

## Tema V: Señales y sistemas

Señales (y sistemas) continuas y discretas

Componentes par e impar de una señal

Funciones periódicas

Transformaciones de funciones

Función exponencial

Otras funciones

Función impulso y función escalón unitario

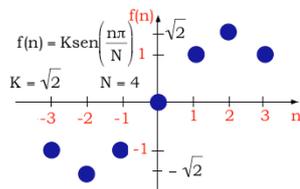
Generalidades sobre sistemas

Principio de superposición

Sistemas LTI

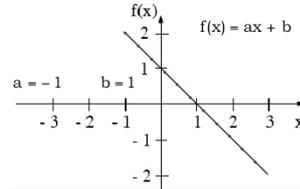
- ◆ Señal es un fenómeno electromagnético que contiene información y puede ser enviada (transmitida) desde un punto a otros.
- ◆ Un sistema es un conjunto de dispositivos en el que se procesa (se genera, se modifica, se envía, se recibe, se descodifica, etcétera) una señal.

## Señales (y sistemas) continuas y discretas



Señales discretas

- ◆ La variable independiente sólo puede tomar un conjunto restringido de valores.
- ◆ La función sólo está definida para los valores posibles de la variable.



Señales continuas

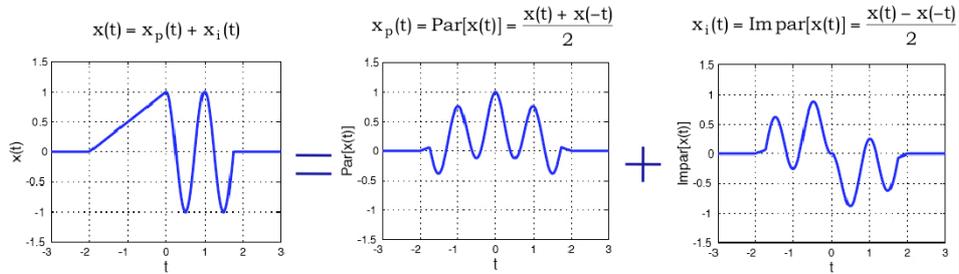
- ◆ La variable independiente es continua. Puede tomar cualquier valor real.
- ◆ La función está definida para una sucesión continua de valores de la variable independiente.

- ◆ Consideraremos únicamente señales que son función de una única variable.
- ◆ Las únicas variables que serán tenidas en cuenta son el tiempo ( $t$ ) y la frecuencia ( $f$ ,  $\omega$ ).
- ◆ Se consideran únicamente señales continuas.  
No deben confundirse los dos significados de la palabra *continua*.

La señal continua mostrada en la diapositiva no puede ser catalogada como perteneciente al *régimen permanente continuo*.

## Componentes par e impar de una señal

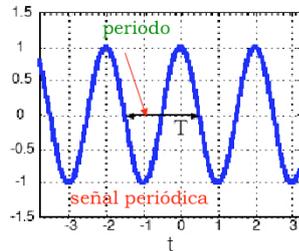
Una señal puede descomponerse en sus componentes par e impar.



- ◆ Si una señal,  $x(t)$ , es par se cumple  $x(-t) = x(t)$  para cualquier valor de  $t$ .
- ◆ Si una señal,  $x(t)$ , es impar se cumple  $x(-t) = -x(t)$  para cualquier valor de  $t$ .

La señal  $x(-t)$  se obtiene a partir de  $x(t)$  sustituyendo en ésta  $t$  por  $-t$ .

## Funciones periódicas



Una señal,  $y(t)$ , es periódica si, para cualquier valor de  $t$ , existe un valor  $T$  real y positivo (el mismo para todo  $t$ ) tal que

$$y(t + T) = y(t) \quad \left. \frac{dy(t)}{dt} \right|_{t+T} = \left. \frac{dy(t)}{dt} \right|_t$$

Se dice que una señal,  $y_k(t)$ , está relacionada armónicamente con  $y(t)$  cuando (las dos condiciones son equivalentes):

- ◆ Su periodo,  $T_k$ , es un submúltiplo del correspondiente a  $y(t)$ .  
 $T_k = T/k$  ( $k$  es un número natural).
- ◆ Su frecuencia,  $f_k$ , es un múltiplo de la correspondiente a  $y(t)$ .  
 $f_k = kf$  ( $k$  es un número natural).

- ◆ A la señal de frecuencia  $f$  (frecuencia fundamental) se la llama *señal fundamental*.
- ◆ A las señales con frecuencias múltiplos de la fundamental se las llama *armónicos de orden  $k$* .

Dpto. Teoría de la Señal y Comunicaciones / enrique.sanchez@uvigo.es / www.webs.uvigo.es

### Ejemplo de señal armónica de otra dada.

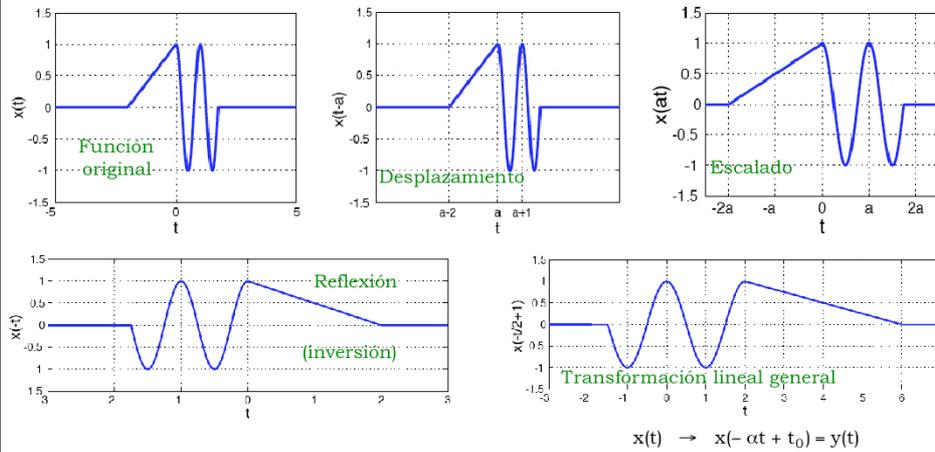
$$x(t) = \cos(2\pi ft)$$

$$y(t) = \cos(4\pi ft) = \cos[2(2\pi f)t] = \cos(2\pi f_k t)$$

$$\left. \begin{array}{l} f_k = 2f \\ T = \frac{1}{f} \quad T_k = \frac{1}{f_k} = \frac{1}{2f} = \frac{T}{2} \end{array} \right| \Rightarrow \text{armónico de orden 2}$$

Es decir,  $y(t)$  es una señal armónica de  $x(t)$ .

## Transformaciones de funciones



Las transformaciones permiten analizar  $y(t)$   
a partir del conocimiento de  $x(t)$ .

Es decir, supóngase que se conocen determinadas propiedades de la función  $x(t)$ . En muchos casos prácticos una segunda función,  $y(t)$ , puede obtenerse a partir de  $x(t)$  utilizando todas o algunas de las transformaciones mencionadas. En esos casos no es necesario analizar completamente  $y(t)$  para determinar sus propiedades; éstas pueden ser deducidas de las correspondientes a  $x(t)$  teniendo en cuenta las transformaciones realizadas. Por ejemplo, la tabla de transformadas de Laplace que se presenta en el capítulo siguiente hace uso de esta consideración.

## La función exponencial

### Formulación general de la función exponencial:

$$A = |A|e^{j\varphi} \quad s = \sigma + j\omega$$

$$y(t) = Ae^{st} = |A|e^{j\varphi} e^{(\sigma + j\omega)t} = |A|e^{\sigma t} e^{j(\omega t + \varphi)} = |A|e^{\sigma t} [\cos(\omega t + \varphi) + j\text{sen}(\omega t + \varphi)]$$

$$\text{Re}\{y(t)\} = |A|e^{\sigma t} \cos(\omega t + \varphi) \quad \text{Im}\{y(t)\} = |A|e^{\sigma t} \text{sen}(\omega t + \varphi)$$

### Función exponencial compleja:

$$A = |A|e^{j\varphi} \quad s = \sigma + j\omega \quad \sigma = 0$$

$$y(t) = Ae^{st} = |A|e^{j\varphi} e^{j\omega t} = |A|e^{j(\omega t + \varphi)} = |A|[\cos(\omega t + \varphi) + j\text{sen}(\omega t + \varphi)]$$

$$\text{Re}\{y(t)\} = |A|\cos(\omega t + \varphi) \quad \text{Im}\{y(t)\} = |A|\text{sen}(\omega t + \varphi)$$

### Función cosenoidal (sinusoidal):

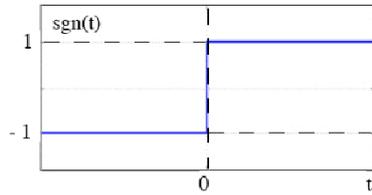
$$A = |A|e^{j\varphi} \quad s = \sigma + j\omega \quad \sigma = 0$$

$$y(t) = Ae^{st} = |A|e^{j\varphi} e^{j\omega t} = |A|e^{j(\omega t + \varphi)} = |A|[\cos(\omega t + \varphi) + j\text{sen}(\omega t + \varphi)]$$

$$z(t) = |A|\cos(\omega t + \varphi) = |A|\text{Re}\{e^{j(\omega t + \varphi)}\} = \text{Re}\{Ae^{j\omega t}\}$$

Obsérvese que en las expresiones recogidas en esta diapositiva se hace un uso sistemático de las identidades de Euler.

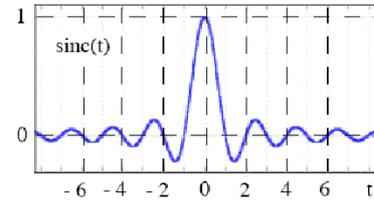
## Otras funciones



**Función signo:**

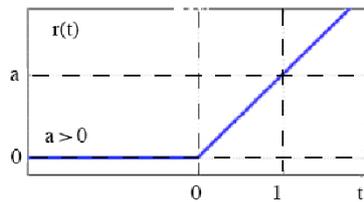
$$t < 0 \Rightarrow \text{sign}(t) = -1$$

$$t > 0 \Rightarrow \text{sign}(t) = 1$$



**Función sinc:**

$$\text{sinc}(t) = \frac{\text{sen}(\pi t)}{\pi t}$$



**Función rampa:**

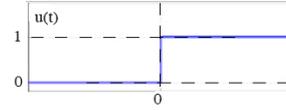
$$t < 0 \Rightarrow r(t) = 0$$

$$t > 0 \Rightarrow r(t) = at \text{ (a real)}$$

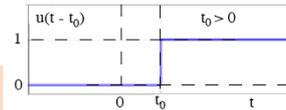
Estas funciones y las consideradas en las diapositivas siguientes son algunas de las que aparecen con más frecuencia en el análisis de circuitos basado en la teoría de sistemas lineales.

## Función escalón unitario

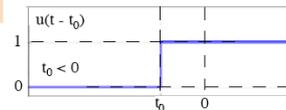
$$u(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t > 0 \end{cases}$$



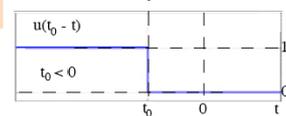
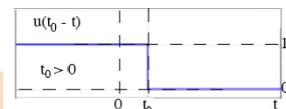
$$u(t - t_0) = \begin{cases} 0 & t < t_0 \\ 1 & t > t_0 \end{cases}$$



Función  
escalón  
unitario



$$u(t_0 - t) = \begin{cases} 1 & t < t_0 \\ 0 & t > t_0 \end{cases}$$



Obsérvese que el resultado de multiplicar una función por  $u(t)$  equivale a decir que aquella carece de existencia (o tiene un valor nulo) para todo  $t > 0$ . En el tema siguiente se hace un amplio uso de la transformada de Laplace unilateral, que sólo existe para  $t > 0$ . Esta circunstancia puede denotarse multiplicando las funciones de interés por la función escalón unitario, lo cual es el formalismo correcto. Pero también puede omitirse la mención explícita a  $u(t)$  si se tiene siempre presente que carece de sentido hablar de valores de funciones para  $t < 0$ .

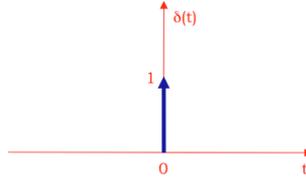
## Función impulso unitario (delta de Dirac)

### Definición

$$\delta(t) = \frac{du(t)}{dt}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1$$

$$t \neq 0 \Rightarrow \delta(t) = 0$$

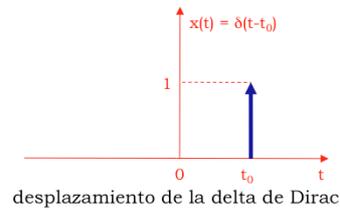
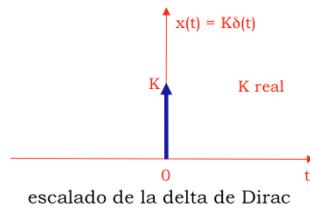


### Propiedades

$$\delta(t) = \delta(-t)$$

$$f(t + t_0)\delta(t) = f(t_0)\delta(t)$$

$$f(t)\delta(t - t_0) = f(t_0)\delta(t - t_0)$$



Obsérvese que el resultado de multiplicar una función por la delta de Dirac es el valor de la función en el instante en el que la delta tiene un valor no nulo.

Paul Adrien Maurice Dirac (1902-1984) fue un científico británico. Doctorado por la Universidad de Cambridge (en la que trabajó, al igual que en la Universidad Estatal de Florida), hizo importantes contribuciones a la mecánica cuántica, por lo que en 1933 recibió el Premio Nobel de Física, compartido con Erwin Schrödinger. Véanse, por ejemplo, <http://es.wikipedia.org/wiki/Dirac> y [http://es.wikipedia.org/wiki/Delta\\_de\\_Dirac](http://es.wikipedia.org/wiki/Delta_de_Dirac).

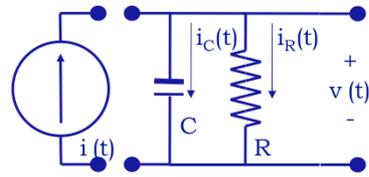
## Generalidades sobre sistemas

### Interconexión de sistemas:

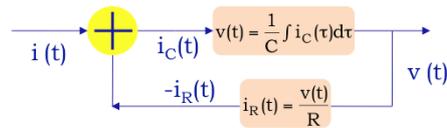
- ◆ Cascada.
- ◆ Paralelo.
- ◆ Realimentado.
- ◆ ...

### Clasificación de sistemas:

- ◆ Estables e inestables.
- ◆ Invertibles e inversos.
- ◆ Con y sin memoria
- ◆ Causales y no causales.
- ◆ Invariantes y no invariantes con el tiempo.
- ◆ Lineales y no lineales.



ejemplo de sistema realimentado



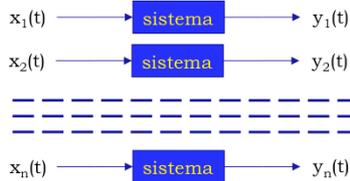
### Sistemas lineales invariantes con el tiempo (LTI, *linear time invariant*):

- ◆ Un sistema es LTI si su comportamiento y sus características son fijas.
- ◆ Un sistema es LTI si un desplazamiento temporal en la entrada causa un desplazamiento temporal en la salida.
- ◆ Nos referiremos exclusivamente a sistemas LTI.

Para explicaciones complementarias sobre interconexión de sistemas puede consultarse el epígrafe *Agrupaciones de cuadripolos* en el tema relativo a cuadripolos.

## Principio de superposición

Dado un sistema,  
la aplicación de distintas entradas  
origina distintas salidas.



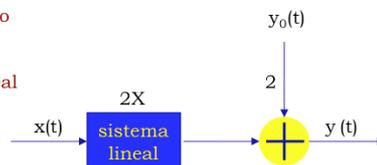
Un sistema es lineal si una combinación lineal  
de las entradas  
provoca la misma combinación lineal de las salidas  
(se cumple el principio de superposición).

$$a_1x_1(t) + a_2x_2(t) + \dots + a_nx_n(t) \longrightarrow \text{sistema} \longrightarrow a_1y_1(t) + a_2y_2(t) + \dots + a_ny_n(t)$$

En un sistema lineal,  
la salida es nula  
si la entrada también lo es.

Por ejemplo, el sistema  
 $y(t) = 2x(t) + 2$   
no es lineal.

Un sistema de este tipo  
puede sustituirse  
por un sistema  
incrementalmente lineal  
como el de la figura.

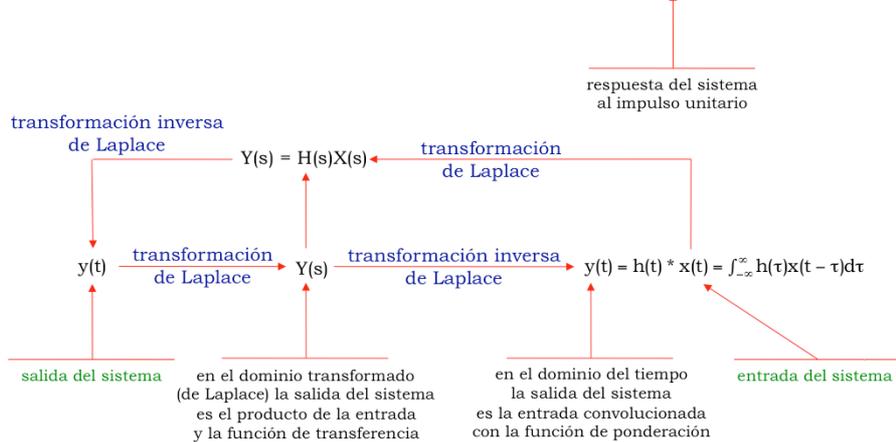


El orden correcto es decir que *un sistema es lineal si verifica el principio de superposición* en lugar de *en los sistemas lineales se cumple el principio de superposición*.

## Sistemas LTI

Los sistemas LTI se tratan mediante la transformación de Laplace y la convolución.

$$\text{función de transferencia : } H(s) = \frac{\text{salida}}{\text{entrada}} \Rightarrow h(t) : \text{función de ponderación}$$



Dpto. Teoría de la Señal y Comunicaciones / enrique.sanchez@uvigo.es / www.webs.uvigo.es

La definición de la función de transferencia requiere la especificación previa de los dos terminales en los que se toma la salida del sistema.

Las denominaciones *función de ponderación* y *respuesta al impulso (unitario)* son equivalentes, pero en teoría de sistemas lineales suele utilizarse más la segunda.

En este texto no consideraremos la convolución. En consecuencia, el cálculo de la salida de un sistema a partir de la entrada y la función de transferencia del mismo ha de hacerse necesariamente recurriendo a la transformación de Laplace.