$\mathbf{V}_{O1} = \frac{R_O \mathbf{V}_1}{Z_1 // Z_2 + R_O} = 0.5\ \text{V} \quad \Rightarrow \quad v_{O1}(t) = \text{Re}\{\mathbf{V}_{O1} e^{j\omega_1 t}\} = 0.5\cos(\omega_1 t)\ \text{V}$$

Cuando está aplicada
la señal de frecuencia ω_2

$$\mathbf{V}_2 = V_2 = 1\ \text{V}$$

$$Z_1 = R_1 + j\omega_2 L_1 + \frac{1}{j\omega_2 C_1} \approx j10^3\ \Omega$$

$$Z_2 = R_2 + j\omega_2 L_2 + \frac{1}{j\omega_2 C_2} \approx j10^6\ \Omega$$

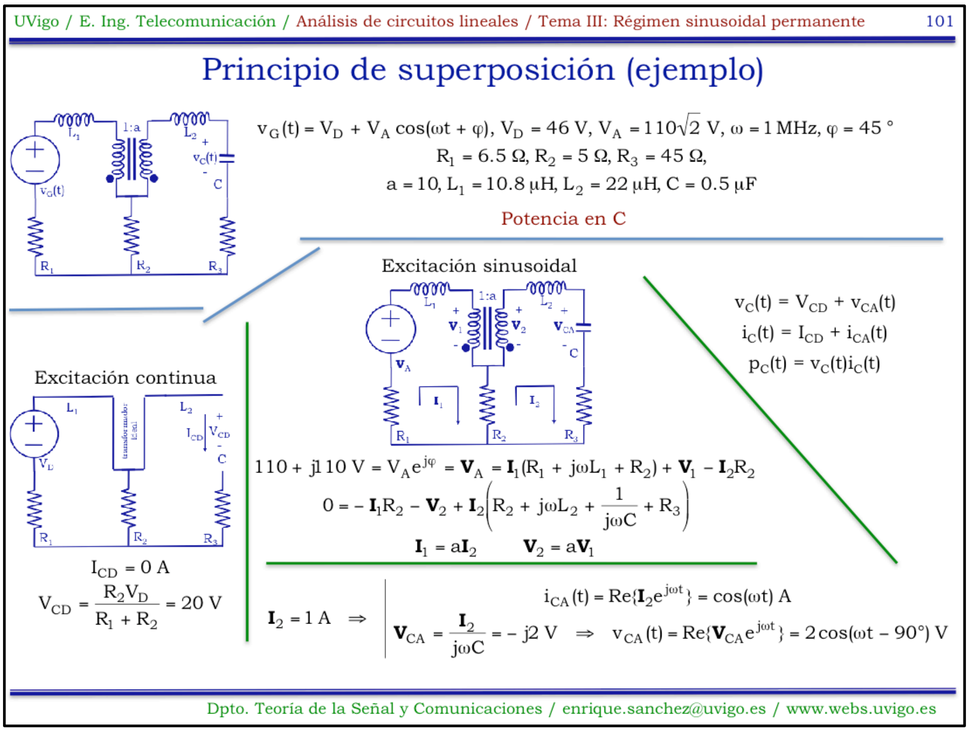
$$Z_1 // Z_2 \approx j10^3\ \Omega$$

$$\mathbf{V}_{O2} = \frac{R_O \mathbf{V}_2}{Z_1 // Z_2 + R_O} \approx -j10^{-3}\ \text{V} \approx 0\ \text{V} \quad \Rightarrow \quad v_{O2}(t) = \text{Re}\{\mathbf{V}_{O2} e^{j\omega_1 t}\} \approx 0\ \text{V}$$

En problemas como éste, en los que las magnitudes toman valores muy distintos (difieren en varios órdenes de magnitud), es de gran utilidad saber recurrir a simplificaciones razonables. De lo contrario, los cálculos son susceptibles de producir errores importantes.

Ello suele ser debido a que en el cálculo de fases de magnitudes complejas pueden estar involucradas las tangentes de ángulos relativamente próximos. Pero eso no significa que los valores de dichas tangentes también sean próximos. Por ejemplo, tg(89.5)=114.59 y tg(89.8)=286.48. La utilización de hipótesis como las manejadas en el ejemplo (que se desprecian las magnitudes que difieren en tres o más órdenes de magnitud de otras similares, con independencia de que sean reales o imaginarias) evita este problema en gran número de casos de interés práctico.

Por otro lado, obsérvese que el circuito considerado en este ejemplo actúa como una especie de filtro, que permite el paso de unas determinadas frecuencias (en torno a 1 Mrad/s) mientras rechaza otras (en torno a 1 Grad/r). Las primeras son entregadas a la carga, en tanto que las segundas no.



Obsérvese que la potencia instantánea no satisface el principio de superposición. Es decir, considerando el ejemplo de la diapositiva, no es posible calcular la expresión correspondiente a la excitación sinusoidal y la correspondiente a la excitación continua y luego sumarlas para obtener la expresión total. Por el contrario, hay que aplicar el principio de superposición a la determinación de las corrientes y las tensiones totales y luego hallar la potencia total a partir de tales expresiones y corrientes.

Obsérvese también que, como se indicó anteriormente, las bobinas que constituyen un transformador son simples cortocircuitos para la excitación continua.