UVigo / E. Ing. Telecomunicación / Análisis de circuitos lineales / Tema VI: Transformación de Laplace 131

Tema VI: Transformación de Laplace

Definición
Funciones transformadas de Laplace
Transformación inversa
Circuitos equivalentes en el dominio *s*
Función de transferencia

- La transformación de Laplace proporciona una técnica alternativa a los problemas de análisis de circuitos resueltos con la teoría convencional.
- Es más general y sistemática que la teoría convencional, pero entraña mayor complejidad matemática.
- Estudiaremos la transformación de Laplace teniendo en cuenta las restricciones y condiciones particulares que impone la teoría de circuitos.

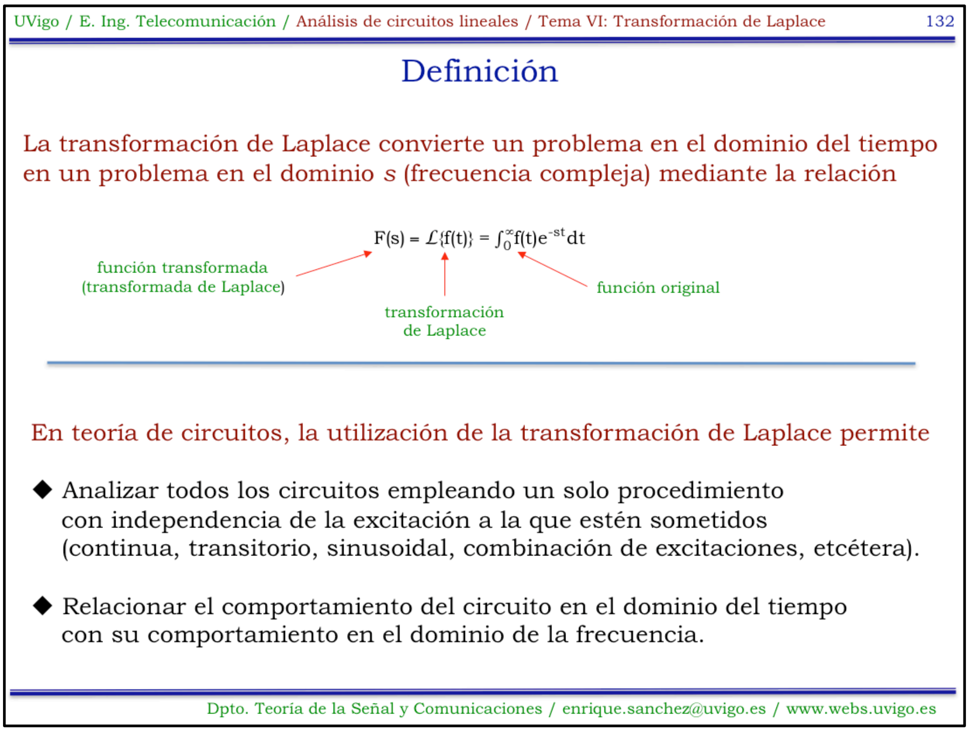
Dpto. Teoría de la Señal y Comunicaciones / enrique.sanchez@uvigo.es / www.webs.uvigo.es

La técnica convencional de análisis de circuitos está basada en la utilización de las leyes de Kirchhoff y las relaciones funcionales de los elementos. En este texto se ha utilizado para estudiar los casos de regímenes permanentes continuo y sinusoidal. No se ha indicado cómo utilizarla en otros casos de regímenes permanentes (como, por ejemplo, aquél en el que la excitación está constituida por un tren de pulsos de idéntica duración y equiespaciados en el tiempo). Para afrontar tales casos puede utilizarse el análisis basado en la transformación de Laplace.

Pero la transformación de Laplace también puede utilizarse en los casos ya conocidos de regímenes permanentes continuo y sinusoidal, tal y como se verá en el desarrollo del tema. Análogamente, también puede emplearse en el estudio del régimen transitorio entre dos regímenes permanentes cualesquiera.

La elección entre el análisis convencional y el basado en la transformación de Laplace está condicionada por la mayor o menor complejidad de las matemáticas asociadas a cada una de las opciones.

Un inconveniente de la técnica basada en la transformación de Laplace es que está más alejada que la convencional de la realidad física. Así, en la última es relativamente sencillo determinar las influencias que ejercen en un circuito las resistencias o los elementos reactivos. Por el contrario, en la utilización de la transformación de Laplace esa determinación sólo puede hacerse tras estudiar las características de las funciones matemáticas resultantes del análisis del circuito.



En realidad, en la definición de la transformación de Laplace la integral va desde $-\infty$ a ∞ (transformación bilateral). La versión indicada en la diapositiva es la denominada *transformación unilateral*. En este texto se utiliza esta versión exclusivamente, con objeto de simplificar en lo posible el tratamiento matemático, con lo que en muchas ocasiones se omite la mención explícita de esta circunstancia.

La utilización de la transformación unilateral implica que cualquier función matemática considerada en relación con aquélla tiene un valor nulo para todo $t \leq 0$. En la práctica ello no supone una restricción significativa, ya que siempre puede elegirse el origen de tiempos en el instante que mejor convenga para la resolución de un problema dado.

Pierre-Simon Laplace (1749-1827) fue un astrónomo, físico y matemático francés, conocido fundamentalmente por el desarrollo de la transformación y la ecuación que llevan su nombre. Está considerado uno de los matemáticos más relevantes de todos los tiempos. Véase, por ejemplo, http://es.wikipedia.org/wiki/Pierre_Simon_Laplace.

Funciones transformadas de Laplace (J. W. Nilsson)

	función matemática	transformada de Laplace
Delta de Dirac	$\delta(t)$	1
Escalón unitario	$u(t)$	$\frac{1}{s}$
Rampa	t	$\frac{1}{s^2}$
Exponencial	e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$
Seno	$\mathrm{sen}(\omega t)$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
Coseno	$\cos(\omega t)$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$
Rampa amortiguada	te^{-at}	$\frac{1}{(s+a)^2}$
Seno amortiguado	$e^{-at}\mathrm{sen}(\omega t)$	$\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$
Coseno amortiguado	$e^{-at}\cos(\omega t)$	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$

En todos los casos
$t < 0 \Rightarrow f(t) = 0$

Se indican las transformaciones de Laplace más habituales en análisis de circuitos.

Funciones transformadas de Laplace (continuación, J. W. Nilsson)

operación matemática	transformada de Laplace
$f(t)$	$F(s)$
$Kf(t)$	$KF(s)$
$\sum_{\text{algebraica}} f_i(t)$	$\sum_{\text{algebraica}} F_i(s)$
$\dfrac{d^n f(t)}{dt^n}$	$s^n F(s) - s^{n-1} f(t)\Big\|_{t=0^-} - s^{n-2}\dfrac{df(t)}{dt}\Big\|_{t=0^-} \cdots - \dfrac{d^{n-1}f(t)}{dt^{n-1}}\Big\|_{t=0^-}$
$\int_0^t f(\tau)d\tau$	$\dfrac{F(s)}{s}$
$f(t-t_0)u(t-t_0) \quad (t_0 > 0)$	$e^{-st_0}F(s)$
$e^{-at}f(t)$	$F(s+a)$
$f(at) \quad a > 0$	$\dfrac{1}{a}F\left(\dfrac{s}{a}\right)$
$tf(t)$	$-\dfrac{dF(s)}{ds}$
$t^n f(t)$	$(-1)^n \dfrac{d^n F(s)}{ds^n}$
$\dfrac{f(t)}{t}$	$\int_s^\infty F(\varsigma)d\varsigma$

Ejemplo: transformada de Laplace de $y(t) = t^2\cos(\omega t)$.

$$y(t) = t^n f(t) \quad n = 2$$

$$f(t) = \cos(\omega t) \;\Rightarrow\; F(s) = \frac{s}{s^2+\omega^2}$$

$$y(t) \;\Rightarrow\; Y(s) = (-1)^n \frac{d^n F(s)}{ds^n} = \frac{2s(s^2-3\omega^2)}{(s^2+\omega^2)^3}$$

Estudiaremos únicamente los casos en que la función es nula para valores negativos del tiempo (condiciones iniciales nulas).

La transformación de Laplace no verifica la propiedad asociativa del producto. Es decir

$$\mathcal{L}\{x(t)y(t)z(t)\} \neq \mathcal{L}\{x(t)\} \times \mathcal{L}\{y(t)z(t)\}$$

Compruébese, por ejemplo, agrupando de diversas formas las funciones $x(t) = t$, $y(t) = e^{-at}$ y $z(t) = \cos(\omega t)$.

Ello es debido a que, siguiendo lo que se indicó en la última diapositiva del tema anterior, un producto de transformadas se corresponde con una convolución en el dominio del tiempo.

UVigo / E. Ing. Telecomunicación / Análisis de circuitos lineales / Tema VI: Transformación de Laplace 135

Transformación inversa de Laplace

Se trata de obtener f(t) siendo conocida la expresión de F(s);
es decir, de pasar del dominio de la frecuencia compleja al dominio del tiempo.

$$\text{Expresión general}: F(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_0}{b_d s^d + b_{d-1} s^{d-1} + \cdots + b_0}$$

- a_i (i = 0, 1, 2, … , n) y b_j (j = 0, 1, 2, … , d) son números reales.
- n y d son números naturales.
- Si d > n, F(s) es una función racional propia.
- Si d ≤ n, F(s) es una función racional impropia.

Transformadas inversas de funciones racionales propias

- Se obtienen las raíces (s_1, s_2, … , s_d) de la ecuación D(s) = 0.
- Las raíces son complejas en general y de la forma $s_j = -\alpha_j + j\beta_j$ ($\alpha_j > 0$).
- Se descompone la expresión general en fracciones simples.

$$\text{Expresión general}: F(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{K_1}{s - s_1} + \frac{K_2}{s - s_2} + \cdots + \frac{K_{j1}}{s - s_j} + \cdots + \frac{K_{jp}}{(s - s_j)^p} + \cdots + \frac{K_d}{s - s_d}$$

raíz múltiple de orden p

- Se calculan los coeficientes K_j.
- Se obtienen las expresiones temporales correspondientes a las distintas fracciones simples (es decir, las transformadas inversas correspondientes a las fracciones simples).

Dpto. Teoría de la Señal y Comunicaciones / enrique.sanchez@uvigo.es / www.webs.uvigo.es

Es decir, se trata de determinar la función f(t) que al sufrir la transformación unilateral de Laplace da origen a la función transformada F(s).

En otras palabras, el paso de f(t) a F(s) equivale a pasar del dominio temporal al dominio *s* (o dominio de la transformación de Laplace, o dominio de la frecuencia compleja). Lo que se pretende ahora es realizar el paso inverso; es decir, pasar del dominio transformado (o de la frecuencia compleja) al dominio temporal.

UVigo / E. Ing. Telecomunicación / Análisis de circuitos lineales / Tema VI: Transformación de Laplace 136

Transformación inversa de Laplace (continuación)

Transformación de las fracciones correspondientes a raíces reales simples

s_j raíz real simple $\Rightarrow K_j = \{(s - s_j)F(s)\}_{s=s_j} = \left\{\frac{N(s)(s - s_j)}{D(s)}\right\}_{s=s_j} \Rightarrow \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{K_j}{s - s_j}\right\} = K_j e^{s_j t}$

Ha de verificarse $s_j < 0$

Ejemplo

Se trata de obtener la transformada inversa de Laplace de $F(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{1}{s^2 + 3s + 2}$

raíces

$$D(s) = s^2 + 3s + 2 = 0 \Rightarrow \left| \begin{matrix} s_1 = -1 \\ s_2 = -2 \end{matrix} \right| \Rightarrow F(s) = \frac{K_1}{s - s_1} + \frac{K_2}{s - s_2}$$

$$K_1 = \left[\frac{(s - s_1)N(s)}{D(s)}\right]_{s=s_1} = \left[\frac{N(s)}{s - s_2}\right]_{s=s_1} = 1 \qquad K_2 = \left[\frac{(s - s_2)N(s)}{D(s)}\right]_{s=s_2} = \left[\frac{N(s)}{s - s_1}\right]_{s=s_2} = -1$$

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s + 1}\right\} - \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s + 2}\right\} = (e^{-t} - e^{-2t})u(t)$$

Dpto. Teoría de la Señal y Comunicaciones / enrique.sanchez@uvigo.es / www.webs.uvigo.es

Las funciones temporales que son las transformadas inversas de las dos fracciones simples se obtienen directamente de las tablas de transformaciones que se indicaron anteriormente.

La función u(t) que multiplica el segundo miembro de la última expresión es únicamente un recordatorio de que se está haciendo referencia a transformaciones unilaterales.

Obsérvese que la transformada inversa de Laplace de una función susceptible de ser descompuesta en una suma de fracciones simples es una función en el dominio del tiempo que es la misma suma de funciones exponenciales.

Transformación inversa de Laplace (continuación)

Transformación de las fracciones correspondientes a raíces complejas simples

En la resolución de la ecuación D(s) = 0 las raíces complejas aparecen como pares conjugados ($s_j = -\alpha_j + j\beta_j$, $s_j^* = -\alpha_j - j\beta_j$) y los coeficientes correspondientes también son conjugados.
Para cada par de raíces conjugadas puede escribirse:

$$G_j(s) = \frac{K_j}{s + \alpha_j - j\beta_j} + \frac{K_j^*}{s + \alpha_j + j\beta_j} \Rightarrow K_j = \{(s - s_j)F(s)\}_{s=s_j} = \left\{\frac{N(s)(s - s_j)}{D(s)}\right\}_{s=s_j} = |K_j| e^{j\theta_j} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}^{-1}\{G_j(s)\} = 2|K_j| e^{-\alpha_j t}\cos(\beta_j t + \theta_j)$$

Ejemplo

Se trata de obtener la transformada inversa de Laplace de $F(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{2s + 4}{s^2 + 2s + 2}$

raíces

$$D(s) = s^2 + 2s + 2 = 0 \Rightarrow \left| \begin{array}{l} s_1 = -1 + j \\ s_2 = -1 - j \end{array} \right| \Rightarrow F(s) = \frac{K_1}{s - s_1} + \frac{K_2}{s - s_2}$$

$$K = \left[\frac{(s - s_1)N(s)}{D(s)}\right]_{s=s_1} = \left[\frac{N(s)}{s - s_2}\right]_{s=s_1} = 1 - j \Rightarrow \left| \begin{array}{l} |K| = \sqrt{2} \\ \theta = -45\,° \end{array} \right.$$

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = 2|K| e^{-\alpha t}\cos(\beta t + \theta)u(t) = 2\sqrt{2}e^{-t}\cos[t(\text{rad}) - 45\,°]u(t)$$

Obsérvese que cada par de raíces complejas simples en una función en el dominio *s* da origen a una función sinusoidal amortiguada por una exponencial en el dominio temporal. Si la parte real de tales raíces es nula (α=0), no existe amortiguamiento y la expresión temporal es una función sinusoidal que se prolonga indefinidamente en el tiempo (régimen permanente).

UVigo / E. Ing. Telecomunicación / Análisis de circuitos lineales / Tema VI: Transformación de Laplace 138

Transformación inversa de Laplace (continuación)

Transformación de las fracciones correspondientes a raíces (reales o complejas) múltiples

$$G_j(s) = \frac{K_{j1}}{s - s_j} + \cdots + \frac{K_{jp}}{(s - s_j)^p} \Rightarrow \quad K_{jp} = \{(s - s_j)^p F(s)\}_{s=s_j}$$

$$K_{jy} \ (y = 1, 2, \cdots p - 1) = \left\{ \frac{d^{p-y}[(s - s_j)^p F(s)]}{ds^{p-y}} \right\}$$

$$s_j \text{ real} \Rightarrow \mathcal{L}^{-1}\left\{ \frac{K_{jy}}{(s - s_j)^y} \right\} = \frac{K_{jy} t^{y-1} e^{s_j t}}{(y-1)!} \qquad s_j \text{ compleja} \Rightarrow \mathcal{L}^{-1}\left\{ \frac{K_{jy}}{(s - s_j)^y} \right\} = \frac{2|K_{jy}| t^{y-1} e^{-\alpha_j t}}{(y-1)!} \cos(\beta_j t + \theta_j)$$

Caso particular: $Kte^{st} \Leftarrow y = 2 \Rightarrow 2|K| te^{-\alpha t} \cos(\beta t + \theta)$

Ejemplo

Se trata de obtener la transformada inversa de Laplace de $F(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{10^6 s}{s^2 + 2 \times 10^6 s + 10^{12}}$

raíz doble

$$D(s) = s^2 + 2 \times 10^6 s + 10^{12} = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} s_1 = -10^6 \\ s_2 = -10^6 \end{vmatrix} \Rightarrow F(s) = \frac{K_1}{s - s_1} + \frac{K_2}{(s - s_1)^2}$$

$$K_1 = \left\{ \frac{d[(s - s_1)^2 F(s)]}{ds} \right\}_{s=s_1} = 10^6 \qquad K_2 = \{(s - s_1)^2 F(s)\}_{s=s_1} = .10^{12}$$

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = (10^6 e^{-10^6 t} - 10^{12} te^{-10^6 t})u(t)$$

Dpto. Teoría de la Señal y Comunicaciones / enrique.sanchez@uvigo.es / www.webs.uvigo.es

Obsérvese que cada incremento en el orden de la raíz múltiple significa una potencia un orden más alto del tiempo, potencia que multiplica a la expresión correspondiente a la raíz simple (tanto real como compleja).

Transformación inversa de Laplace (continuación)

Transformaciones inversas de funciones racionales impropias

dividiendo numerador y denominador $F(s) = \dfrac{N_{imp}(s)}{D(s)} = c_{n-d}s^{n-d} + c_{n-d-1}s^{n-d-1} + \cdots c_0 + \dfrac{N(s)}{D(s)}$

transformadas de Laplace de distintos términos $\mathcal{L}^{-1}\{c_y s^y\} = c_y \dfrac{d^y\delta(t)}{dt^y}$ $\quad \mathcal{L}^{-1}\{c_0\} = c_0\delta(t)$

función racional propia que se trata como se indicó antes

Ejemplo

Se trata de obtener la transformada inversa de Laplace de

$$G(s) = \frac{N_{imp}(s)}{D(s)} = \frac{4s^3 + 8s^2 + 8s + 4}{s^2 + 2s + 2} = 4s + \frac{4}{s^2 + 2s + 2} = 4s + \frac{N(s)}{D(s)} = 4s + F(s)$$

$$g(t) = \mathcal{L}^{-1}\{G(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\{4s\} + \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = \left\{4\frac{d\delta(t)}{dt} + 4e^{-t}\cos[t(rad) - 90°]\right\}u(t)$$

El procedimiento indicado en esta diapositiva consiste, en esencia, en eliminar de la función todos los términos que son de un orden igual o superior al orden del denominador. Lo que queda es una fracción racional propia, que se trata conforme a los procedimientos expuestos anteriormente. Los términos que han sido eliminados dan lugar a transformadas inversas (funciones temporales) que son función de la delta de Dirac y sus derivadas.

En el ejemplo la función racional propia que queda tiene un par de raíces complejas conjugadas, con lo que su transformada inversa es una función sinusoidal amortiguada. Para obtener las transformadas correspondientes a los términos eliminados de la función racional impropia se aplican las expresiones indicadas en la parte superior de la diapositiva. Obsérvese que no se incluye un término que sea de la forma de una constante multiplicando a la delta. Ello se debe a que dicha constante, como puede verse en el proceso de división entre numerador y denominador, es nula.

Ejercicios de autoevaluación

Se desea establecer la correspondencia entre las funciones en el dominio *s* y las transformadas inversas de Laplace unilaterales.

1	$\dfrac{4s^2 + 8s + 6}{s^3 + 4s^2 + 3s}$	$4te^{-t}u(t)$	**a**	1 ➔ c
2	$\dfrac{4}{s^2 + 2s + 1}$	$2e^{-4t}\cos(5t)u(t)$	**b**	2 ➔ a
3	$\dfrac{2s + 8}{s^2 + 8s + 41}$	$(2 - e^{-t} + 3e^{-3t})u(t)$	**c**	3 ➔ b
4	$\dfrac{2s^2 + 6s + 8}{s^2 + 2s + 2}$	$2\delta(t) + 2\sqrt{2}e^{-t}\cos[t(\text{rad}) - 45\,°]u(t)$	**d**	4 ➔ d

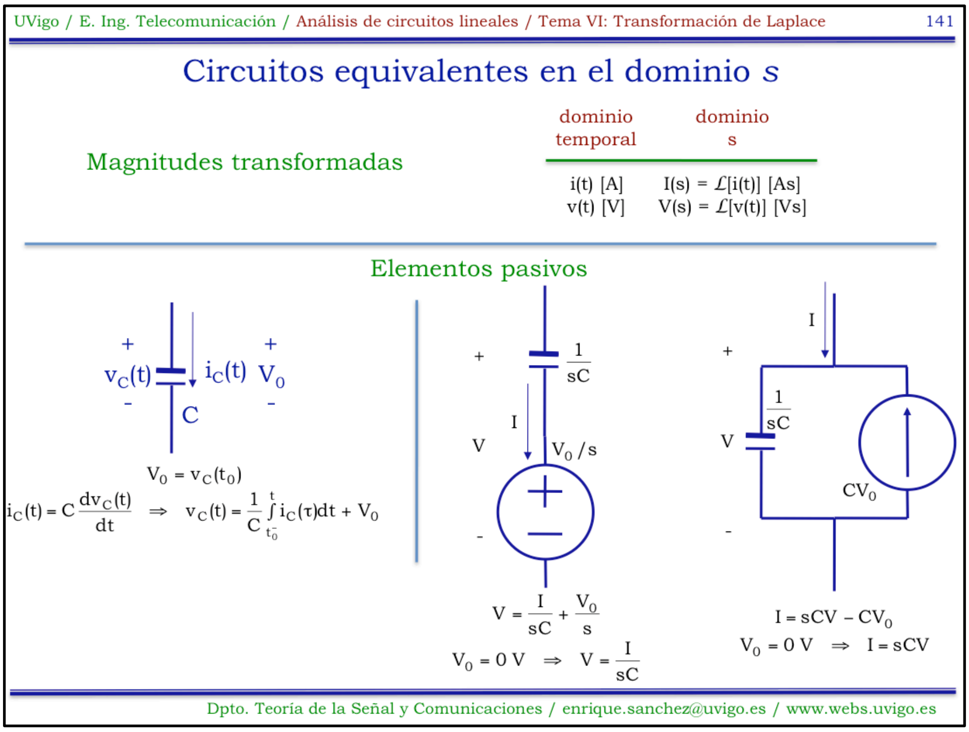
Las distintas transformadas inversas pueden obtenerse aplicando los procedimientos detallados en las diapositivas anteriores. Pero también puede analizarse la situación antes de aplicar las matemáticas con objeto de conseguir alguna orientación sobre el resultado que se está buscando. Esto es precisamente lo que se hace en los párrafos que siguen.

La transformada inversa de **1** no puede ser **a** porque la presencia del factor *t* en esta expresión indica que la función en el dominio *s* tiene al menos una raíz doble; sin embargo, ése no es el caso, porque las raíces de dicha función son 0, -1 y -3. Tampoco puede ser **b**, porque esta expresión indica una transformación con raíces complejas. Y tampoco puede ser **d** porque la presencia de la delta hace referencia a una función racional impropia, que no es el caso de **1**.

La expresión **2** tiene una raíz doble, lo cual exige que en la transformada haya un factor *t*. La única expresión que cumple este requisito es la **a**.

La expresión **3** tiene raíces complejas y es una función racional propia. Ello exige la presencia de una función sinusoidal y la ausencia de cualquier término en el que aparezcan la delta o sus derivadas. La única expresión que reúne ambos requisitos es la **b**.

La expresión **4** es una función racional impropia, por lo que en su transformada inversa deberá existir al menos una referencia a la función delta o sus derivadas. Ello se verifica en la expresión **d**.



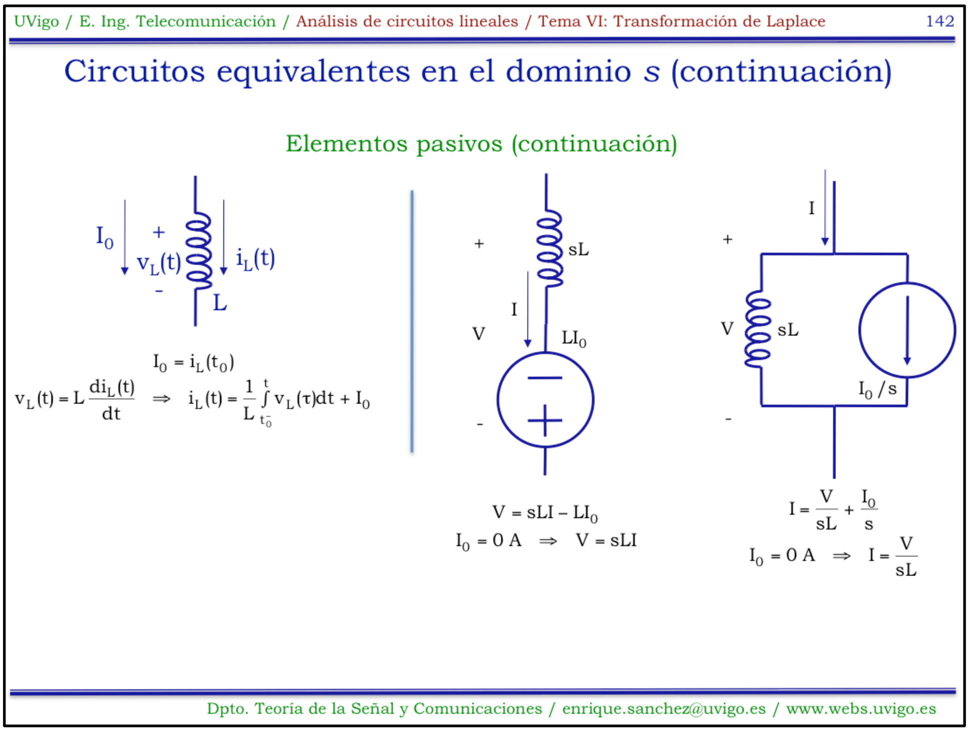
La caracterización de circuitos lineales en el dominio *s* tiene dos aspectos, de forma análoga a la correspondiente cuando se presentó el régimen sinusoidal permanente. Ahora las magnitudes fundamentales (la corriente y la tensión) no son representadas en términos de fasores, sino mediante sus transformadas de Laplace.

Por su parte, los distintos elementos pasivos no son caracterizados mediante sus impedancias, sino aplicando la transformación de Laplace a sus correspondientes relaciones funcionales. De este modo, la representación de la resistencia en el dominio *s* sigue siendo R; la de la capacidad, pasa a ser 1/(sC), y la de la inductancia, sL. Estas tres representaciones suelen ser designadas globalmente como *impedancias generalizadas*.

Utilizando este concepto, la relación básica entre las magnitudes fundamentales y los elementos pasivos está dada por la *ley de Ohm generalizada*; es decir, la transformada de la tensión en un elemento es el producto de la impedancia generalizada de dicho elemento por la transformada de la corriente.

De acuerdo con este planteamiento, el análisis de cualquier circuito utilizando la transformación de Laplace se hace de la forma indicada en el régimen sinusoidal permanente, pero teniendo en cuenta las diferencias que se acaban de apuntar. Así, puede hablarse de agrupaciones de elementos, circuitos equivalentes, simplificaciones de las leyes de Kirchhoff, etcétera.

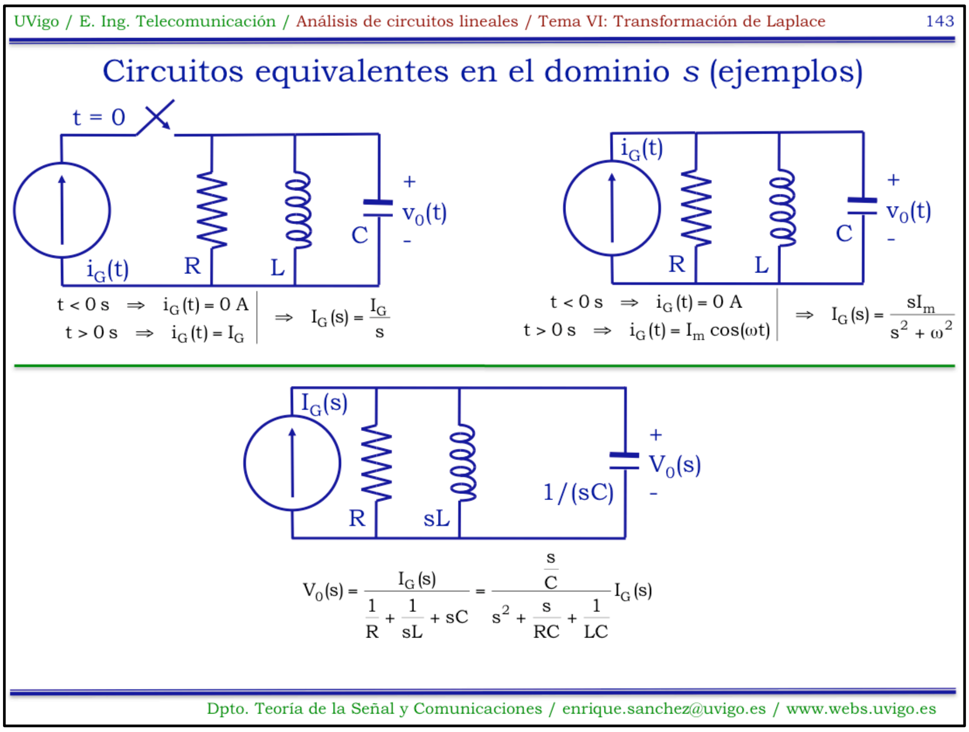
Obsérvese que este procedimiento puede ser aplicado, sin cambios, a cualquier régimen de funcionamiento del circuito y que se elimina la necesidad de utilizar números complejos.



Esta diapositiva y la anterior muestran la caracterización de los elementos reactivos en el dominio *s*. Obsérvese que cada elemento puede ser caracterizado de dos formas distintas (en serie y en paralelo), aunque completamente equivalentes entre sí.

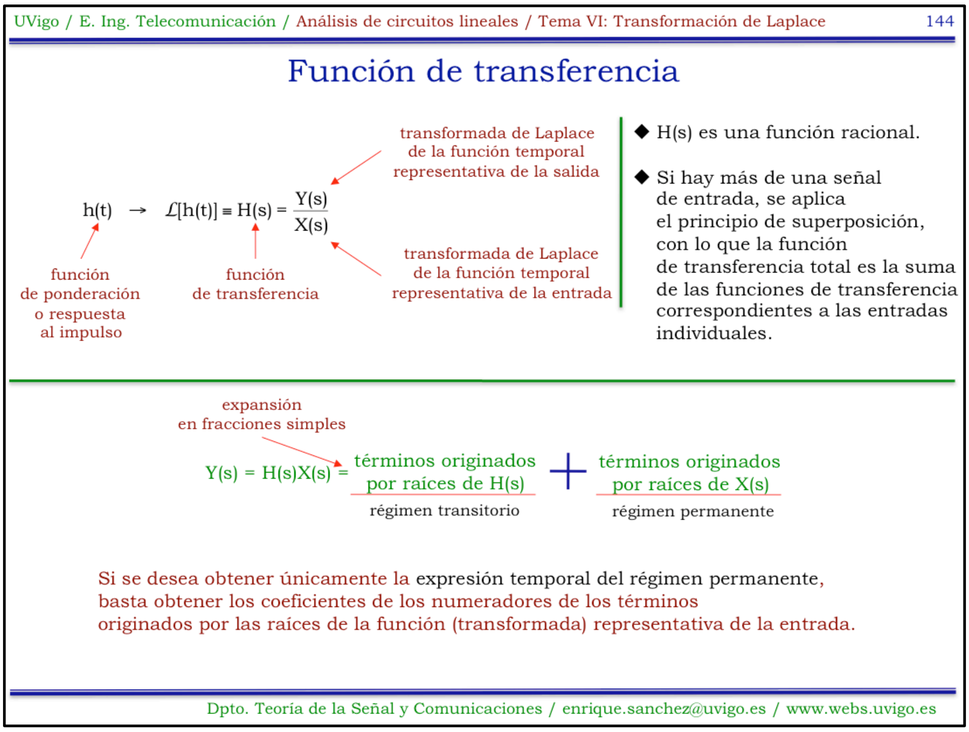
Obsérvese también que la caracterización incluye los valores iniciales (V_0, tensión inicial en la capacidad; I_0, corriente inicial en la inductancia) de las magnitudes en los elementos. Ahora bien, en este texto y por razones de sencillez matemática se supondrá en todo momento que tales valores iniciales son nulos, con lo que efectivamente puede hablarse de las impedancias generalizadas a las que se hizo referencia en la diapositiva anterior.

Recuérdese también que en todo momento se está haciendo referencia a transformaciones de Laplace unilaterales. Es decir, para t<0 en el circuito no hay ni excitación, ni energía almacenada.



La diapositiva muestra la forma genérica de proceder cuando se pretende analizar un circuito utilizando la transformación de Laplace. Se empieza por sustituir las magnitudes características de las fuentes por sus correspondientes transformadas y se continúa reemplazando los elementos pasivos por las correspondientes impedancias generalizadas. Una vez definido el circuito en el dominio *s*, se calcula la magnitud de interés y se determina su correspondiente transformada inversa, (expresión temporal o instantánea) de la respuesta. Así, en la parte inferior se muestra cómo calcular la tensión de salida (es simplemente el producto de la corriente del generador por la impedancia total del circuito; y ésta es el resultado de agrupar tres impedancias individuales en paralelo).

Si se recurre al análisis mediante la transformación de Laplace, los elementos pasivos del circuito han de ser caracterizados una sola vez, con independencia de la excitación a la que aquél vaya a ser sometido. Hasta este punto del texto, esa caracterización única de los elementos pasivos no era posible; por ejemplo, había una caracterización en continua, otra en régimen transitorio y una tercera, distinta de las anteriores, en régimen sinusoidal permanente. Ahora la caracterización es siempre la misma y lo único que hay que modificar si cambia la situación es la transformada de Laplace de la excitación. Así, en la figura se muestran la caracterización global (parte inferior) y las transformadas de la excitación en los casos de régimen continuo y régimen sinusoidal permanente (parte superior). Dependiendo de la situación concreta que interese considerar, así será la función en el dominio *s* que habrá que utilizar en la última expresión de la parte inferior.



Como puede observarse y como se desprende de la última diapositiva del tema anterior, la expresión temporal correspondiente a la salida de un circuito puede calcularse de dos formas:

a) Si se conoce la respuesta al impulso unitario (o función de ponderación), puede obtenerse lo que se denomina *función de transferencia* simplemente hallando la transformada de Laplace de aquélla. Conocida la función de transferencia, la salida es el producto (siempre en el dominio *s*) de aquélla por la transformada de Laplace de la señal de entrada. Hallada la salida, una transformación inversa proporciona su correspondiente expresión temporal.

b) Si no se desea pasar por la transformación de Laplace, la expresión temporal que da directamente la salida es la *convolución* de la respuesta al impulso por la expresión temporal correspondiente a la señal de entrada.

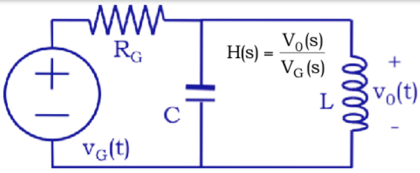
Utilizando el primero de los procedimientos indicados puede observarse que la salida (en el dominio *s*) es la suma de términos que se extinguen cuando ha pasado cierto tiempo y otros términos que duran indefinidamente. Los primeros caracterizan el régimen transitorio de la salida, y los segundos, su régimen permanente.

Si únicamente interesa conocer uno de los dos regímenes no es necesario tener en cuenta todos los términos de la descomposición de la salida en fracciones simples, sino sólo los que dan origen al régimen de interés de acuerdo con la expresión mostrada en la diapositiva.

Ejercicios de autoevaluación

Se desea obtener las funciones de transferencia en los circuitos indicados.

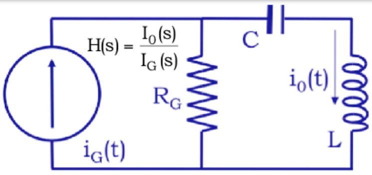
1



$R_G = 1\,\Omega$ $L = 1\,H$ $C = 1\,F$

$$H(s) = \frac{V_0(s)}{V_G(s)} = \frac{s}{s^2 + s + 1}$$

2



$R_G = 1\,\Omega$ $L = 0.1\,H$ $C = 10\,F$

$$H(s) = \frac{I_0(s)}{I_G(s)} = \frac{10s}{s^2 + 10s + 1}$$

Ejercicio 1.

$$\frac{V_0(s)}{V_G(s)} = \frac{\dfrac{sL\dfrac{1}{sC}}{sL + \dfrac{1}{sC}}}{R_G + \dfrac{sL\dfrac{1}{sC}}{sL + \dfrac{1}{sC}}} = \frac{sL}{s^2R_GLC + sL + R_G}$$

Ejercicio 2.

$$\frac{I_0(s)}{I_G(s)} = \frac{R_G}{R_G + \dfrac{1}{sC} + sL} = \frac{sR_GC}{s^2LC + sR_GC + 1}$$

Función de transferencia (continuación)

Función de transferencia en régimen sinusoidal permanente

$$x(t) = A\cos(\omega t + \varphi) \;\Rightarrow\; Y(s) = H(s)\underbrace{\frac{A[s\cos(\varphi) - \omega\,\mathrm{sen}(\varphi)]}{s^2 + \omega^2}}_{X(s)} = G(s) + \frac{K}{s - j\omega} + \frac{K^*}{s + j\omega}$$

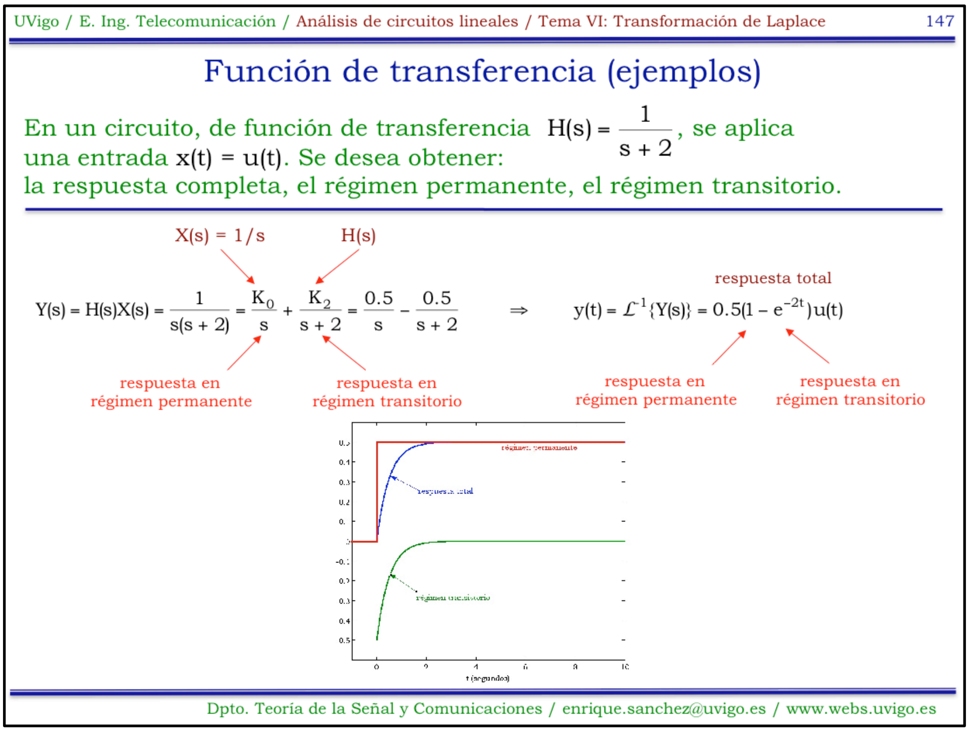
- Función originada por H(s).
- Corresponde al régimen transitorio.
- Su presencia es ignorada.

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{K}{s - j\omega} + \frac{K^*}{s + j\omega}\right] = y(t)_{\text{permanente}} = A\left|H(s)\right|_{s=j\omega}\cos[\omega t + \varphi + \theta(s)_{s=j\omega}]$$

$$H(s) = \left|H(s)\right|_{\angle\theta(s)}$$

Ampliando lo dicho anteriormente sobre la función de transferencia en esta diapositiva se muestra el caso particular de que la excitación corresponda al régimen sinusoidal permanente. La aplicación del procedimiento señalado (transformada de la salida igual al producto de la función de transferencia por la transformada de la entrada) se llega a una suma de funciones de *s*. Una parte de esa suma es originada por las raíces de la función de transferencia y define el régimen transitorio que se establece antes de que el régimen sinusoidal se haga permanente. La parte restante consta de dos fracciones originadas por las raíces complejas de la transformada de la señal de entrada y define la situación en régimen sinusoidal permanente. Si el interés radica únicamente en éste, la correspondiente expresión temporal puede determinarse utilizando la expresión indicada en la diapositiva. Obsérvese que en la aludida expresión temporal figuran el módulo y la fase de la función de transferencia en el caso particular de que la variable *s* sea sustituida por $j\omega$.

Obsérvese que este tratamiento permite resolver completamente el primer problema planteado al tratar el régimen sinusoidal permanente, problema consistente en determinar la naturaleza de la respuesta a una excitación sinusoidal permanente. En el cálculo aparecía un término representativo del régimen transitorio, que se ignoraba para evitar la resolución de una ecuación diferencial de cierta complejidad. Ahora la consideración o no de dicho régimen transitorio está dictada por el interés particular de un circuito dado y no porque se dispongan o no de las herramientas matemáticas adecuadas.



Obsérvese que las fracciones (en el dominio *s*) que corresponden a la entrada y la respuesta al impulso no coinciden con la transformada de la entrada y la función de transferencia. La combinación de ambos factores en el producto que da la salida hace que se mantengan las raíces (y que cada una de éstas pueda ser asociada a su origen respectivo), pero no los numeradores.

Es importante distinguir entre los tres tipos de respuestas que se están manejando: la respuesta en régimen transitorio (que sólo dura un cierto tiempo), la respuesta en régimen permanente (que dura indefinidamente) y la respuesta total (que engloba los dos regímenes que se acaban de mencionar).

Se sugiere comparar lo indicado en esta diapositiva con lo expuesto al tratar de la respuesta forzada en un circuito RC (tema II: régimen transitorio, diapositiva 44).

Función de transferencia (ejemplos)

En un circuito, de función de transferencia $H(s) = \dfrac{1}{s + 2\times 10^3}$, se aplica una entrada $x(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$, con $A = 2\times 10^3$, $\omega = 10^3$ rad/s y $\varphi = 45$ °. Se desea obtener: la respuesta completa, el régimen permanente, el régimen transitorio.

H(s)

términos debidos a X(s)

$$Y(s) = H(s)X(s) = \frac{K_2}{s+2} + \frac{K}{s - j10^3} + \frac{K^*}{s + j10^3}$$

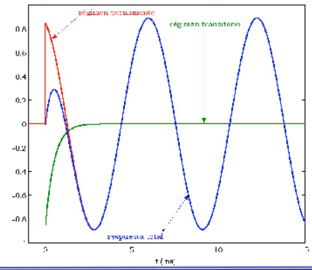
respuesta en régimen transitorio

respuesta en régimen permanente

$$H(s)\big|_{s=j\omega} = \frac{1}{2\times 10^3 + j10^3} \Rightarrow \quad \left|H(s)\right|_{s=j\omega} = \frac{10^{-3}}{\sqrt{5}}, \quad \theta(s)_{s=j\omega} = -\operatorname{arctg}(0.5)$$

$$y(t) = \left\{-\frac{3\sqrt{2}}{5}e^{-2t} + \frac{2}{\sqrt{5}}\cos\{[t + \frac{\pi}{4} - \operatorname{arctg}(0.5)]\text{rad}\}\right\}u(t) \qquad (\text{t en ms})$$

respuesta total



Obsérvese que la situación en la que la excitación es sinusoidal es un caso particular del general en el que hay una excitación que da origen a una respuesta transitoria y una respuesta en régimen permanente. Por tanto, la expresión que permite calcular la respuesta en régimen permanente es también particular; en otras palabras, sólo puede aplicarse al caso de excitación sinusoidal.

Función de transferencia (ejemplos)

En un circuito, la señal de entrada y la función de transferencia son

$$v_G(t) = A\cos(\omega t + \varphi) \qquad \text{siendo} \qquad \begin{array}{l} A = 3\ \text{V} \\ \omega = \sqrt{2}\times 10^3\ \text{rad/s} \\ \varphi = 45\,° \end{array} \qquad H(s) = \frac{2\times 10^6}{s^2 + 3\times 10^3 s + 2\times 10^6}$$

Se desea obtener la expresión temporal de la salida cuando el circuito funciona en régimen sinusoidal permanente.

$$H(j\omega) = H(s)\Big|_{s=j\omega} = \frac{2\times 10^6}{(2\times 10^6 - \omega^2) + j3\times 10^3\omega} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left| \begin{array}{l} |H(j\omega)| = \dfrac{2\times 10^6}{\sqrt{(2\times 10^6 - \omega^2)^2 + 9\times 10^6\omega^2}} \quad \Rightarrow \quad |H(j\omega)|\Big|_{\omega=\sqrt{2}\times 10^3} = \dfrac{\sqrt{2}}{3} \\ \theta(j\omega) = \theta_N - \theta_D = \operatorname{arctg}\dfrac{\operatorname{Im}\{num\}}{\operatorname{Re}\{num\}} - \operatorname{arctg}\dfrac{\operatorname{Im}\{den\}}{\operatorname{Re}\{den\}} = -\operatorname{arctg}\dfrac{3\times 10^3\omega}{2\times 10^6 - \omega^2} \quad \Rightarrow \quad \theta(j\omega)\Big|_{\omega=\sqrt{2}\times 10^3} = -90\,° \end{array} \right.$$

$$v_0(t)_{permanente} = A|H(j\omega)|\Big|_{\omega=\sqrt{2}\times 10^3} \cos[\omega t + \varphi + \theta(j\omega)_{\omega=\sqrt{2}\times 10^3}] = \sqrt{2}\cos[\sqrt{2}\times 10^3 t(\text{rad}) - 45\,°]\ \text{V}$$

Como puede observarse en este ejemplo, de acuerdo con las indicaciones del enunciado en el cálculo se prescinde directamente de la determinación del régimen transitorio. También se tiene en cuenta que la excitación es sinusoidal, con lo que es aplicable la expresión particular presentada para tal situación.