Tema VII:
Transformación de Fourier

Relaciones básicas
Series de Fourier
Transformación de Fourier

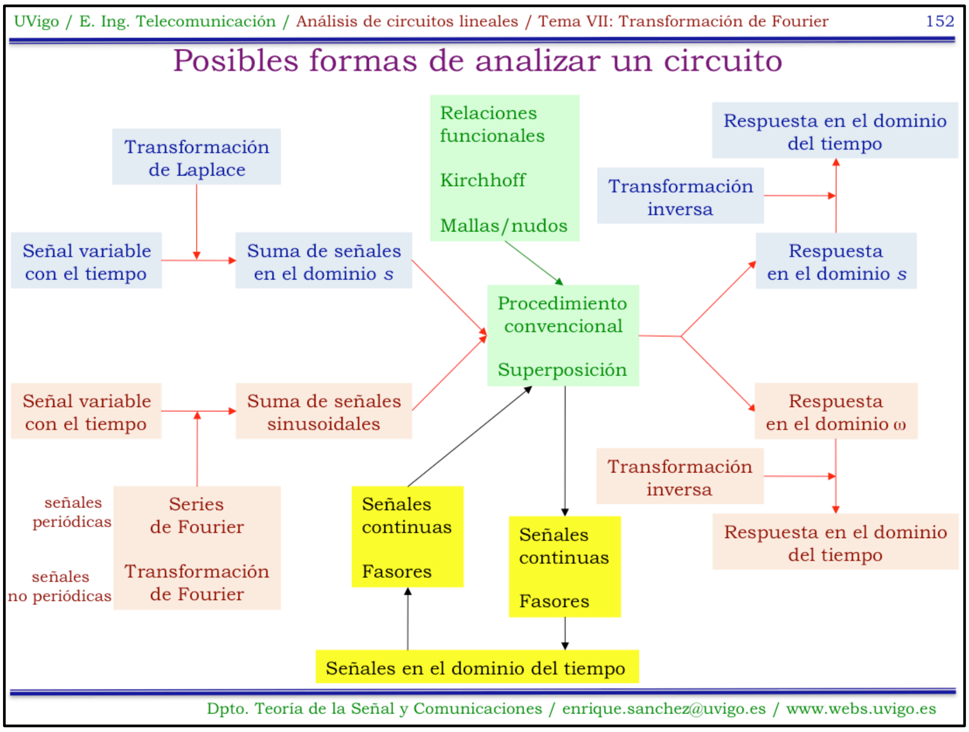
- La transformación de Fourier permite tratar señales en el dominio del tiempo mediante análisis en el dominio de la frecuencia.
- Las señales periódicas en el dominio del tiempo se transforman en sumas (series de Fourier) de señales sinusoidales de distintas frecuencias.
- Las señales no periódicas en el tiempo se transforman en un conjunto de señales cuyas frecuencias cubren un espectro continuo (transformación de Fourier).

La transformación de Laplace permite tratar cualquier señal en el dominio del tiempo mediante la formulación de dicha señal en el dominio complejo. Alternativamente, la transformación de Fourier expresa cualquier señal formulada en el dominio del tiempo como una combinación de señales sinusoidales.

Una vez obtenida esta combinación, cada una de las señales individuales puede ser tratada de acuerdo con lo expuesto al hablar del régimen sinusoidal permanente. La aplicación del principio de superposición permite considerar la señal en su totalidad. Finalmente, mediante la transformación inversa es posible obtener la respuesta de un circuito en el dominio del tiempo.

Con este planteamiento se distinguen dos tipos de señales en el dominio del tiempo. Las señales periódicas son tratadas con ayuda de las series de Fourier, mientras que las que varían con el tiempo de forma no periódica son objeto de consideración con ayuda de la transformación de Fourier propiamente dicha.

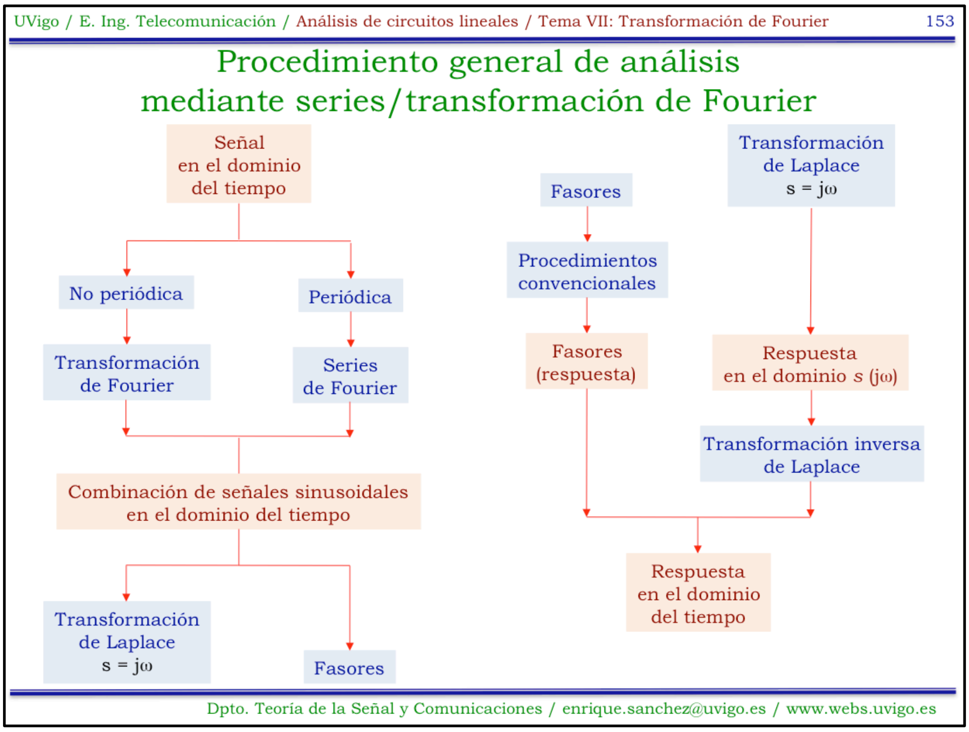
Jean-Baptiste Joseph Fourier (1768-1830) fue un matemático y físico francés, conocido fundamentalmente por el desarrollo de funciones periódicas en series trigonométricas; con este planteamiento consiguió resolver la ecuación del calor. También fue el primero en dar una explicación científica al efecto invernadero. Véase, por ejemplo, http://es.wikipedia.org/wiki/Joseph_Fourier.



En la realidad una señal que varía con el tiempo es aplicada a un circuito y se desea determinar la función temporal (respuesta) que representa la variación de la salida con el tiempo. La diapositiva resume las distintas posibilidades.

1. **Señales continuas o sinusoidales.** Pueden aplicarse directamente las reglas del análisis convencional de circuitos (utilizándose los fasores como paso intermedio en el caso de señales sinusoidales). Recuérdese que una señal continua es una señal que varía con el tiempo de una forma particular (permanece constante) y que una señal sinusoidal ya es directamente una señal variable (de acuerdo con la función *cos*) con el tiempo.

2. **Cualquier señal (incluyendo continuas o sinusoidales).** Podemos utilizar la transformación de Laplace o la de Fourier. La primera exige pasar la señal al dominio *s* y, una vez en él, aplicar los procedimientos convencionales de análisis de circuitos; se obtiene así la respuesta en el dominio *s*. La segunda exige pasar la señal al dominio de la frecuencia y aplicar a continuación los procedimientos convencionales de análisis de circuitos en régimen sinusoidal permanente; dependiendo de si las señales temporales son periódicas o no, el paso al dominio de la frecuencia se realiza de una forma u otra. Obtenidas las respuestas (en el dominio *s* en el caso de utilizar la transformación de Laplace, en el dominio de la frecuencia en el caso de utilizar la transformación de Fourier), se vuelve al dominio temporal utilizando las correspondientes transformaciones inversas.



La diapositiva muestra el procedimiento general que se aplica al análisis de circuitos sometidos a señales variables con el tiempo con ayuda de las series o la transformación de Fourier.

En lo que sigue se detallan los aspectos particulares de las series y la transformación de Fourier. Otros se suponen ya conocidos, como la forma de realizar la transformación de Laplace o la utilización de los procedimientos convencionales para determinar la respuesta de un circuito.

Queda a cargo del lector decidir cuál de las dos ramas mostradas en la diapositiva hay que aplicar en cada caso concreto.

Series de Fourier

Transformación de cualquier señal periódica en suma de funciones sinusoidales (desarrollo en serie)

Función periódica

Una función temporal es periódica si se cumple $f(t) = f(t \pm kT_0)$

k: número entero.
T_0: periodo de la función.
$\omega_0 = 2\pi/T_0$: frecuencia angular fundamental.
$k\omega_0$: frecuencia angular del armónico de orden k.

Forma trigonométrica de la serie de Fourier

$$f(t) = a_v + \sum_{k=1}^{\infty}[a_k \cos(k\omega_0 t) + b_k \mathrm{sen}(k\omega_0 t)]$$

Forma trigonométrica alternativa de la serie de Fourier

$$f(t) = a_v + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(k\omega_0 t - \varphi_k)$$

Forma exponencial de la serie de Fourier

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{jk\omega_0 t}$$

Valor eficaz (rms) de una función periódica

$$F_{rms} = \sqrt{a_v^2 + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{A_k}{\sqrt{2}}\right)^2} = \sqrt{C_0^2 + 2\sum_{k=1}^{\infty}|C_k|^2}$$

Potencia media en funciones periódicas

$$v(t) = a_{vv} + \sum_{k=1}^{\infty} A_{kv} \cos(k\omega_0 t - \varphi_{kv})$$

$$i(t) = a_{vi} + \sum_{k=1}^{\infty} A_{ki} \cos(k\omega_0 t - \varphi_{ki})$$

$$P = a_{vv} a_{vi} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_{kv} A_{ki}}{2} \cos(\varphi_{kv} - \varphi_{ki})$$

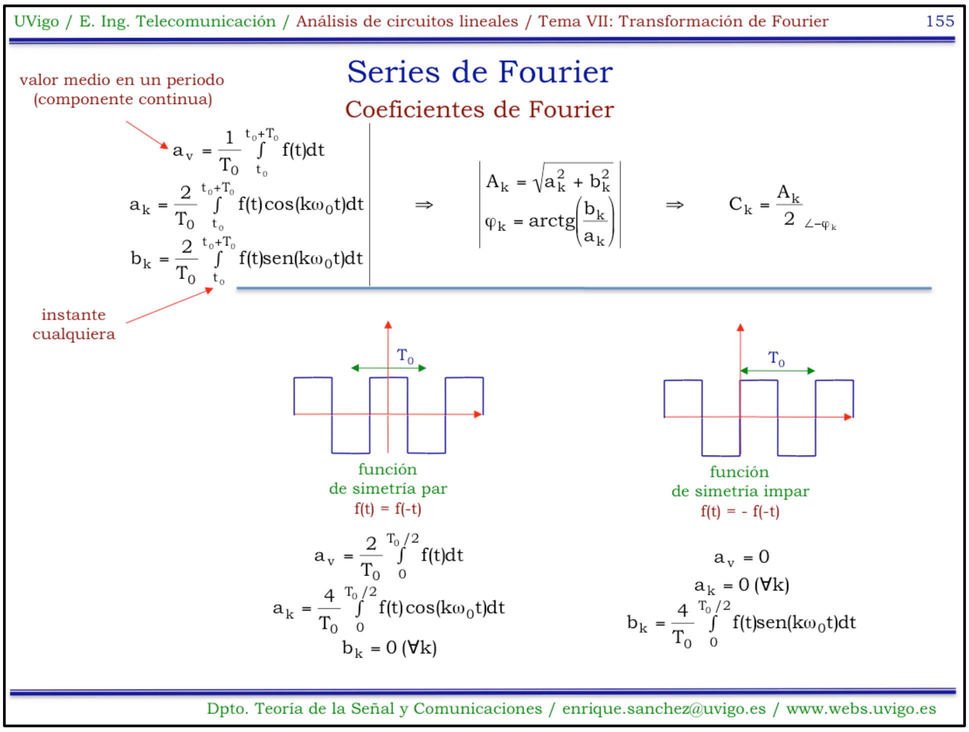
Los desarrollos en serie deben truncarse, causando un error tanto mayor cuanto menor sea el número de términos retenidos.

La diapositiva recoge la definición de función que varía periódicamente con el tiempo. Se trata de la misma definición que se ha utilizado anteriormente en otros temas.

Cuando k=1 se tiene la señal que suele denominarse *señal de frecuencia fundamental* o, abreviadamente, *señal fundamental* o incluso *fundamental*. Para valores de *k* superiores a la unidad se tienen las *señales armónicas de la fundamental*, o los *armónicos*. Se denomina *orden del armónico* al valor de *k* que caracteriza una señal dada. Teniendo en cuenta estas definiciones, una señal periódica puede expresarse como la suma de una componente continua (el término en el que no hay una dependencia explícita del tiempo), la señal fundamental y los armónicos de la fundamental.

Como puede verse en la parte izquierda de la diapositiva, consideraremos tres posibles formas de expresar un desarrollo en serie de Fourier. Una función periódica puede caracterizarse utilizando cualquiera de las tres expresiones posibles; en la tercera la componente continua es aquello a lo que queda reducida la expresión cuando k=0. El lector puede elegir a su conveniencia la expresión que desee utilizar en cada momento.

En la parte derecha se muestran (arriba) la relación entre los coeficientes del desarrollo en serie y el valor eficaz de la función, y la expresión (abajo) que permite calcular la potencia media de una función periódica. Obsérvese que los distintos productos afectados por el sumatorio son los asociados a un mismo armónico, tanto en la corriente como en la tensión; en otras palabras, no hay productos de armónicos de distinto orden.



En la parte superior izquierda de la diapositiva se indica cómo obtener los coeficientes (*coeficientes de Fourier*) que figuran en la forma trigonométrica de la serie de Fourier. El límite inferior de las integrales puede ser cualquier instante en el que esté definida la función periódica cuyo desarrollo en serie se pretende obtener; es muy habitual, pero no obligatorio, elegir t_0=0 s. El límite superior es un instante que está separado del correspondiente al límite inferior por un intervalo igual al periodo de la función. Obsérvese que la definición del coeficiente a_v (la componente continua) corresponde a la definición del valor medio de la función en un periodo, por lo cual puede ser calculado por este procedimiento, sin recurrir a la integral.

Para el coeficiente A_k se toma siempre el valor positivo de la raíz. Obsérvese que el coeficiente C_k define un fasor.

Al tratar con funciones que, además de ser periódicas, presentan cierto tipo de simetría, el cálculo de los coeficientes se simplifica. En la parte inferior de la diapositiva se muestran los casos más sencillos de simetría (par e impar). Obsérvese que una función dada puede ser tratada como par o impar dependiendo de dónde se elija el origen de tiempos. Las expresiones matemáticas que definen las series en uno y otro caso son distintas, pero los cálculos realizados a partir de ellas conducen siempre a resultados idénticos.

Series de Fourier

Algunas integrales (J. W. Nilsson)

$$\int xe^{ax}dx = \frac{e^{ax}}{a^2}(ax - 1)$$

$$\int x^2e^{ax}dx = \frac{e^{ax}}{a^3}(a^2x^2 - 2ax + 2)$$

$$\int x\,\mathrm{sen}(ax)dx = \frac{\mathrm{sen}(ax)}{a^2} - \frac{x[\cos(ax)]}{a}$$

$$\int x\cos(ax)dx = \frac{\cos(ax)}{a^2} + \frac{x[\mathrm{sen}(ax)]}{a}$$

$$\int x^2\mathrm{sen}(ax)dx = \frac{2x[\mathrm{sen}(ax)]}{a^2} - \frac{(a^2x^2 - 2)[\cos(ax)]}{a^3}$$

$$\int x^2\cos(ax)dx = \frac{2x[\cos(ax)]}{a^2} + \frac{(a^2x^2 - 2)[\mathrm{sen}(ax)]}{a^3}$$

$$\int \mathrm{sen}(ax)\mathrm{sen}(bx)dx = \frac{\mathrm{sen}[(a - b)x]}{2(a - b)} - \frac{\mathrm{sen}[(a + b)x]}{2(a + b)}\ (a^2 \neq b^2)$$

$$\int \cos(ax)\cos(bx)dx = \frac{\mathrm{sen}[(a - b)x]}{2(a - b)} + \frac{\mathrm{sen}[(a + b)x]}{2(a + b)}\ (a^2 \neq b^2)$$

$$\int \mathrm{sen}(ax)\cos(bx)dx = \frac{\cos[(a - b)x]}{2(a - b)} - \frac{\cos[(a + b)x]}{2(a + b)}\ (a^2 \neq b^2)$$

$$\int \mathrm{sen}^2(ax)dx = \frac{x}{2} - \frac{\mathrm{sen}(2ax)}{4a}$$

$$\int \cos^2(ax)dx = \frac{x}{2} + \frac{\mathrm{sen}(2ax)}{4a}$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\mathrm{sen}(ax)}{x}dx = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & (a > 0) \\ -\frac{\pi}{2} & (a < 0) \end{cases}$$

$$\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{\mathrm{arctg}(x/a)}{a}$$

$$\int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^2} = \frac{1}{2a^2}\left[\frac{x}{x^2 + a^2} + \frac{\mathrm{arctg}(x/a)}{a}\right]$$

$$\int e^{ax}\mathrm{sen}(bx)dx = \frac{e^{ax}[a\,\mathrm{sen}(bx) - b\cos(bx)]}{a^2 + b^2}$$

$$\int e^{ax}\cos(bx)dx = \frac{e^{ax}[a\cos(bx) + b\,\mathrm{sen}(bx)]}{a^2 + b^2}$$

$$\int e^{ax}\mathrm{sen}^2(bx)dx = \frac{e^{ax}[(a\,\mathrm{sen}(bx) - 2b\cos(bx))\mathrm{sen}(bx) + (2b^2/a)]}{a^2 + 4b^2}$$

$$\int e^{ax}\cos^2(bx)dx = \frac{e^{ax}[(a\cos(bx) + 2b\,\mathrm{sen}(bx))\cos(bx) + (2b^2/a)]}{a^2 + 4b^2}$$

Esta diapositiva y la siguiente recogen algunas de las integrales que aparecen habitualmente en los cálculos de los coeficientes de Fourier.

Series de Fourier

Algunas integrales (continuación, J. W. Nilsson)

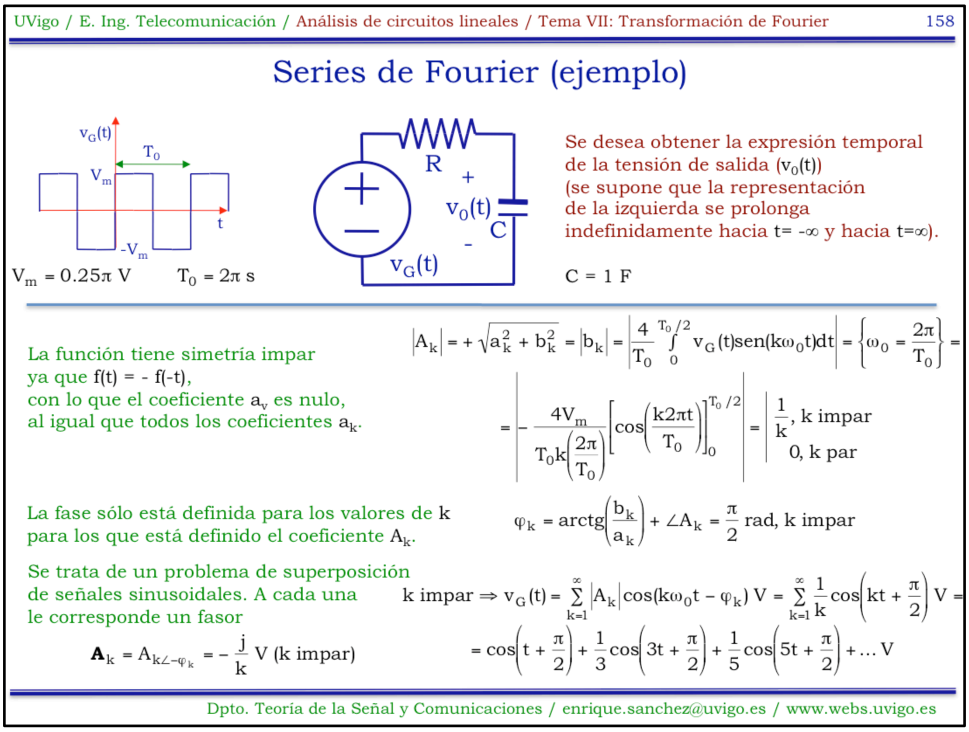
$$\int_{t_0}^{t_0+T_0} \mathrm{sen}(k\omega_0 t)dt = 0 \; (\forall k)$$

$$\int_{t_0}^{t_0+T_0} \cos(k\omega_0 t)dt = 0 \; (\forall k)$$

$$\int_{t_0}^{t_0+T_0} \mathrm{sen}(m\omega_0 t)\cos(n\omega_0 t)dt = 0 \; (\forall m, n)$$

$$\int_{t_0}^{t_0+T_0} \mathrm{sen}(m\omega_0 t)\mathrm{sen}(n\omega_0 t)dt = \begin{cases} 0 \; (\forall m \neq n) \\ T_0 / 2 \; (m = n) \end{cases}$$

$$\int_{t_0}^{t_0+T_0} \cos(m\omega_0 t)\cos(n\omega_0 t)dt = \begin{cases} 0 \; (\forall m \neq n) \\ T_0 / 2 \; (m = n) \end{cases}$$

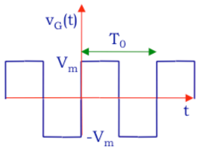


La excitación no es continua, ni sinusoidal pura, con lo que el problema no puede ser resuelto aplicando directamente la teoría convencional de circuitos. Podría recurrirse a la transformación de Laplace, expresando la señal de entrada como una determinada combinación de funciones del tipo escalón unitario, cada una de las cuales está desplazada con relación a la precedente por un tiempo igual al periodo.

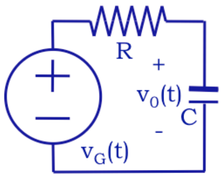
Dadas la periodicidad y la simetría de la excitación resulta más inmediato recurrir al auxilio de las series de Fourier. Aplicando las expresiones presentadas en diapositivas anteriores es posible obtener los coeficientes de la serie. Éstos pueden ser representados mediante un término general ($\mathbf{A}_k$), que puede ser tratado como un fasor. A partir de aquí es posible utilizar lo expuesto al presentar el régimen sinusoidal permanente, hasta obtener el fasor correspondiente a la salida.

A partir del fasor es inmediato deducir la expresión temporal correspondiente. A continuación es preciso aplicar el principio de superposición, ya que el desarrollo en serie ha transformado la señal única que constituía la excitación en una combinación lineal de señales sinusoidales. La señal de salida es la misma combinación lineal de las distintas señales individuales.

Series de Fourier (ejemplo)



$V_m = 0.25\pi$ V $\quad T_0 = 2\pi$ s



Se desea obtener la expresión temporal de la tensión de salida ($v_0(t)$) (se supone que la representación de la izquierda se prolonga indefinidamente hacia $t = -\infty$ y hacia $t = \infty$).

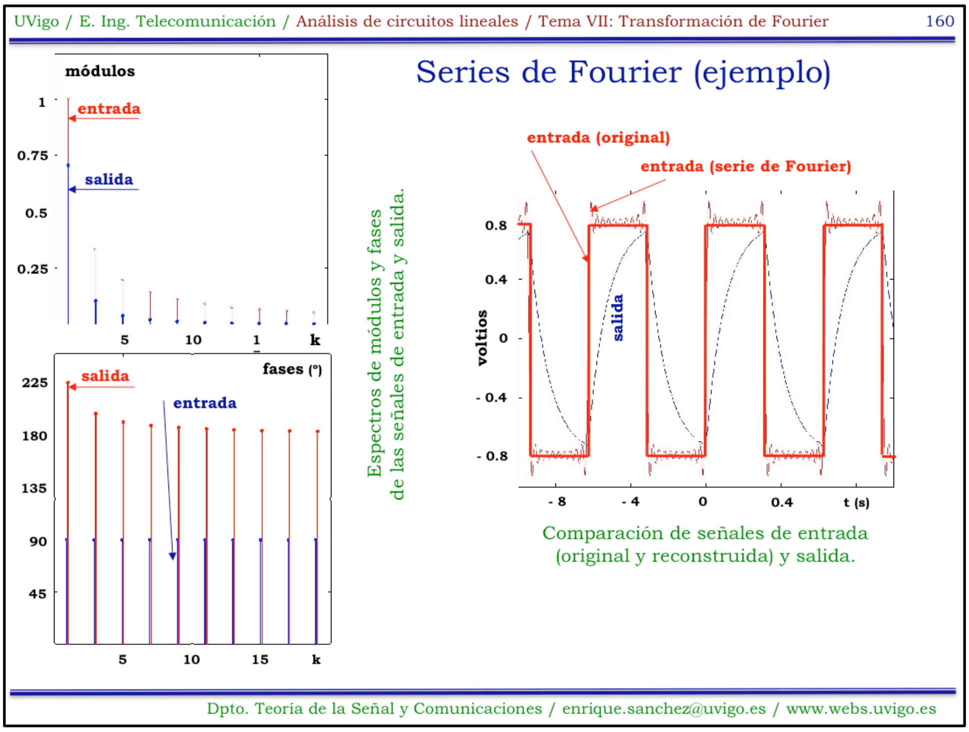
C = 1 F, R = 1 Ω

Para cada componente de la excitación, representado por su fasor, el circuito es un divisor de tensión.

$$\mathbf{V}_{0k} = \frac{\mathbf{A}_k \dfrac{1}{jk\omega_0 C}}{R + \dfrac{1}{jk\omega_0 C}} = -\frac{1}{k^2 - jk} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} V_{0k} = \left|\mathbf{V}_{0k}\right| = \dfrac{1}{k\sqrt{1+k^2}} \\ \varphi_{0k} = \angle \mathbf{V}_{0k} = \mathrm{arctg}\left(\dfrac{1}{k}\right) + \pi \end{cases}$$

Pasando del dominio fasorial al temporal y aplicando el principio de superposición

$$v_0(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{Re}\{\mathbf{V}_{0k} e^{jk\omega_0 t}\} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k\sqrt{1+k^2}} \cos\left[kt + \mathrm{arctg}\left(\frac{1}{k}\right)\right] \text{ V (k impar)}$$



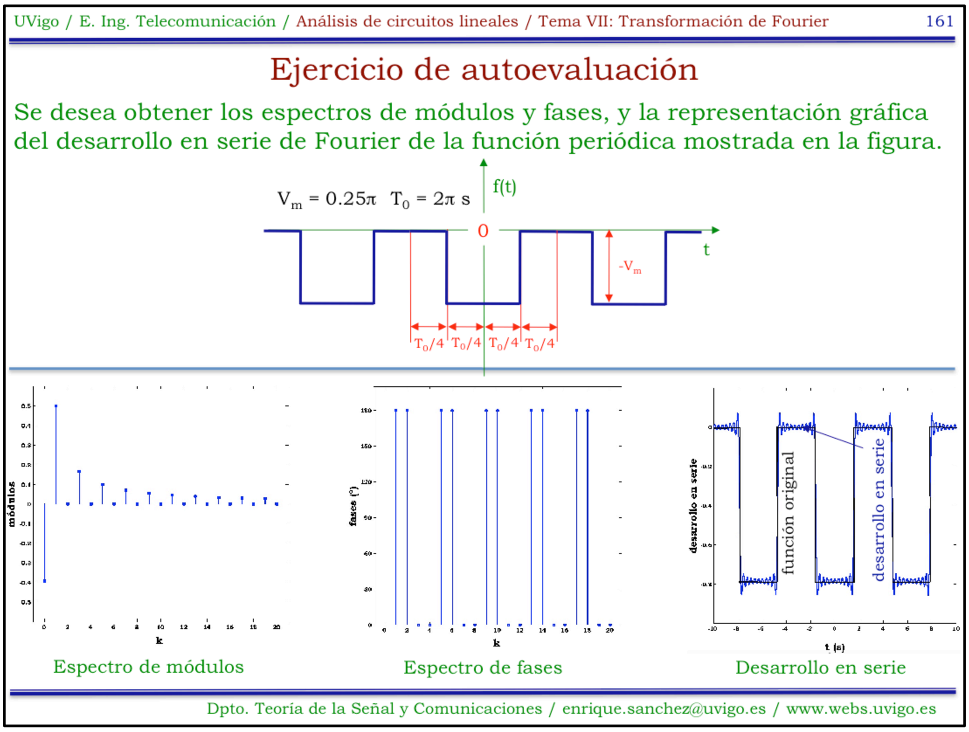
La diapositiva muestra en forma gráfica los resultados obtenidos en las dos diapositivas anteriores. Los módulos son los términos que multiplican a las funciones coseno. Las fases son los términos no dependientes del tiempo que se encuentran afectados por la función coseno. Los resultados de esta diapositiva fueron obtenidos utilizando el programa de Matlab que se indica.

```
%%%%% Diapositiva 160 %%%%%
clear all

n = 20;
k = 1:2:19;

Ak(k) = 1./k;
fik(k) = pi/2;
Vok(k) = 1./(k.*sqrt(1 + k.*k));
fok(k) = atan(1./k) + pi;

stem (k, Ak(k)); hold on;
stem (k-0.1, (180/pi)*fik(k)); hold on;
stem (k, Vok(k)); hold on;
stem (k, (180/pi)*fok(k)); hold on;

t = linspace (-10, 10, 10000);
vg = 0;
k = 1;
while k<=n
    vg = vg + Ak(k)*cos(k*t - fik(k));
    k = k + 2;
end
plot (t, vg);
hold on;

t = linspace(-10, 10, 10000);
vo = 0;
k = 1;
while k<=n
    vo = vo + Vok(k)*cos(k*t + fok(k));
    k = k + 2;
end
plot (t, vo);

clear all
```

Se denomina *espectro* a una representación de los valores de los módulos o de las fases de los coeficientes de un desarrollo en serie de Fourier en función del orden del armónico al que corresponde cada módulo o fase.

Como puede observarse, la sustitución de la entrada original por un desarrollo en serie de Fourier en el que se han considerado el fundamental y ocho armónicos no supone un error significativo.

Se sugiere que, a la vista de lo que se indica en esta diapositiva, se repase el contenido del epígrafe dedicado a la respuesta forzada en un circuito RC en régimen transitorio (tema II, diapositiva 44). Puede deducirse que la salida no tiene tiempo de estabilizarse porque la resistencia es tan grande que también lo es la correspondiente constante de tiempo.



Es una función de simetría par ya que f(-t)=f(t). Aplicando las expresiones mostradas en diapositivas anteriores se tiene

$$a_v = \frac{2}{T_0}\int_0^{T_0/2} f(t)dt = \frac{2}{T_0}\left[\int_0^{T_0/4} -V_m dt + \int_{T_0/4}^{T_0/2} 0dt\right] = -\frac{V_m}{2} = -0.125\pi$$

$$a_k = \frac{4}{T_0}\int_0^{T_0/2} f(t)\cos\left(k\frac{2\pi}{T}t\right)dt = \frac{4}{T_0}\left[\int_0^{T_0/4} -V_m\cos\left(k\frac{2\pi}{T_0}t\right)dt + \int_{T_0/4}^{T_0/2} 0\cos\left(k\frac{2\pi}{T_0}t\right)dt\right] = -\frac{4V_m}{k\pi}\,\mathrm{sen}\left(\frac{k\pi}{2}\right) = -\frac{0.5}{k}\,\mathrm{sen}\left(\frac{k\pi}{2}\right)$$

$$b_k = 0$$

$$A_k = +\sqrt{a_k^2 + b_k^2} = |a_k| = \begin{cases} \dfrac{0.5}{k}, & k \text{ impar} \\ 0, & k \text{ par} \end{cases} \qquad \varphi_k = \mathrm{arctg}\left(\frac{b_k}{a_k}\right)$$

```
%%%%% Diapositiva161 %%%%%
clear all;
T0 = 2*pi; Vm = 0.25*pi;
n = 20;

avg = - Vm/2;
k = 1:n;
akgg = -(2*Vm./(k*pi)).*sin(k*pi/2); akg = abs(akgg); bkg = 0;
Ag(k) = sqrt(akg.*akg + bkg.*bkg); fivg(k) = atan2(bkg, akgg);
stem(0, avg); hold on; stem(k, Ag(k));
hold on;
stem(k, (180/pi)*fivg(k));
hold on;

av0 = 0;
k = 1:n;
A0(k) = 1./(k.*sqrt(1 + k.*k)); fi0(k) = atan2(1, k); fi0(k) = atan2(1, k);
A0(2:2:n) = 0; fi0(2:2:n) = 0;
stem(0, av0); hold on; stem(k, A0(k));
hold on;
stem(k, (180/pi)*fi0(k));
hold on;

tfinal = 3*T0; tinicial = - tfinal; puntos = 10000;
t = linspace (tinicial, tfinal, puntos);
Vg = avg;
k = 1;
while k<=n
    Vg = Vg + Ag(k)*cos(2*pi*k*t/T0 - fivg(k));
    k = k + 1;
end
plot (t, Vg);
hold on;

V0 = av0;
k = 1;
while k<=n
    V0 = V0 + A0(k)*cos(k*t - fi0(k));
    k = k + 1;
end
plot (t, V0);

clear all;
```

Las fases no nulas que aparecen para ciertas componentes pares son simples resultados matemáticos: los límites a los que tiende la función φ_k cuando el numerador y el denominador de la fracción tienden a cero. Carecen de sentido físico porque los módulos de las componentes correspondientes son nulos.

Los valores de las fases para k=1, 5, 9, etcétera reflejan el signo negativo de a_k. Los valores de las fases para k=3, 7, etcétera son directamente nulos, como se desprende de la expresión de φ_k.

Ejercicio de autoevaluación

En un elemento de un circuito la corriente y la tensión están dadas por las expresiones que se indican a continuación.
¿Cuánto vale la potencia media en dicho elemento?
¿De qué tipo de elemento se trata?

$$v(t) = V_0 + \sum_{k=1}^{\infty} V_{mk} \cos(kt - \varphi_{vk})$$

$$V_0 = 0\ \mathrm{V} \qquad V_{mk} = \begin{cases} \dfrac{1}{k\sqrt{1+k^2}}\ \mathrm{V},\ k\ \text{impar} \\ 0\ \mathrm{V},\ k\ \text{par} \end{cases} \qquad \varphi_{vk} = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2}\ \mathrm{rad},\ k\ \text{impar} \\ 0\ \mathrm{rad},\ k\ \text{par} \end{cases}$$

$$i(t) = I_0 + \sum_{k=1}^{\infty} I_{mk} \cos(kt - \varphi_{ik})$$

$$I_0 = -0.125\ \mathrm{A} \qquad I_{mk} = \begin{cases} \dfrac{0.5}{k}\ \mathrm{A},\ k\ \text{impar} \\ 0\ \mathrm{A},\ k\ \text{par} \end{cases} \qquad \varphi_{ik} = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2}\ \mathrm{rad},\ k\ \text{impar} \\ 0\ \mathrm{rad},\ k\ \text{par} \end{cases}$$

$$P = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{0.25}{k^2\sqrt{1+k^2}}\ \mathrm{W}$$

Se trata de una resistencia

$$P = V_0 I_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{V_{mk} I_{mk}}{2} \cos(\varphi_{vk} - \varphi_{ik}) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{0.25}{k^2\sqrt{1+k^2}}\ \mathrm{W}$$

Se trata de una resistencia ya que todas las componentes de la tensión están en fase con las correspondientes componentes de la corriente.

Transformación de Fourier

- Es el concepto de serie de Fourier llevado al límite.

$$T \to \infty \quad \Rightarrow \quad \omega \to 0$$

- Es decir, se aplica a funciones no periódicas en el dominio del tiempo.
- La frecuencia varía de modo continuo en el dominio de la frecuencia.

Definición

dominio del tiempo

Transformación de Fourier : $f(t) \to F(\omega) = \mathcal{F}\{f(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt$

Transformación inversa de Fourier : $F(\omega) \to f(t) = \mathcal{F}^{-1}\{F(\omega)\} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{j\omega t}d\omega$

dominio de la frecuencia

Procedimientos de cálculo

- Calcular la integral.
- A partir de la transformada de Laplace.
- Utilizar propiedades matemáticas de la transformación de Fourier.

Cálculo de la transformada inversa

- Como en el caso de la transformación de Laplace (expansión en fracciones simples) sustituyendo s por ω.

Transformación de Fourier (J. W. Nilsson)

	función matemática	transformada de Fourier
impulso unitario	$\delta(t)$	1
constante	K	$2\pi K\delta(\omega)$
signo	$\mathrm{sgn}(t)$	$\dfrac{2}{j\omega}$
escalón	$u(t)$	$\pi\delta(\omega) + \dfrac{1}{j\omega}$
exponencial de tiempo positivo	$e^{-at}u(t)\ (a > 0)$	$\dfrac{1}{a + j\omega}$
exponencial de tiempo negativo	$e^{at}u(-t)\ (a > 0)$	$\dfrac{1}{a - j\omega}$
exponencial de tiempo positivo y negativo	$e^{-a\lvert t\rvert}\ (a > 0)$	$\dfrac{2a}{a^2 + \omega^2}$
exponencial compleja	$e^{j\omega_0 t}$	$2\pi\delta(\omega - \omega_0)$
coseno	$\cos(\omega_0 t)$	$\pi[\delta(\omega + \omega_0) + \delta(\omega - \omega_0)]$
seno	$\mathrm{sen}(\omega_0 t)$	$j\pi[\delta(\omega + \omega_0) - \delta(\omega - \omega_0)]$

Transformación de Fourier (J. W. Nilsson)

operación matemática	transformada de Fourier
$Kf(t)$	$KF(\omega)$
$\sum_{\text{algebraica}} f_i(t)$	$\sum_{\text{algebraica}} F_i(\omega)$
$\dfrac{d^n f(t)}{dt^n}$	$(j\omega)^n F(\omega)$
$\int_{-\infty}^{t} f(x)dx$	$\dfrac{F(\omega)}{j\omega}$
$f(at)\ (a > 0)$	$\dfrac{1}{a}F\left(\dfrac{\omega}{a}\right)$
$f(t - t_0)$	$e^{-j\omega t_0}F(\omega)$
$e^{j\omega_0 t}f(t)$	$F(\omega - \omega_0)$
$f(t)\cos(\omega_0 t)$	$\dfrac{F(\omega_0 - \omega) + F(\omega_0 + \omega)}{2}$
$\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau$	$X(\omega)H(\omega)$
$f_1(t)f_2(t)$	$\dfrac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F_1(\varpi)F_2(\omega - \varpi)d\varpi$
$t^n f(t)$	$(j)^n \dfrac{d^n F(\omega)}{d\omega}$

Ejemplo: obtener la convolución en el dominio del tiempo de las funciones sgn(t) y $e^{-t}u(t)$.

De acuerdo con lo indicado en el tema V,

$$y(t) = e^{-t} * \mathrm{sgn}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\tau}\,\mathrm{sgn}(t-\tau)d\tau$$

De acuerdo con la tabla adjunta,

$$Y(\omega) = E(\omega)S(\omega)$$

$$E(\omega) = \mathcal{F}\{e^{-t}u(t)\} = \frac{1}{1 + j\omega} \qquad S(\omega) = \mathcal{F}\{\mathrm{sgn}(t)\} = \frac{2}{j\omega}$$

$$Y(\omega) = E(\omega)S(\omega) = \frac{2}{j\omega(1 + j\omega)} = \frac{N(\omega)}{D(\omega)} = \frac{K_1}{j\omega} + \frac{K_2}{1 + j\omega}$$

$$K_1 = \left\{\frac{j\omega N(\omega)}{j\omega(1 + j\omega)}\right\}_{\omega=0} = 2 \qquad K_2 = \left\{\frac{(1 + j\omega N)(\omega)}{j\omega(1 + j\omega)}\right\}_{\omega=j} = -2$$

$$y(t) = \mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{2}{j\omega} - \frac{2}{1 + j\omega}\right\} = \mathrm{sgn}(t) - 2e^{-t}u(t)$$

En la última diapositiva del tema V se indicó que en el dominio del tiempo la salida de un sistema lineal es la entrada convolucionada con la respuesta al impulso (función de ponderación), pero no se explicó cómo calcular la función de convolución. En consecuencia, en principio no podríamos obtener la función y(t), ya que es la convolución de dos funciones temporales.

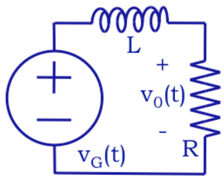
El problema puede resolverse de forma indirecta pasando las funciones temporales al dominio de la frecuencia, en el que, hablando en términos de transformadas de Fourier, la función de convolución es equivalente a un producto. Este producto da origen a una función racional, que puede ser descompuesta en fracciones simples utilizando las expresiones indicadas en el tema VI, relativo a la transformada de Laplace.

Una vez obtenidas las fracciones simples, ya sólo queda obtener las transformadas inversas de Fourier, para lo cual se pueden utilizar las equivalencias mostradas en esta diapositiva y en la anterior.

Transformación de Fourier (ejemplo)

$v_G(t) = A\,\mathrm{sgn}(t)$

$R = 4\,\Omega \qquad A = 5\,\mathrm{V} \qquad L = 1\,\mathrm{H}$



$$H(s) = \frac{V_0(s)}{V_G(s)} = \frac{R}{R + sL} \quad \Rightarrow \quad H(\omega) = \{H(s)\}_{s=j\omega} = \frac{4}{4 + j\omega}$$

$$V_G(\omega) = \mathcal{F}\{A\,\mathrm{sgn}(t)\} = A\mathcal{F}\{\mathrm{sgn}(t)\} = \frac{10}{j\omega}$$

$$V_0(\omega) = V_G(\omega)H(\omega) = \frac{40}{j\omega(4 + j\omega)} = \frac{N(\omega)}{D(\omega)} = \frac{K_1}{j\omega} + \frac{K_2}{4 + j\omega}$$

$$K_1 = \left\{\frac{j\omega N(\omega)}{j\omega(4 + j\omega)}\right\}_{\omega=0} = 10 \qquad K_2 = \left\{\frac{(4 + j\omega)N(\omega)}{j\omega(4 + j\omega)}\right\}_{\omega=j4} = -10$$

$$v_0(t) = \mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{10}{j\omega} - \frac{10}{4 + j\omega}\right\} = 5\,\mathrm{sgn}(t) - 10e^{-4t}$$

La excitación no es continua, ni sinusoidal pura, con lo que el problema no puede ser resuelto aplicando directamente la teoría convencional de circuitos. Podría recurrirse a la transformación de Laplace, expresando la señal de entrada como una determinada combinación de funciones del tipo escalón unitario, cada una de las cuales está desplazada con relación a la precedente por un determinado intervalo de tiempo.

No pueden utilizarse las series de Fourier, ya que la función representativa de la excitación no es periódica. Sí es posible, en cambio, recurrir a la transformación de Fourier. Como puede observarse, el proceso consta de los siguientes pasos:

1. Obtención de la función de transferencia en términos de transformadas de Laplace.
2. Particularización de la función de transferencia para s=jω.
3. Obtención de la transformada de Fourier de la entrada.
4. Multiplicar las funciones halladas en 2 y 3 para determinar la transformada de Fourier de la salida.
5. Descomponer la función obtenida en 4 en fracciones simples.
6. Hallar las transformadas inversas de Fourier de las fracciones simples calculadas en 5.

Transformación de Fourier

Utilización de transformaciones de Laplace para calcular transformadas de Fourier

función de tiempo positivo

$$f^+(t) = \left| \begin{array}{l} 0 \ (\forall t < 0^-) \\ f(t) \ (\forall t > 0^+) \end{array} \right.$$

$$\mathcal{F}\{f^+(t)\} = \mathcal{L}\{f^+(t)\}_{s=j\omega}$$

función de tiempo negativo

$$f^-(t) = \left| \begin{array}{l} f(t) \ (\forall t < 0^-) \\ 0 \ (\forall t > 0^+) \end{array} \right.$$

$$\mathcal{F}\{f^-(t)\} = \mathcal{L}\{f^-(t)\} = \mathcal{L}\{f(-t)\}_{s=-j\omega}$$

función no nula en todo tiempo

$$f(t) = \left| \begin{array}{l} f^-(t) \ (\forall t < 0^-) \\ f^+(t) \ (\forall t > 0^+) \end{array} \right.$$

$$f(t) = f^+(t) + f^-(t)$$

$$\mathcal{F}\{f(t)\} = \mathcal{L}\{f^+(t)\}_{s=j\omega} + \mathcal{L}\{f(-t)\}_{s=-j\omega}$$

Ejemplo

$$f^+(t) = e^{-at}\cos(\omega_0 t),\ (a > 0) \quad \Rightarrow \quad \mathcal{F}\{f^+(t)\} = \left\{\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega_0^2}\right\}_{s=j\omega} = \left\{\frac{a+j\omega}{(a+j\omega)^2+\omega_0^2}\right\}$$

$$f^-(t) = e^{at}\cos(-\omega_0 t),\ (a > 0) \quad \Rightarrow \quad \mathcal{F}\{f^-(t)\} = \left\{\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega_0^2}\right\}_{s=-j\omega} = \left\{\frac{a-j\omega}{(a-j\omega)^2+\omega_0^2}\right\}$$

$$f(t) = e^{-a|t|} = f^+(t) + f^-(t)\ (a > 0) \quad \Rightarrow \quad \mathcal{F}\{f(t)\} = \left\{\frac{1}{s+a}\right\}_{s=j\omega} + \left\{\frac{1}{s+a}\right\}_{s=-j\omega} = \frac{2a}{\omega^2+a^2}$$

Ejercicio de autoevaluación

Obtener la transformada de Fourier de la función

$f(t) = te^{-at}$ (a > 0)

$$\mathcal{F}(\omega) = \frac{2(a^2 - \omega^2)}{(a^2 + \omega^2)}$$

$$f(t) = te^{-at} \ (a > 0)$$

$$\mathcal{L}\{f^-(t)\} = \mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{1}{(s + a)^2} = \mathcal{L}\{f^+(t)\}$$

$$\mathcal{F}\{f(t)\} = \mathcal{L}\{f^-(t)\}_{s=-j\omega} + \mathcal{L}\{f^+(t)\}_{s=j\omega} =$$

$$= \frac{1}{(a - j\omega)^2} + \frac{1}{(a + j\omega)^2} = \frac{2(a^2 - \omega^2)}{(a^2 + \omega^2)^2}$$

UVigo / E. Ing. Telecomunicación / Análisis de circuitos lineales / Tema VII: Transformación de Fourier 169

Transformación de Fourier

Propiedades matemáticas

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt = A(\omega) - jB(\omega) = |F(\omega)|e^{-j\theta(\omega)}$$

$$A(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos(\omega t)dt \ (\text{par; } A(\omega) = A(-\omega)) \qquad B(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\text{sen}(\omega t)dt \ (\text{impar; } B(\omega) = -B(-\omega))$$

$$|F(\omega)| = \sqrt{A^2(\omega) + B^2(\omega)} \ (\text{par; } |F(\omega)| = |F(-\omega)|) \qquad \theta(\omega) = \text{arctg}\left[\frac{B(\omega)}{A(\omega)}\right] \ (\text{impar; } |\theta(\omega)| = -|\theta(-\omega)|)$$

$$F(-\omega) = F^*(\omega)$$

$$f(t) \text{ par} \Rightarrow F(\omega) \text{ real} \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} A(\omega) = 2\int_0^{\infty} f(t)\cos(\omega t)dt \\ B(\omega) = 0 \end{array} \right.$$

$$f(t) \text{ impar} \Rightarrow F(\omega) \text{ imaginaria} \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} A(\omega) = 0 \\ B(\omega) = 2\int_0^{\infty} f(t)\text{sen}(\omega t)dt \end{array} \right.$$

Dpto. Teoría de la Señal y Comunicaciones / enrique.sanchez@uvigo.es / www.webs.uvigo.es

La diapositiva indica que la transformada de Fourier de una función es, en general, una función compleja, con parte real (que es par) y parte imaginaria (que es impar). Si la transformada se expresa con la notación de módulo y fase, el primero es par, mientras que la segunda es impar.

Si la función temporal es par (lo cual no significa que sea periódica), la transformada es real, mientras que, si es impar, la transformada es imaginaria.

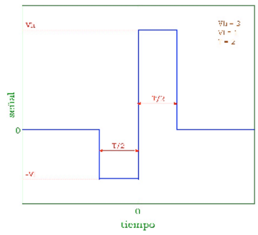
Transformación de Fourier (ejemplo)

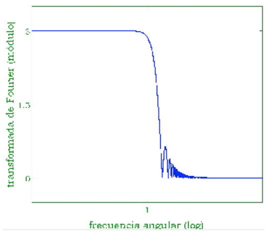
$$A(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos(\omega t)dt = \int_{-T/2}^{0} -V_l\cos(\omega t)dt + \int_{0}^{T/2} V_h\cos(\omega t)dt = \frac{V_l + V_h}{\omega}\,\mathrm{sen}\left(\frac{\omega T}{2}\right)$$

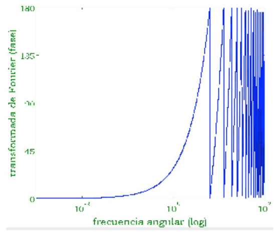
$$B(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\mathrm{sen}(\omega t)dt = \int_{-T/2}^{0} -V_l\mathrm{sen}(\omega t)dt + \int_{0}^{T/2} V_h\mathrm{sen}(\omega t)dt = \frac{V_l + V_h}{\omega}\left[1 - \cos\left(\frac{\omega T}{2}\right)\right]$$

$$|F(\omega)| = \sqrt{A^2(\omega) + B^2(\omega)} = \frac{V_l + V_h}{\omega}\sqrt{2 - 2\cos\left(\frac{\omega T}{2}\right)} \qquad \theta(\omega) = \mathrm{arctg}\left[\frac{B(\omega)}{A(\omega)}\right] = \mathrm{arctg}\,\frac{1 - \cos\left(\frac{\omega T}{2}\right)}{\mathrm{sen}\left(\frac{\omega T}{2}\right)}$$

$$F(\omega) = A(\omega) - jB(\omega) = |F(\omega)|_{\angle -\theta(\omega)}$$







Como puede observarse, el cálculo de la transformada de Fourier a partir de la determinación previa de sus componentes real e imaginaria es más sencillo que aplicar la definición de transformación de Fourier que se presentó anteriormente.

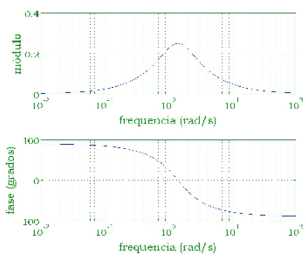
UVigo / E. Ing. Telecomunicación / Análisis de circuitos lineales / Tema VII: Transformación de Fourier 171

Transformación de Fourier (ejemplo)

Representación, mediante Matlab, de la función de transferencia en función de la frecuencia angular

Sea la función $$H(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{n_1 s^n + n_2 s^{n-1} + \cdots n_{n-1} s + n_n}{d_1 s^d + d_2 s^{d-1} + \cdots d_{d-1} s + d_d}$$

freqs([n_1 n_2 ... n_{n-1} n_n], [d_1 d_2 ... d_{d-1} d_d], w)



Ejemplo

$$H(s) = \frac{0.5s}{s^2 + 2s + 2}$$

```
w = logspace(-2, 2, 1000);
freqs ([0.5 0], [1 2 2], w)
```

Dpto. Teoría de la Señal y Comunicaciones / enrique.sanchez@uvigo.es / www.webs.uvigo.es

Esta diapositiva muestra cómo obtener con Matlab la variación de una función con la frecuencia (en módulo y fase). Puede utilizarse para representar transformadas de Fourier a partir del conocimiento previo de la transformada de Laplace de la misma función.