Tema II: Régimen transitorio

Regímenes permanente y transitorio

Régimen permanente

Las excitaciones (fuentes) llevan mucho tiempo aplicadas.

Las características de las fuentes no cambian con el tiempo.

La respuesta del circuito (corrientes y tensiones) es de la misma naturaleza que las excitaciones

Condiciones de estudio

Régimen permanente continuo.

Régimen permanente sinusoidal.

Régimen transitorio

Algunas excitaciones (fuentes) se aplican o se suprimen bruscamente (instantáneamente; en un tiempo nulo)

La respuesta del circuito (corrientes y tensiones) es de distinta naturaleza que las excitaciones debido a la presencia de elementos reactivos

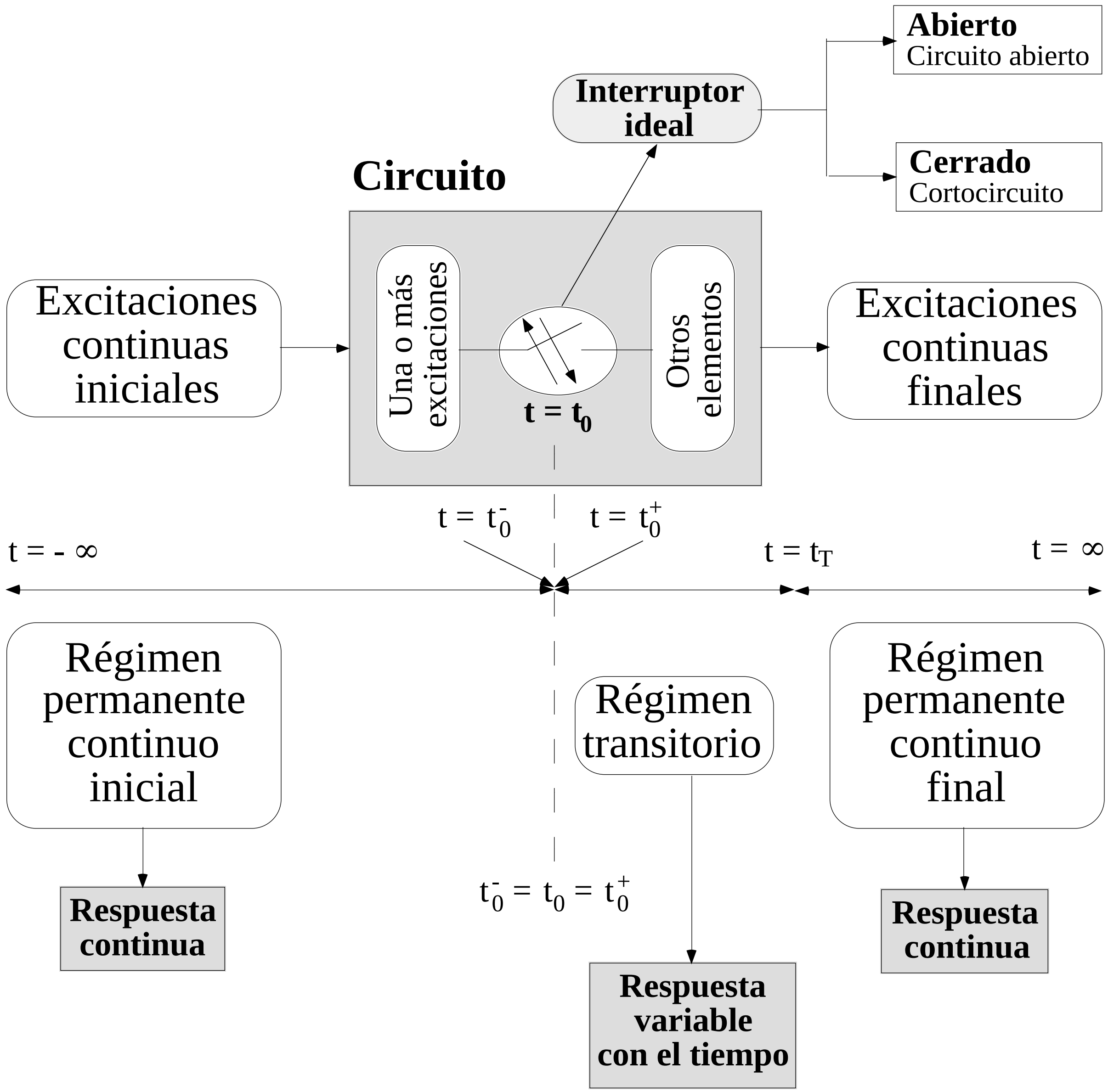
Condiciones de estudio

Régimen transitorio entre dos regímenes permanentes de continua.

Análisis integro-diferencial.

En un circuito cuyos elementos pasivos son únicamente resistencias
no hay régimen transitorio aunque cambien las excitaciones;
el circuito se adapta instantáneamente a las nuevas condiciones de excitación.

Notación del régimen transitorio



$t = t_0^-$: final del régimen permanente continuo inicial

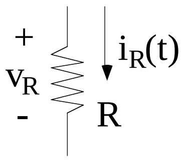
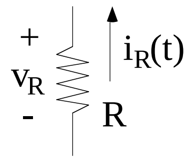
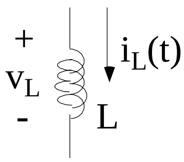
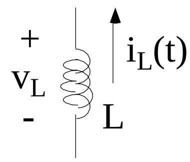
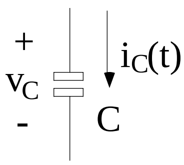
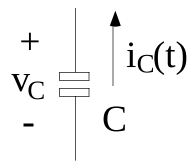
$t = t_0^+$: inicio del régimen transitorio

$t = t_T$: final del régimen transitorio; comienzo del permanente continuo final

$t = \infty$: final del régimen permanente continuo final

Salvo que se indique explícitamente lo contrario, se supondrá $t_0 = 0$ s.

Elementos pasivos en régimen transitorio

Representación gráfica	Relación funcional	Representación gráfica	Relación funcional
	**Resistencia** $v_R(t) = Ri_R(t)$ $p_R(t) = v_R(t)i_R(t)$		**Resistencia** $v_R(t) = -\ Ri_R(t)$ $p_R(t) = -\ v_R(t)i_R(t)$
	**Inductancia** $v_L(t) = L\frac{di_L(t)}{dt}$ $p_L(t) = v_L(t)i_L(t)$		**Inductancia** $v_L(t) = -\ L\frac{di_L(t)}{dt}$ $p_L(t) = -\ v_L(t)i_L(t)$
	**Capacidad** $i_C(t) = C\frac{dv_C(t)}{dt}$ $p_C(t) = v_C(t)i_C(t)$		**Capacidad** $i_C(t) = -\ C\frac{dv_C(t)}{dt}$ $p_C(t) = -\ v_C(t)i_C(t)$

Consecuencias

Inductancia

La corriente no varía bruscamente (daría origen a tensión infinita)

$$i_L(t_0^+) = i_L(t_0^-)$$

La tensión puede variar bruscamente

$$v_L(t_0^+) \overset{=}{\underset{\neq}{}} v_L(t_0^-)$$

Continua

Cortocircuito
$v_L = 0$ V
i_L cualquiera

Circuito abierto
$i_C = 0$ A
v_C cualquiera

Capacidad

La tensión no varía bruscamente (daría origen a corriente infinita)

$$v_C(t_0^+) = v_C(t_0^-)$$

La corriente puede variar bruscamente

$$i_C(t_0^+) \overset{=}{\underset{\neq}{}} i_C(t_0^-)$$

Resistencia

La corriente y la tensión pueden variar bruscamente

$$i_R(t_0^+) \overset{=}{\underset{\neq}{}} i_R(t_0^-)$$

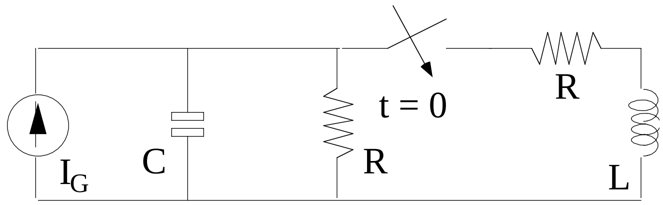
$$v_R(t_0^+) \overset{=}{\underset{\neq}{}} v_R(t_0^-)$$

Cálculo de condiciones iniciales y finales

Condiciones en $t = t_0^-$	**Condiciones en $t = t_0^+$**	**Condiciones en $t = \infty$**
Situación del circuito correspondiente a $-\infty \le t \le t_0^-$ **Continua**	Situación del circuito correspondiente a $t_0 \le t \le \infty$ **Transitorio**	Situación del circuito correspondiente a $t_0 \le t \le \infty$ **Continua**
Para todos t, L y C $v_L(t) = 0$ V $i_C(t) = 0$ A	Para todas L y C $i_L(t_0^+) = i_L(t_0^-)$ $v_C(t_0^+) = v_C(t_0^-)$	Para todos t, L y C $v_L(t) = 0$ V $i_C(t) = 0$ A
Para todos t, L y C, hallar $i_L(t)$, $v_C(t)$ y otras magnitudes (Kirchhoff, mallas, nudos)	Para todas L y C, hallar $v_L(t_0^+)$, $i_C(t_0^+)$ y otras magnitudes (Kirchhoff, mallas, nudos)	Para todos t, L y C, hallar $i_L(t)$, $v_C(t)$ y otras magnitudes (Kirchhoff, mallas, nudos)

A i_L y v_C se les denomina *magnitudes fundamentales* porque definen el comportamiento de inductancias y capacidades.

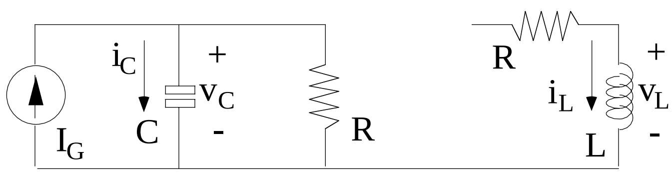
Ejemplo 1 de cálculo de condiciones iniciales y finales



Se suponen conocidos los valores
de todos los elementos del circuito.

El circuito de la figura,
en el que la fuente es continua,
ha permanecido mucho tiempo
sin cambios antes del cambio de
posición del interruptor.
Una vez producido éste,
ya no experimenta más cambios.

Se desea hallar los valores
de las corrientes y las tensiones
en la inductancia y la capacidad
en $t = 0^-$, $t = 0^+$ y $t = \infty$.



Se asignan arbitrariamente
los sentidos de las corrientes
y las polaridades de las tensiones.

La figura adjunta muestra
la situación del circuito
para todo t tal que $-\infty \leq t \leq 0$,
y, en particular, para $t = 0^-$.

El circuito se halla en régimen
permanente continuo,
ya que la fuente es continua.

La capacidad es un circuito abierto en continua
(corriente nula).

$$i_C(0^-) = 0 \text{ A}$$

La corriente de la fuente ha de circular
por la resistencia en paralelo con la capacidad,
ya que ésta es un circuito abierto.
Las tensiones en ambos elementos son iguales
por estar en paralelo.

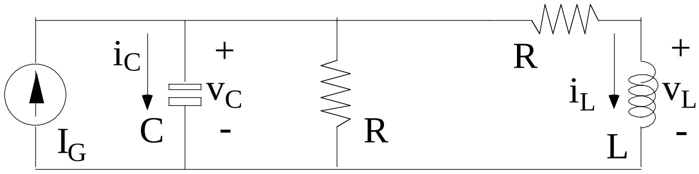
$$I_G = i_C + \frac{v_C}{R} \Rightarrow v_C(0^-) = RI_G$$

La inductancia es un cortocircuito en continua
(tensión nula).

$$v_L(0^-) = 0 \text{ V}$$

No hay corriente en la inductancia
porque no está conectada a la excitación.

$$i_L(0^-) = 0 \text{ A}$$



La figura adjunta muestra la situación del circuito para todo t tal que $0 \le t \le \infty$, y, en particular, para $t = 0^+$.

Se mantienen los sentidos de las corrientes y las polaridades de las tensiones elegidos anteriormente.

El circuito entra en transitorio porque han cambiado las condiciones de excitación en algunos elementos.

La tensión en la capacidad y la corriente en la inductancia no pueden variar bruscamente.

$$v_C(0^+) = v_C(0^-) = RI_G$$

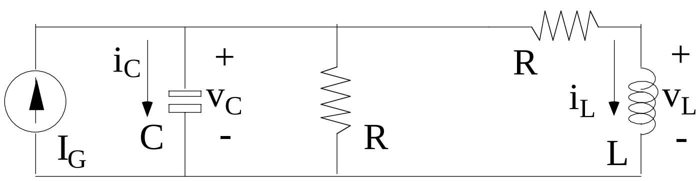
$$i_L(0^+) = i_L(0^-) = 0 \text{ A}$$

Ecuación de nudo.

$$I_G = i_C + \frac{v_C}{R} + i_L \Rightarrow i_C(0^+) = 0 \text{ A}$$

Ecuación de malla.

$$v_C = Ri_L + v_L \Rightarrow v_L(0^+) = RI_G$$



La figura adjunta muestra la situación del circuito para todo t tal que $0 \le t \le \infty$, y, en particular, para $t = \infty$.

Se mantienen los sentidos de las corrientes y las polaridades de las tensiones elegidos anteriormente.

El transitorio ha finalizado y el circuito se encuentra en régimen permanente continuo.

La capacidad es un circuito abierto en continua (corriente nula).

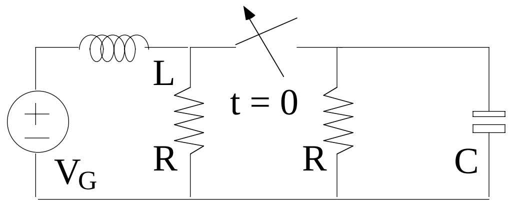
$$i_C(\infty) = 0 \text{ A}$$

La inductancia es un cortocircuito en continua (tensión nula).

$$v_L(\infty) = 0 \text{ V}$$

$$\left.\begin{array}{l} I_G = i_C + \dfrac{v_C}{R} + i_L \\[2ex] v_C = Ri_L + v_L \end{array}\right| \Rightarrow \left| \begin{array}{l} i_L(\infty) = \dfrac{I_G}{2} \\[2ex] v_C(\infty) = \dfrac{RI_G}{2} \end{array}\right.$$

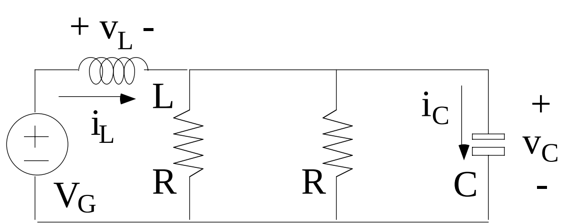
Ejemplo 2 de cálculo de condiciones iniciales y finales



Se suponen conocidos los valores
de todos los elementos del circuito.

El circuito de la figura,
en el que la fuente es continua,
ha permanecido mucho tiempo
sin cambios antes del cambio de
posición del interruptor.
Una vez producido éste,
ya no experimenta más cambios.

Se desea hallar los valores
de las corrientes y las tensiones
en la inductancia y la capacidad
en $t = 0^-$, $t = 0^+$ y $t = \infty$.



Se asignan arbitrariamente
los sentidos de las corrientes
y las polaridades de las tensiones.

La figura adjunta muestra
la situación del circuito
para todo t tal que $-\infty \le t \le 0$,
y, en particular, para $t = 0^-$.

El circuito se halla en régimen
permanente continuo,
ya que la fuente es continua.

La capacidad es un circuito abierto en continua
(corriente nula).

$$i_C(0^-) = 0 \text{ A}$$

La inductancia es un cortocircuito en continua
(tensión nula).

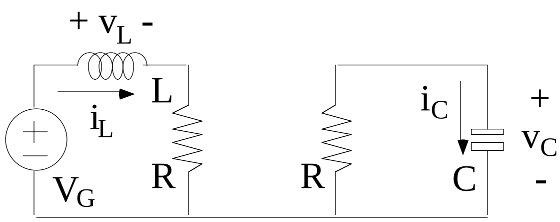
$$v_L(0^-) = 0 \text{ V}$$

Ecuación de malla.

$$V_G = v_L + v_C \Rightarrow v_C(0^-) = V_G$$

Ecuación de nudo.

$$i_L = v_C\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R}\right) + i_C = \frac{2V_G}{R}$$



La figura adjunta muestra la situación del circuito para todo t tal que $0 \le t \le \infty$, y, en particular, para $t = 0^+$.

El circuito entra en transitorio porque han cambiado las condiciones de excitación en algunos elementos.

Se mantienen los sentidos de las corrientes y las polaridades de las tensiones elegidos anteriormente.

La tensión en la capacidad y la corriente en la inductancia no pueden variar bruscamente.

$$v_C(0^+) = v_C(0^-) = V_G$$

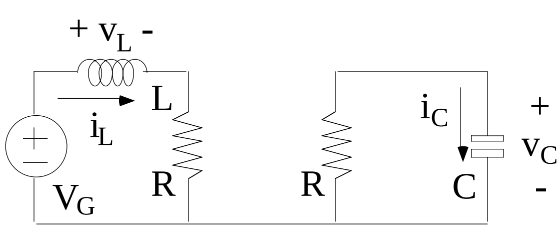
$$i_L(0^+) = i_L(0^-) = \frac{2V_G}{R}$$

Ecuación de nudo.

$$\frac{v_C}{R} + i_C = 0 \Rightarrow i_C(0^+) = -\frac{V_G}{R}$$

Ecuación de malla.

$$V_G = v_L + Ri_L \Rightarrow v_L(0^+) = -V_G$$



La figura adjunta muestra la situación del circuito para todo t tal que $0 \le t \le \infty$, y, en particular, para $t = \infty$.

El transitorio ha finalizado y el circuito se encuentra en régimen permanente continuo.

Se mantienen los sentidos de las corrientes y las polaridades de las tensiones elegidos anteriormente.

La capacidad es un circuito abierto en continua (corriente nula).

$$i_C(\infty) = 0 \text{ A}$$

La inductancia es un cortocircuito en continua (tensión nula).

$$v_L(\infty) = 0 \text{ V}$$

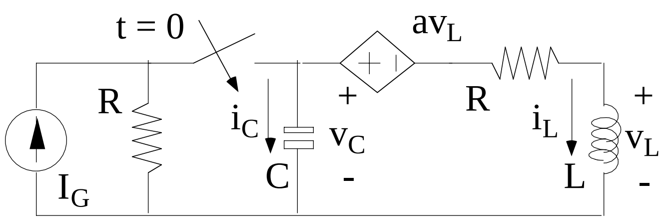
Ecuación de nudo.

$$\frac{v_C}{R} + i_C = 0 \Rightarrow v_C(\infty) = 0 \text{ V}$$

Ecuación de malla.

$$V_G = v_L + Ri_L \Rightarrow i_L(\infty) = \frac{V_G}{R}$$

Ejemplo 3 de cálculo de condiciones iniciales y finales



El circuito de la figura, en el que la fuente independiente es continua, ha permanecido mucho tiempo sin cambios antes del cambio de posición del interruptor. Una vez producido éste, ya no experimenta más cambios.

Se desea hallar los valores de las corrientes y las tensiones en la inductancia y la capacidad en $t = 0^-$, $t = 0^+$ y $t = \infty$, y la variación de energía en la inductancia entre $t = 0$ y $t = \infty$.

Se suponen conocidos los valores de I_G, R, L, C y a.

---

t = 0⁻

Continua $\quad v_L(0^-) = 0\text{ V},\ i_C(0^-) = 0\text{ A}$

Ecuación de nudo $\quad i_C(0^-) + i_L(0^-) = 0 \Rightarrow i_L(0^-) = 0\text{ A}$

Ecuación de malla $\quad v_C(0^-) = av_L(0^-) + Ri_L(0^-) + v_L(0^-) = 0\text{ V}$

---

t = 0⁺

No hay cambios $\quad v_C(0^+) = v_C(0^-) = 0\text{ V},\ i_L(0^+) = i_L(0^-) = 0\text{ A}$

Ecuación de nudo $\quad I_G = \dfrac{v_C(0^+)}{R} + i_C(0^+) + i_L(0^+) \Rightarrow i_C(0^+) = I_G$

Ecuación de malla $\quad v_C(0^+) = av_L(0^+) + Ri_L(0^+) + v_L(0^+) \Rightarrow v_L(0^+) = 0\text{ V}$

---

t = ∞

Continua $\quad v_L(\infty) = 0\text{ V},\ i_C(\infty) = 0\text{ A}$

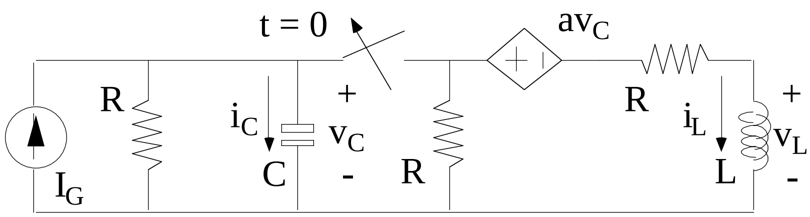
Ecuación de nudo $\quad I_G = \dfrac{v_C(\infty)}{R} + i_C(\infty) + i_L(\infty)$

Ecuación de malla $\quad v_C(\infty) = av_L(\infty) + Ri_L(\infty) + v_L(\infty)$

$$i_L(\infty) = \frac{I_G}{2},\ v_C(\infty) = \frac{RI_G}{2}$$

$$w_L = \int_0^\infty p_L(t)dt = \int_0^\infty v_L(t)i_L(t)dt = \int_0^\infty L\frac{di_L(t)}{dt}i_L(t)dt = \frac{L}{2}\left[i_L^2(\infty) - i_L^2(0)\right] = \frac{LI_G^2}{8}$$

Ejemplo 4 de cálculo de condiciones iniciales y finales



Se suponen conocidos los valores de I_G, R, L, C y a.

El circuito de la figura, en el que la fuente independiente es continua, ha permanecido mucho tiempo sin cambios antes del cambio de posición del interruptor. Una vez producido éste, ya no experimenta más cambios.

Se desea hallar los valores de las corrientes y las tensiones en la inductancia y la capacidad en $t = 0^-$, $t = 0^+$ y $t = \infty$, y la variación de energía en la capacidad entre $t = 0$ y $t = \infty$.

$t = 0^-$

Continua: $v_L(0^-) = 0\text{ V},\ i_C(0^-) = 0\text{ A}$

Ecuación de nudo: $$I_G = \frac{v_C(0^-)}{R} + i_C(0^-) + \frac{v_C(0^-)}{R} + i_L(0^-)$$

Ecuación de malla: $$v_C(0^-) = av_C(0^-) + Ri_L(0^-) + v_L(0^-)$$

$$i_L(0^-) = \frac{1 - a}{3 - a}I_G,\ v_C(0^-) = \frac{RI_G}{3 - a}$$

$t = 0^+$

No hay cambios: $$i_L(0^+) = i_L(0^-) = \frac{1 - a}{3 - a}I_G,\ v_C(0^+) = v_C(0^-) = \frac{RI_G}{3 - a}$$

Ecuación de nudo: $$I_G = \frac{v_C(0^+)}{R} + i_C(0^+) \Rightarrow i_C(0^+) = \frac{2 - a}{3 - a}I_G$$

Ecuación de malla: $$0 = Ri_L(0^+) + av_C(0^+) + Ri_L(0^+) + v_L(0^+) \Rightarrow$$

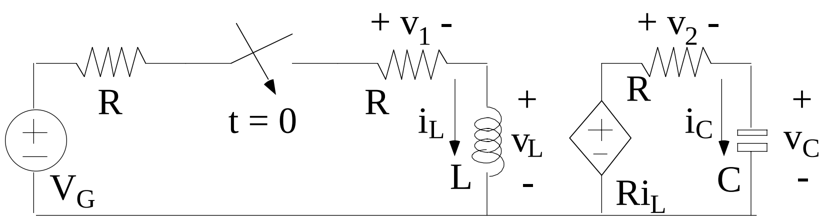
$$\Rightarrow v_L(0^+) = \frac{a - 2}{3 - a}RI_G$$

t = ∞	Continua	$v_L(\infty) = 0\ \text{V},\ i_C(\infty) = 0\ \text{A}$
	Ecuación de nudo	$I_G = \dfrac{v_C(\infty)}{R} + i_C(\infty) \Rightarrow v_C(\infty) = RI_G$
	Ecuación de malla	$0 = Ri_L(\infty) + av_C(\infty) + Ri_L(\infty) + v_L(\infty) \Rightarrow i_L(\infty) = -\dfrac{aI_G}{2}$

$$w_C = \int_0^\infty p_C(t)dt = \int_0^\infty v_C(t)i_C(t)dt = \int_0^\infty v_C(t)C\frac{dv_C(t)}{dt}dt =$$

$$= \frac{C}{2}\left[v_C^2(\infty) - v_C^2(0)\right] = \frac{C}{2}\left(\frac{RI_G}{3 - a}\right)^2(8 - 6a + a^2)$$

Ejemplo 5 de cálculo de condiciones iniciales y finales



Se suponen conocidos los valores de V_G, R, L y C.

El circuito de la figura, en el que la fuente independiente es continua,
ha permanecido mucho tiempo sin cambios
antes del cambio de posición del interruptor.
Una vez producido éste, ya no experimenta más cambios.

Se desea hallar los valores de las tensiones v_1 y v_2 en $t = 0^-$, $t = 0^+$ y $t = \infty$.

$v_1(0^-) = Ri_L(0^-) = 0$ V   No hay excitación en la inductancia; $i_L(0^-) = 0$ A

$v_2(0^-) = Ri_C(0^-) = 0$ V   En continua $i_C(0^-) = 0$ A

$v_1(0^+) = Ri_L(0^+) = Ri_L(0^-) = 0$ V

Ecuación de malla
$i_L(0^+) = i_L(0^-)$
$v_C(0^+) = v_C(0^-)$

$v_2(0^+) = Ri_L(0^+) - v_C(0^+) = Ri_L(0^-) - v_C(0^-)$
$Ri_L(0^-) = Ri_C(0^-) + v_C(0^-) \Rightarrow v_C(0^-) = 0$ V

$\Rightarrow v_2(0^+) = 0$ V

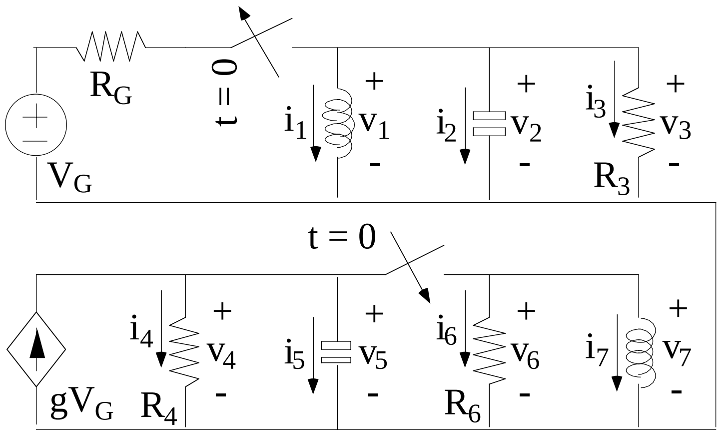
$$V_G = Ri_L(\infty) + Ri_L(\infty) + v_L(\infty) \Rightarrow i_L(\infty) = \frac{V_G}{2R}$$

$$v_1(\infty) = Ri_L(\infty) = \frac{V_G}{2}$$

En continua
$i_C(\infty) = 0$ A
$v_L(\infty) = 0$ V

$$v_2(\infty) = Ri_C(\infty) = 0 \text{ V}$$

Ejemplo 6 de cálculo de condiciones iniciales y finales



Se suponen conocidos los valores de todos los elementos del circuito.

El circuito de la figura, en el que la fuente independiente es continua, ha permanecido mucho tiempo sin cambios antes del cambio de posición de los interruptores. Una vez producido éste, ya no experimenta más cambios.

Se desea hallar los valores de $v_3(0^+)$, $i_1(0^+)$, $i_2(0^+)$, $i_7(0^+)$, $v_7(0^+)$, $i_6(0^+)$, $i_5(0^+)$, $v_7(\infty)$, e $i_7(\infty)$.

$$v_3(0^+) = v_2(0^+) = v_2(0^-) = v_1(0^-) = 0 \text{ V}$$

Elementos en paralelo. Continuidad de la tensión en la capacidad. La inductancia es un cortocircuito en continua.

$$i_1(0^+) = i_1(0^-) = \frac{V_G - v_1(0^-)}{R_G} - i_2(0^-) - \frac{v_1(0^-)}{R_3} = \frac{V_G}{R_G}$$

Continuidad de la corriente en la inductancia. Ecuación de nudo. La capacidad es un circuito abierto en continua.

$$i_2(0^+) = -i_1(0^+) - \frac{v_3(0^+)}{R_3} = -\frac{V_G}{R_G}$$

Ecuación de nudo.

$$i_7(0^+) = i_7(0^-) = 0 \text{ A}$$

Continuidad de la corriente en la inductancia. Ausencia de excitación en la inductancia para t < 0.

$$v_7(0^+) = v_5(0^+) = v_5(0^-) = [gV_G - i_5(0^-)]R_4 = gV_G R_4$$

Elementos en paralelo. Continuidad de la tensión en la capacidad. Ecuación de nudo. La capacidad es un circuito abierto en continua.

$$i_6(0^+) = \frac{v_6(0^+)}{R_6} = \frac{v_7(0^+)}{R_6} = \frac{gV_G R_4}{R_6}$$

Elementos en paralelo.

$$i_5(0^+) = gV_G - \frac{v_4(0^+)}{R_4} - i_6(0^+) - i_7(0^+) =$$

$$= gV_G - \frac{v_5(0^+)}{R_4} - i_6(0^+) - i_7(0^+) = -\frac{gV_G R_4}{R_6}$$

Ecuación de nudo.
Elementos en paralelo.

$$v_7(\infty) = 0 \text{ V}$$

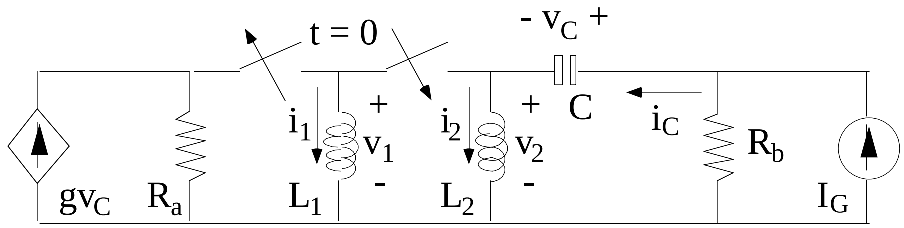
La inductancia es un cortocircuito en continua.

$$i_7(\infty) = gV_G - \frac{v_4(\infty)}{R_4} - i_5(\infty) - \frac{v_6(\infty)}{R_6} =$$

$$= gV_G - \frac{v_7(\infty)}{R_4} - i_5(\infty) - \frac{v_7(\infty)}{R_6} = gV_G$$

Ecuación de nudo.
Elementos en paralelo.
La capacidad es un circuito abierto en continua.

Ejemplo 7 de cálculo de condiciones iniciales y finales



El circuito de la figura, en el que la fuente independiente es continua,
ha permanecido mucho tiempo sin cambios
antes del cambio de posición de los interruptores.
Una vez producido éste, ya no experimenta más cambios.

Se suponen conocidos los valores de todos los elementos del circuito.
Además, se sabe que $i_1(0^+) = gR_bI_G$, $i_2(0^+) = 0$ A
(el cálculo de estos valores se efectúa como se indicó en ejemplos anteriores).

Se desea hallar los valores de las corrientes en las inductancias para t = ∞.

Solución aparente

Las corrientes son nulas porque se verifica $0\text{ A} = i_C(\infty) = i_1(\infty) + i_2(\infty)$.
Sin embargo, que la suma sea nula no implica que lo sean las corrientes.
De hecho, no lo son (como se ve a continuación)
porque las inductancias parten de condiciones iniciales distintas
(lo confirma el dato de que las corrientes al inicio del transitorio son distintas).

Para todo $t \geq 0$ se verifica

$$v_1(t) = v_2(t) \Rightarrow L_1\frac{di_1(t)}{dt} = L_2\frac{di_2(t)}{dt}$$

Integrando esta expresión se obtiene

$$\int L_1\frac{di_1(t)}{dt}dt = \int L_2\frac{di_2(t)}{dt}dt \Rightarrow L_1i_1(t) = L_2i_2(t) + K \qquad (1)$$

Dado que (1) se verifica para todo $t \geq 0$, también lo hará para $t = 0^+$,
con lo que, utilizando los datos del enunciado,

$$L_1i_1(0^+) = L_2i_2(0^+) + K \Rightarrow K = L_1gR_bI_G \qquad (2)$$

Dado que (1) se verifica para todo $t \geq 0$, también lo hará para $t = \infty$; es decir,

$$L_1 i_1(\infty) = L_2 i_2(\infty) + K \tag{3}$$

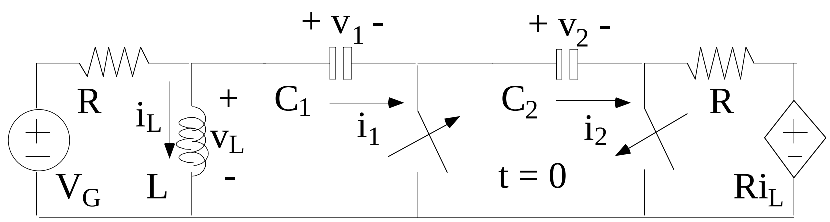
Además, dado que la capacidad es un circuito abierto en continua,

$$0 \text{ A} = i_C(\infty) = i_1(\infty) + i_2(\infty) \tag{4}$$

Resolviendo el sistema (3-4) se llega a

$$i_1(\infty) = \frac{g R_b I_G L_1}{L_1 + L_2} = - i_2(\infty)$$

Ejemplo 8 de cálculo de condiciones iniciales y finales



El circuito de la figura, en el que la fuente independiente es continua, ha permanecido mucho tiempo sin cambios antes del cambio de posición de los interruptores. Una vez producido éste, ya no experimenta más cambios.

Se suponen conocidos los valores de V_G, R, L, C_1 y C_2. Además, se sabe que $v_1(0^+) = 0$ V, $v_2(0^+) = -V_G$ (el cálculo de estos valores se efectúa como se indicó en ejemplos anteriores).

Se desea hallar los valores de las tensiones en las capacidades para $t = \infty$.

Solución aparente

Las tensiones son nulas porque se verifica $0\text{ V} = v_1(\infty) + v_2(\infty)$
(las capacidades están entre los cortocircuitos de la inductancia y un interruptor).
Sin embargo, que la suma sea nula no implica que lo sean las tensiones.
De hecho, no lo son (como se ve a continuación)
porque las capacidades parten de condiciones iniciales distintas
(lo confirma el dato de que las tensiones al inicio del transitorio son distintas).

Para todo $t \geq 0$ se verifica

$$i_1(t) = i_2(t) \Rightarrow C_1 \frac{dv_1(t)}{dt} = C_2 \frac{dv_2(t)}{dt}$$

Integrando esta expresión se obtiene

$$\int C_1 \frac{dv_1(t)}{dt} dt = \int C_2 \frac{dv_2(t)}{dt} dt \Rightarrow C_1 v_1(t) = C_2 v_2(t) + K \qquad (1)$$

Dado que (1) se verifica para todo $t \geq 0$, también lo hará para $t = 0^+$, con lo que, utilizando los datos del enunciado,

$$C_1 v_1(0^+) = C_2 v_2(0^+) + K \Rightarrow K = C_2 V_G \tag{2}$$

Dado que (1) se verifica para todo $t \geq 0$, también lo hará para $t = \infty$; es decir,

$$C_1 v_1(\infty) = C_2 v_2(\infty) + K \tag{3}$$

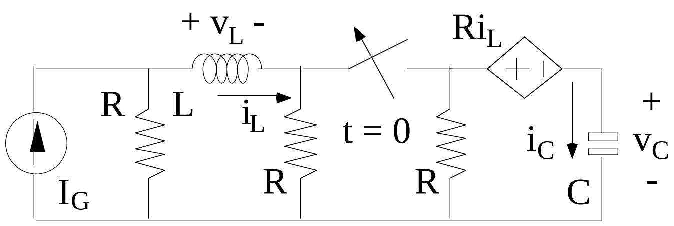
Además, como se indicó más arriba,

$$0 \text{ V} = v_1(\infty) + v_2(\infty) \tag{4}$$

Resolviendo el sistema (3-4) se llega a

$$v_1(\infty) = \frac{C_2 V_G}{C_1 + C_2} = - v_2(\infty)$$

Ejemplo 9 de cálculo de condiciones iniciales y finales



Son datos los valores de I_G, R, L y C.

Además,

$$i_L(0^+) = \frac{2I_G}{3},\ v_C(0^+) = -\frac{RI_G}{3}$$

El circuito de la figura, en el que la fuente independiente es continua, ha permanecido mucho tiempo sin cambios antes del cambio de posición del interruptor. Una vez producido éste, ya no experimenta más cambios.

Se desea hallar las derivadas con relación al tiempo de la tensión en la capacidad y la corriente en la inductancia en el instante $t = 0^+$.

Ecuación de malla

$$0 = Ri_C(0^+) + Ri_L(0^+) + v_C(0^+) \Rightarrow i_C(0^+) = -\frac{I_G}{3}$$

$$\left[\frac{dv_C(t)}{dt}\right]_{0^+} = \frac{i_C(0^+)}{C} = -\frac{I_G}{3C}$$

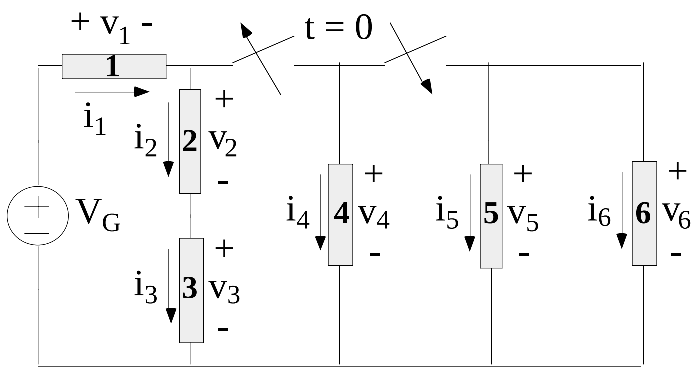
Ecuación de nudo

$$I_G = \frac{v_L(0^+) + Ri_L(0^+)}{R} + i_L(0^+) \Rightarrow v_L(0^+) = -\frac{RI_G}{3}$$

$$\left[\frac{di_L(t)}{dt}\right]_{0^+} = \frac{v_L(0^+)}{L} = -\frac{RI_G}{3L}$$

La derivada con relación al tiempo de cualquier variable en régimen permanente continuo es nula.

Ejemplo 10 de cálculo de condiciones iniciales y finales



El circuito de la figura, en el que la fuente es continua, ha permanecido mucho tiempo sin cambios antes del cambio de posición de los interruptores. Una vez producido éste, ya no experimenta más cambios.

Se conocen los datos indicados en la tabla adjunta.

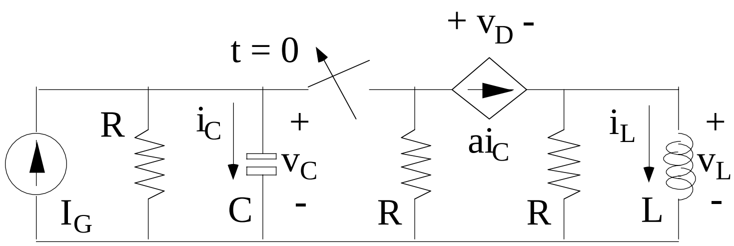
Se desea averiguar la naturaleza (R, L o C) de los elementos numerados.

t	i_1	v_1	i_2	v_2	i_3	v_3	i_4	v_4	i_5	v_5	i_6	v_6
0^-	1 A	1 V	1 A	0 V	1 A	1 V	0 A	1 V	0 A	0 V	0 A	0 V
0^+	1 A	1 V	1 A	0 V	1 A	1 V	- 1 A	1 V	1 A	1 V	0 A	1 V

Elemento	Naturaleza	Razonamiento
1	Resistencia	La corriente no es nula en 0^-; no puede ser capacidad. La tensión no es nula en 0^-; no puede ser inductancia.
2	Inductancia	La corriente no es nula en 0^-; no puede ser capacidad. La tensión es nula en 0^-; no puede ser resistencia.
3	Resistencia	La corriente no es nula en 0^-; no puede ser capacidad. La tensión no es nula en 0^-; no puede ser inductancia.
4	Capacidad	La tensión no es nula en 0^-; no puede ser inductancia. La corriente es nula en 0^-; no puede ser resistencia.
5	Resistencia	Cambia bruscamente la tensión; no puede ser capacidad. Cambia bruscamente la corriente; no puede ser inductancia.
6	Inductancia	Cambia bruscamente la tensión; no puede ser capacidad. En 0^+ hay tensión sin corriente; no puede ser resistencia.

Ejercicios de repaso

Condiciones iniciales y finales / 1



El circuito de la figura, en el que la fuente independiente es continua, ha permanecido mucho tiempo sin cambios antes del cambio de posición del interruptor. Una vez producido éste, ya no experimenta más cambios.

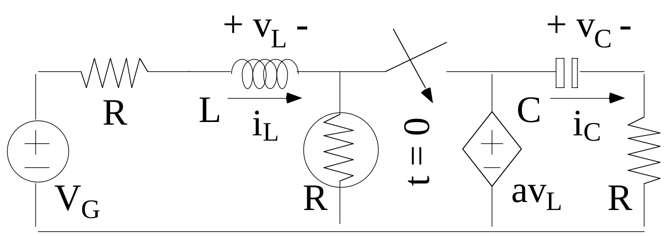
Son datos los valores de I_G, R, L, C y a.

Se desea calcular v_D en $t = 0^-$, $t = 0^+$ y $t = \infty$.

Soluciones

$$v_D(0^-) = \frac{RI_G}{2},\ v_D(0^+) = -\,aRI_G,\ v_D(\infty) = 0\ \mathrm{V}$$

Condiciones iniciales y finales / 2



El circuito de la figura, en el que la fuente independiente es continua, ha permanecido mucho tiempo sin cambios antes del cambio de posición del interruptor. Una vez producido éste, ya no experimenta más cambios.

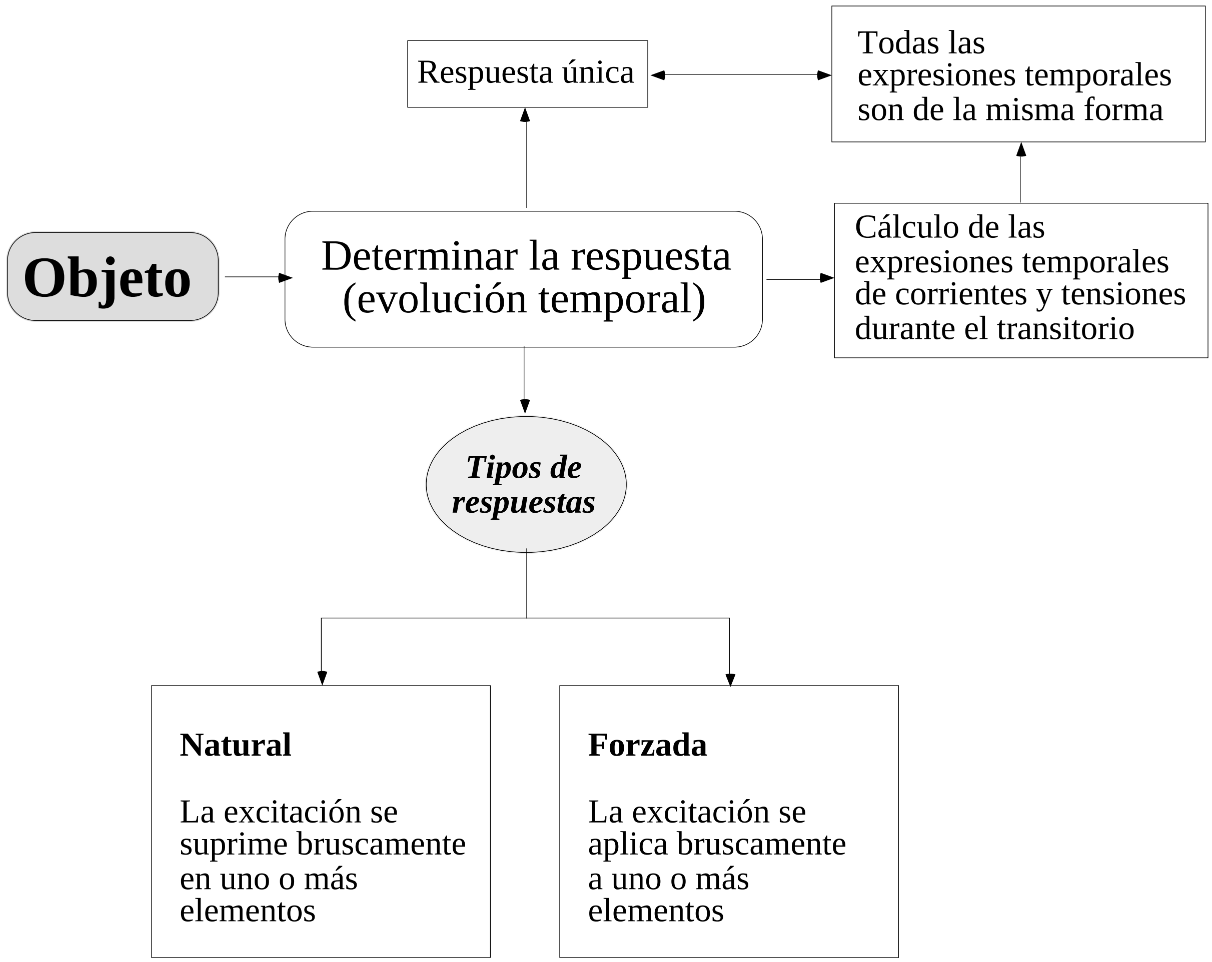
Se desea calcular la potencia en la resistencia marcada con un círculo en los instantes $t = 0^-$, $t = 0^+$ y $t = \infty$.

Son datos los valores de V_G, R, L, C y a.

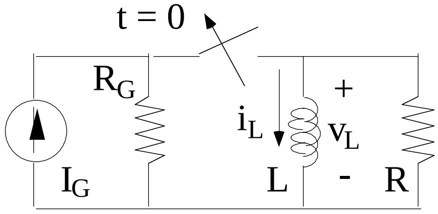
Soluciones

$$p_R(0^-) = \frac{V_G^2}{4R},\ p_R(0^+) = \frac{1}{R}\left[\frac{aV_G}{2(1 + a)}\right]^2,\ p_R(\infty) = 0 \text{ W}$$

Análisis en régimen transitorio



Respuesta natural de un circuito RL



Son datos los valores de todos los elementos del circuito.

El circuito de la figura, en el que la fuente es continua, ha permanecido mucho tiempo sin cambios antes de la apertura del interruptor. Una vez producida ésta, ya no experimenta más cambios.

Se pretende encontrar la respuesta del circuito para $t > 0$.

El régimen transitorio sólo se manifiesta en la parte del circuito que incluye la inductancia.
Es a esa parte a la que se refiere la pregunta sobre la *respuesta*.

La respuesta es natural porque se suprime la excitación de la inductancia.

Como la respuesta es única, se calculará la expresión temporal de la magnitud fundamental correspondiente al elemento reactivo considerado (i_L).
La expresión temporal correspondiente a cualquier otra magnitud puede obtenerse una vez hallada aquélla.

Para $t > 0$ se tiene

$$v_L + Ri_L = 0$$ **Ecuación de malla / nudo**

Sustituyendo en esta expresión la **relación funcional** de la inductancia, se tiene

$$L\frac{di_L}{dt} + Ri_L = 0$$ **Ecuación diferencial** que caracteriza la evolución temporal de i_L para $t > 0$

La solución de una ecuación diferencial de primer orden en una sola variable con coeficientes constantes y segundo miembro nulo es de la forma

$$i_L(t) = Ae^{-\frac{t}{\tau}}$$ **Expresión temporal (instantánea)** que caracteriza la evolución de i_L para $t > 0$

$$\tau = \frac{L}{R}$$ Constante de tiempo

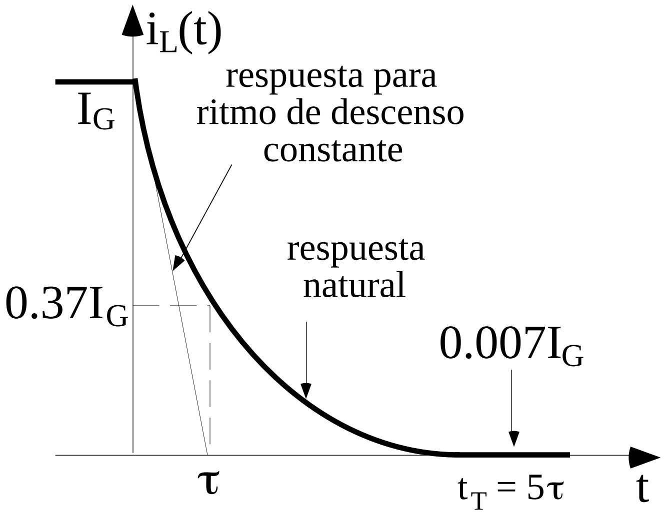
Para que la respuesta esté completamente determinada,
hay que hallar la **constante** que aparece en la expresión temporal.
Para ello se compara la condición inicial del transitorio
que puede deducirse directamente de la observación del circuito
con el valor que proporciona la expresión temporal. Así,

Por la observación del circuito (el cálculo se hace como se indicó en secciones anteriores)	$i_L(0^+) = i_L(0^-) = I_G$	$\Rightarrow A = I_G$
Por la expresión temporal	$i_L(0) = A$	

Expresión temporal de i_L para $t > 0$ $\qquad i_L(t) = I_G e^{-\frac{R}{L}t}$

Conocida la expresión temporal (instantánea),
puede obtenerse el valor de la variable en cualquier instante de tiempo.

Significado de la constante de tiempo



Respuesta natural de un circuito RL

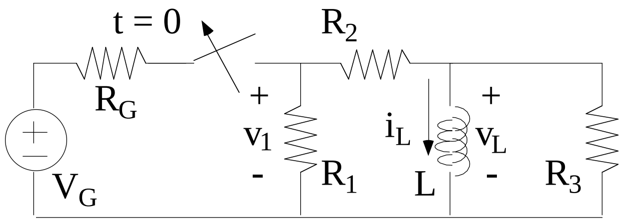
$$i_L(t) = I_G e^{-\frac{t}{\tau}}$$

La constante de tiempo es una medida
de lo rápido que desaparece (o de cuanto dura) el régimen transitorio.

Puede decirse que el régimen permanente continuo final
se establece cuando ha transcurrido un tiempo igual a cinco constantes de tiempo
(pasado ese intervalo, las variaciones en la respuesta son inapreciables).

Esto permite suponer que el circuito está en régimen permanente continuo
cuando se produce el cambio de posición en el interruptor.
Si la excitación correspondiente se ha aplicado en t = - ∞ (hace mucho tiempo),
es evidente que desde entonces ya transcurrieron cinco constantes de tiempo.

Ejemplo de respuesta natural en un circuito RL



V_G = 24 V, L = 5 mH
R_G = 12 Ω, R_1 = 6 Ω, R_2 = 4 Ω, R_3 = 10 Ω

El circuito de la figura, en el que la fuente es continua, ha permanecido mucho tiempo sin cambios antes de la apertura del interruptor. Una vez producida ésta, ya no experimenta más cambios.

Se desea obtener la expresión temporal de $v_1(t > 0)$, y la variación de energía en R_3 entre t = 0 y t = ∞.

Para t > 0 se tiene

$$\frac{v_L}{R_1 + R_2} + i_L + \frac{v_L}{R_3} = 0$$ Ecuación de nudo

$$L\left(\frac{1}{R_1 + R_2} + \frac{1}{R_3}\right)\frac{di_L}{dt} + i_L = 0$$ Ecuación diferencial

$$i_L(t) = Ae^{-\frac{t}{\tau}}$$ Expresión temporal

$$\tau = L\left(\frac{1}{R_1 + R_2} + \frac{1}{R_3}\right) = 1 \text{ ms}$$ Constante de tiempo

Por el circuito

$$i_L(0^+) = i_L(0^-) = \\ = \frac{V_G R_1}{R_G R_1 + R_G R_2 + R_1 R_2} = 1 \text{ A}$$

Por la expresión temporal

$$i_L(0) = A$$

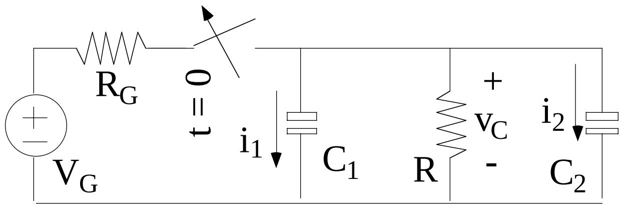
$$\Rightarrow A = 1 \text{ A}$$

$$v_L(t) = L\frac{di_L(t)}{dt} = -\frac{LA}{\tau}e^{-\frac{t}{\tau}} = -5e^{-t} \text{ V (t en ms)}$$

$$v_1(t) = v_L(t)\frac{R_1}{R_1 + R_2} = -3e^{-t} \text{ V (t en ms)}$$ Divisor de tensión

$$w_3 = \int_0^\infty p_3(t)dt = \int_0^\infty \frac{v_L^2(t)}{R_3}dt = \int_0^\infty \frac{(-5e^{-t})^2}{10}dt = 1.25 \text{ mJ}$$

Respuesta natural de un circuito RC



Son datos los valores de todos los elementos del circuito.

El circuito de la figura, en el que la fuente es continua, ha permanecido mucho tiempo sin cambios antes de la apertura del interruptor.
Una vez producida ésta, ya no experimenta más cambios.

Se pretende encontrar la respuesta del circuito para $t > 0$.

El régimen transitorio sólo se manifiesta en la parte del circuito que incluye las capacidades.
Es a esa parte a la que se refiere la pregunta sobre la *respuesta*.

La respuesta es natural porque se suprime la excitación de las capacidades.

Aunque hay dos capacidades, el circuito puede ser tratado como si tuviera una porque ambas pueden ser agrupadas en paralelo.

Como la respuesta es única, se calculará la expresión temporal de la magnitud fundamental correspondiente al elemento reactivo considerado (v_C).
La expresión temporal correspondiente a cualquier otra magnitud puede obtenerse una vez hallada aquélla.

Para $t > 0$ se tiene

$$i_1 + \frac{v_C}{R} + i_2 = 0$$ **Ecuación de nudo**

Sustituyendo en esta expresión la **relación funcional** de la capacidad, se tiene

$$(C_1 + C_2)\frac{dv_C}{dt} + \frac{v_C}{R} = 0$$ **Ecuación diferencial** que caracteriza la evolución temporal de v_C para $t > 0$

La solución de una ecuación diferencial de primer orden en una sola variable con coeficientes constantes y segundo miembro nulo es de la forma

$$v_C(t) = Ae^{-\frac{t}{\tau}}$$

Expresión temporal (instantánea) que caracteriza la evolución de v_C para $t > 0$

$$\tau = R(C_1 + C_2)$$

Constante de tiempo

Para que la respuesta esté completamente determinada, hay que hallar la **constante** que aparece en la expresión temporal. Para ello se compara la condición inicial del transitorio que puede deducirse directamente de la observación del circuito con el valor que proporciona la expresión temporal. Así,

Por la observación del circuito (el cálculo se hace como se indicó en secciones anteriores)

$$v_C(0^+) = v_C(0^-) = \frac{V_G R}{R_G + R}$$

Por la expresión temporal

$$v_C(0) = A$$

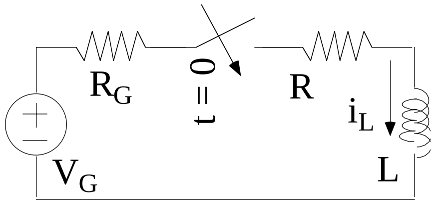
$$\Rightarrow A = \frac{V_G R}{R_G + R}$$

Expresión temporal de v_C para $t > 0$

$$v_C(t) = \frac{V_G R}{R_G + R} e^{-t/R(C_1 + C_2)}$$

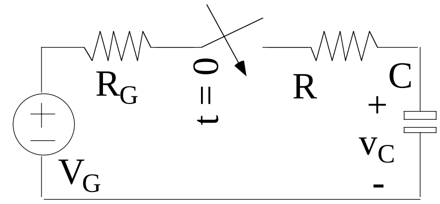
Conocida la expresión temporal (instantánea), puede obtenerse el valor de la variable en cualquier instante de tiempo.

Respuesta forzada en circuitos RL y RC



L descargada para $t < 0$

La respuesta
es forzada
porque se aplica
la excitación



C descargada para $t < 0$

Para $t > 0$ se tiene

$$L\frac{di_L}{dt} + (R_G + R)i_L = V_G$$

Ecuación diferencial
(obtenida combinando
una ecuación de circuito
y relación funcional)

$$(R_G + R)C\frac{dv_C}{dt} + v_C = V_G$$

La solución de una ecuación diferencial de primer orden en una sola variable
con coeficientes constantes y segundo miembro no nulo
está dada por las matemáticas.

$$i_L(t) = B + (A - B)e^{-\frac{t}{\tau}}$$

Expresión temporal
(instantánea)

$$v_C(t) = B + (A - B)e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$\tau = \frac{L}{R_G + R}$$

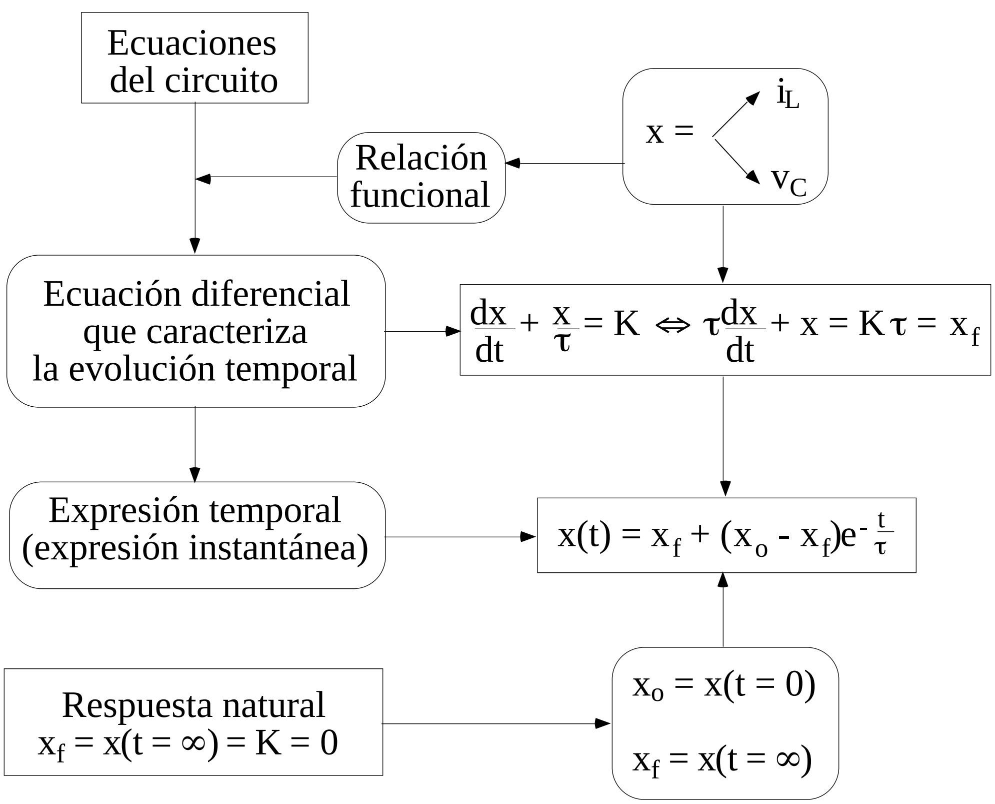
Constante de tiempo

$$\tau = (R_G + R)C$$

Hay que hallar las constantes que aparecen en la expresión temporal.
Se comparan las condiciones inicial y final del transitorio,
que pueden deducirse de la observación del circuito,
con los valores que proporciona la expresión temporal.

Por el circuito $i_L(0^+) = i_L(0^-) = 0 \text{ A}$ Por la expresión temporal $i_L(0) = A$	$\Rightarrow A = 0 \text{ A}$	Por el circuito $v_C(0^+) = v_C(0^-) = 0 \text{ V}$ Por la expresión temporal $v_C(0) = A$	$\Rightarrow A = 0 \text{ V}$
Por el circuito $i_L(\infty) = \dfrac{V_G}{R_G + R}$ Por la expresión temporal $i_L(\infty) = B$	$\Rightarrow B = \dfrac{V_G}{R_G + R}$	Por el circuito $v_C(\infty) = V_G$ Por la expresión temporal $v_C(\infty) = B$	$\Rightarrow B = V_G$

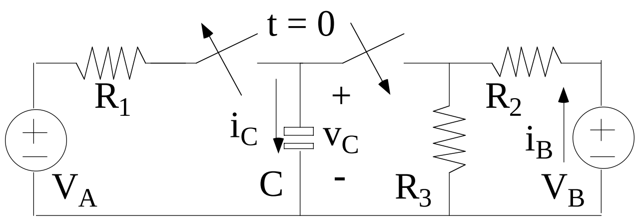
Respuesta en régimen transitorio de circuitos con un solo elemento reactivo



El procedimiento también es aplicable si hay varios elementos reactivos de la misma naturaleza que puedan ser agrupados en uno solo.

Ejemplos de respuesta forzada

Ejemplo de respuesta forzada en un circuito RC



$V_A = 2$ V, $V_B = 2$ V, $C = 1$ μF
$R_1 = 2\ \Omega$, $R_2 = 2\ \Omega$, $R_3 = 2\ \Omega$

El circuito de la figura, en el que las fuentes son continuas, ha permanecido mucho tiempo sin cambios antes del cambio de posición de los interruptores. Una vez producido éste, ya no experimenta más cambios.

Se desea obtener la expresión temporal (t > 0) de la potencia en la fuente V_B.

Para t > 0 se tiene

$$\frac{V_B - v_C}{R_2} = i_C + \frac{v_C}{R_3},\ i_C = C\frac{dv_C}{dt}$$ Ecuación de nudo y relación funcional

$$\frac{CR_2R_3}{(R_2 + R_3)}\frac{dv_C}{dt} + v_C = \frac{R_3}{R_2 + R_3}V_B$$ Ecuación diferencial

$$\tau = \frac{CR_2R_3}{R_2 + R_3} = 1\ \mu s$$ Constante de tiempo

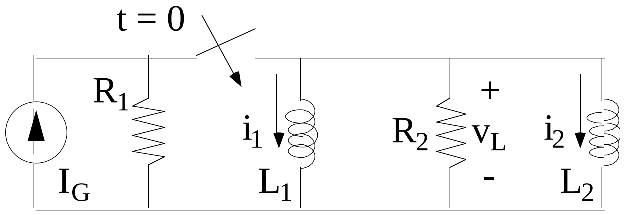
$$v_{Co} = v_C(0) = V_A = 2\ V$$
$$v_{Cf} = v_C(\infty) = \frac{R_3}{R_2 + R_3}V_B = 1\ V$$ Por el circuito

$$v_C(t) = v_{Cf} + (v_{Co} - v_{Cf})e^{-\frac{t}{\tau}} = 1 + e^{-t}\ V\ (t \text{ en } \mu s)$$ Expresión temporal

$$p_B(t) = -V_Bi_B(t) = -V_B\frac{V_B - v_C(t)}{R_2} = -1 + e^{-t}\ W\ (t \text{ en } \mu s)$$

Es respuesta forzada porque en t = 0 la capacidad es sometida bruscamente a una excitación no nula distinta de la que soportaba anteriormente.

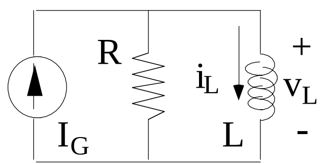
Ejemplo de respuesta forzada en un circuito RL



Son datos los valores
de todos los elementos del circuito.

El circuito de la figura,
en el que la fuente es continua,
ha permanecido mucho tiempo
sin cambios antes del cierre
del interruptor.
Una vez producido éste,
ya no experimenta más cambios.

Se desea obtener
la expresión temporal ($t > 0$)
de la corriente i_1.



Para $t > 0$ se tiene

$$R = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2},\ L = \frac{L_1 L_2}{L_1 + L_2}$$

$$I_G = \frac{v_L}{R} + i_L,\ v_L = L\frac{di_L}{dt}$$ Ecuación de nudo y relación funcional

$$\frac{di_L}{dt} + \frac{R}{L}i_L = I_G$$ Ecuación diferencial

$$\tau = \frac{L}{R}$$ Constante de tiempo

$$i_{Lo} = i_L(0) = 0\ \text{A}$$
$$i_{Lf} = i_L(\infty) = I_G$$ Por el circuito

$$i_L(t) = i_{Lf} + (i_{Lo} - i_{Lf})e^{-\frac{t}{\tau}} = I_G(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$$ Expresión temporal

$$L_1\frac{di_1}{dt} = L_2\frac{di_2}{dt} = L\frac{di_L}{dt}$$

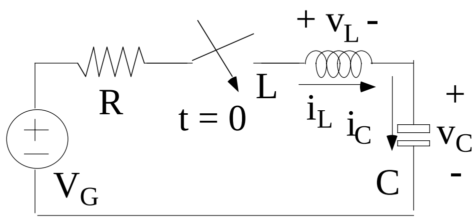
$$\int L_1\frac{di_1}{dt}dt = \int L\frac{di_L}{dt}dt \Rightarrow L_1 i_1 = Li_L + K$$

$$t = 0 \Rightarrow i_1 = 0\ \text{A} = i_L \Rightarrow K = 0\ \text{Vs}$$

$$\Rightarrow i_1(t) = \frac{L}{L_1}i_L(t) =$$

$$= \frac{L_2 I_G}{L_1 + L_2}(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$$

Respuesta de un circuito con dos elementos reactivos no agrupables



Son datos los valores
de todos los elementos del circuito.

El circuito de la figura,
en el que la fuente es continua,
ha permanecido mucho tiempo
sin cambios antes del cierre
del interruptor.
Una vez producido éste,
ya no experimenta más cambios.

Se desea obtener
la respuesta para $t > 0$.

Para $t > 0$ se tiene

Ecuaciones del circuito

$$V_G = Ri_L + v_L + v_C \quad (1)$$

$$i_L = i_C \quad (2)$$

Relaciones funcionales

$$v_L = L\frac{di_L}{dt} \quad (3)$$

$$i_C = C\frac{dv_C}{dt} \quad (4)$$

Combinando (1-4) se llega a

Ecuaciones diferenciales
que caracterizan la evolución
de i_L y v_C para $t > 0$

$$LC\frac{d^2v_C}{dt^2} + RC\frac{dv_C}{dt} + v_C = V_G$$

$$LC\frac{d^2i_L}{dt^2} + RC\frac{di_L}{dt} + i_L = 0$$

Solución de las ecuaciones diferenciales

Para cada magnitud fundamental hay una ecuación diferencial

$$a\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + cx = K$$

a, b y c son iguales para todas las magnitudes fundamentales

K puede ser distinto para distintas magnitudes fundamentales

Solución

$$\mathbf{x(t) = x_f + x_h(t)}$$

$x_f = x(t = \infty)$

$x_f = 0$ si $K = 0$

$x_h(t)$

Solución de la ecuación homogénea

Ecuación homogénea

$$a\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + cx = 0$$

Solución de la ecuación homogénea

Ecuación homogénea

$$a\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + cx = 0$$

Ecuación característica

$$as^2 + bs + c = 0$$

Raíces de la ecuación característica

$$s_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$$

Coeficiente de amortiguamiento

$$\alpha \left[\frac{1}{s}\right] = \frac{b}{2a}$$

Frecuencia angular de resonancia

$$\omega_0 \left[\frac{rad}{s} = \frac{1}{s}\right] = \sqrt{\frac{c}{a}}$$

Respuesta supercrítica (sobreamortiguada)

s_1 y s_2 reales

$s_1 < 0 > s_2$

$s_1 \neq s_2$

$\omega_0^2 < \alpha^2$

$x_h(t) = Ae^{s_1 t} + Be^{s_2 t}$

Respuesta crítica (amortiguada)

s_1 y s_2 reales

$s_1 < 0 > s_2$

$s_1 = s_2$

$\omega_0^2 = \alpha^2$

$x_h(t) = Ate^{-\alpha t} + Be^{-\alpha t}$

Respuesta subcrítica (subamortiguada)

s_1 y s_2 complejas

$s_1 = s_2^*$

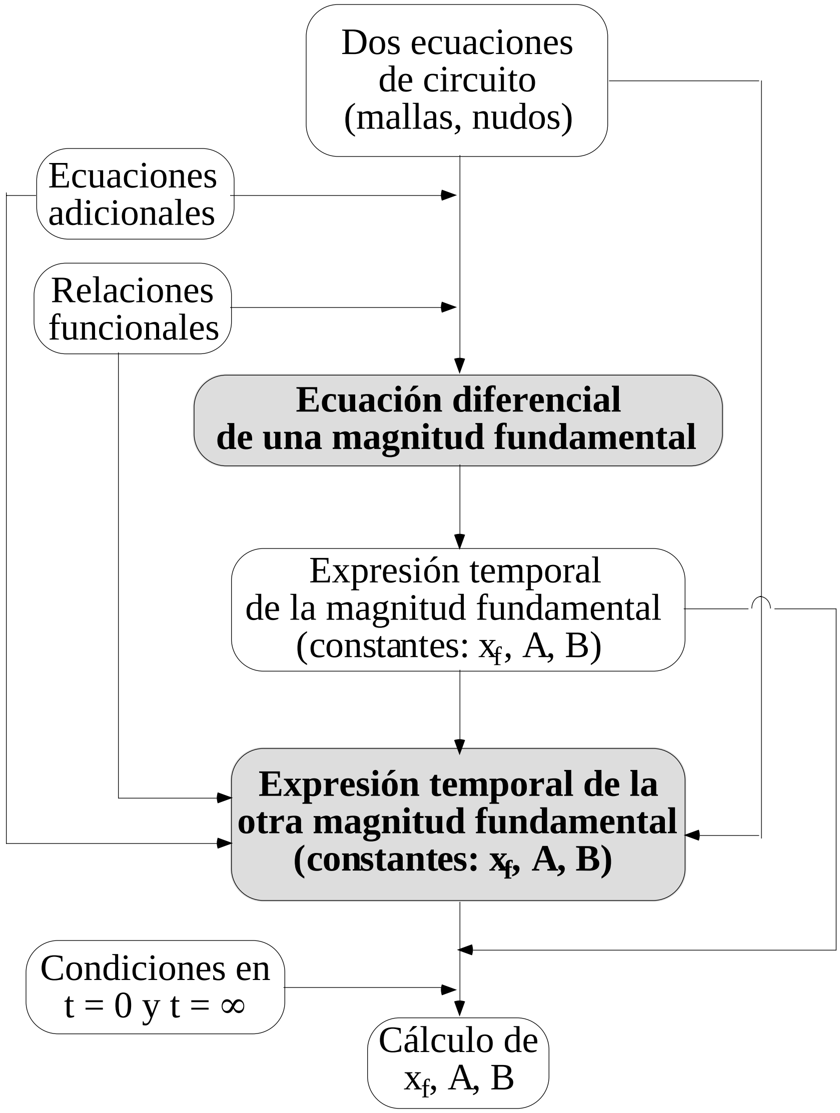
$\omega_0^2 > \alpha^2$

$\omega_d = +\sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$

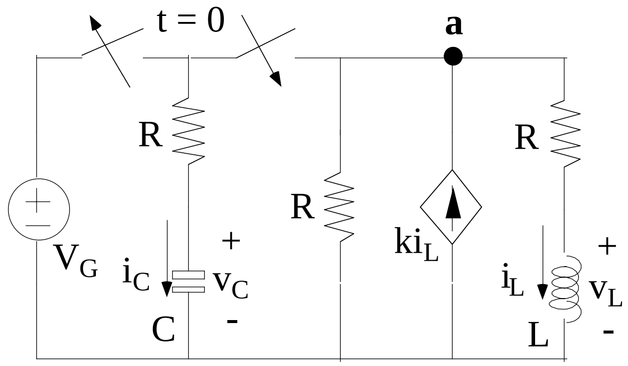
$x_h(t) = Ae^{-\alpha t}\cos(\omega_d t) + Be^{-\alpha t}\operatorname{sen}(\omega_d t)$

$$t \to \infty \Rightarrow x_h(t) \to 0$$

Obtención de las expresiones temporales



Ejemplo 1 de respuesta en circuito con dos elementos



$V_G = 1$ V, $k = -1$
$R = 1\ \Omega$, $L = 1$ H, $C = 1$ F

El circuito de la figura, en el que la fuente independiente es continua, ha permanecido mucho tiempo sin cambios antes del cambio de posición de los interruptores. Una vez producido éste, ya no se producen más cambios.

Se desea obtener las expresiones temporales de i_L y v_C para $t > 0$.

Para $t > 0$ se tiene

Ecuaciones del circuito

$$v_a = Ri_C + v_C \qquad (1)$$

$$v_a = Ri_L + v_L \qquad (2)$$

Fuente dependiente

$$ki_L = i_C + \frac{v_a}{R} + i_L \qquad (3)$$

Relaciones funcionales

$$i_C = C\frac{dv_C}{dt} \qquad (4)$$

$$v_L = L\frac{di_L}{dt} \qquad (5)$$

Combinando (1-5) se llega a

Ecuaciones diferenciales de las variables fundamentales

$$2LC\frac{d^2v_C}{dt^2} + \left[(3-k)RC + \frac{L}{R}\right]\frac{dv_C}{dt} + (2-k)v_C = 0$$

$$2LC\frac{d^2i_L}{dt^2} + \left[(3-k)RC + \frac{L}{R}\right]\frac{di_L}{dt} + (2-k)i_L = 0$$

Se elige arbitrariamente una de las ecuaciones diferenciales
(por ejemplo, la primera) y se aplica el procedimiento general a partir de ella.

Ecuación característica

$$as^2 + bs + c = 0$$
$$a = 2LC = 2s^2$$
$$b = (3 - k)RC + \frac{L}{R} = 5\ s$$
$$c = 2 - k = 3$$

Tipo de respuesta

$$\alpha = \frac{b}{2a} = \frac{5}{4}\ s^{-1},\ \omega_0 = \sqrt{\frac{c}{a}} = \sqrt{\frac{3}{2}}\ \text{rad/s}$$
$$\alpha^2 > \omega_0^2 \Rightarrow \text{respuesta supercrítica}$$

Expresión temporal
de la variable considerada
(se incluye v_{Cf} por generalidad, aunque en este caso tal valor es nulo, porque también lo es el segundo miembro de (6-7))

$$v_C(t) = v_{Cf} + Ae^{s_1 t} + Be^{s_2 t} \qquad (6)$$
$$s_1 = -\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} = -1\ s^{-1}$$
$$s_2 = -\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} = -1.5\ s^{-1}$$

Combinando (1-6) se obtiene

Expresión temporal
de la otra variable

$$i_L(t) = \frac{1}{k-1}\left[\frac{v_{Cf}}{R} + A\left(2Cs_1 + \frac{1}{R}\right)e^{s_1 t} + B\left(2Cs_2 + \frac{1}{R}\right)e^{s_2 t}\right] = \qquad (7)$$
$$= -\frac{v_{Cf}}{2} + \frac{Ae^{s_1 t}}{2} + Be^{s_2 t}$$

Aplicando las condiciones y finales a (6-7) se tiene
(sólo se utilizan tres ecuaciones porque hay tres incógnitas)

Por el circuito		Por la expresión temporal		
$1\ V = V_G$	$v_C(0)$	$v_{Cf} + A + B$	$\Rightarrow$	$v_{Cf} = 0\ V$
$0\ V$	$v_C(\infty)$	v_{Cf}		$A = 2\ V$
$0\ A$	$i_L(0)$	$-\frac{v_{Cf}}{2} + \frac{A}{2} + B$		$B = -1\ V$

Respuesta
(expresiones temporales)

$$v_C(t) = 2e^{-t} - e^{-1.5t}\ V\ (t \text{ en } s)$$
$$i_L(t) = e^{-t} - e^{-1.5t}\ A\ (t \text{ en } s)$$

Observaciones

Las siguientes observaciones se deducen del ejemplo anterior, pero tienen validez general en el caso de régimen transitorio en circuitos con dos elementos reactivos no agrupables.

Los coeficientes de los primeros miembros de las ecuaciones diferenciales no dependen de las características de las fuentes independientes. Éstas sólo influyen en los segundos miembros de aquéllas. Es decir, la respuesta está determinada por los elementos pasivos y las características de las fuentes dependientes.

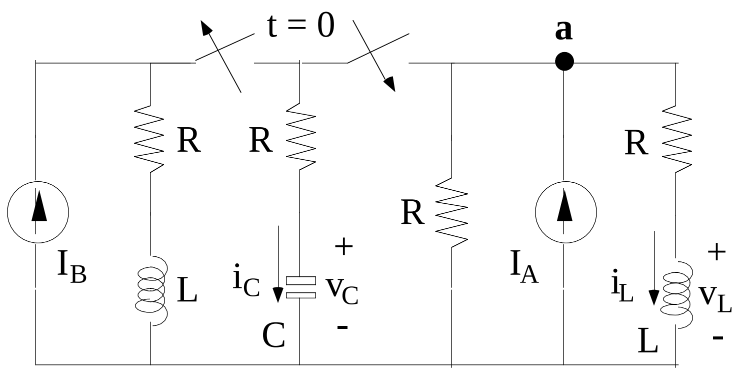
No es posible determinar el tipo de respuesta si no se conocen los valores numéricos de los elementos del circuito. Obsérvese que el tipo de respuesta depende de la relación entre el coeficiente de amortiguamiento y la frecuencia angular de resonancia, que estos parámetros dependen de los coeficientes de la ecuación característica, y que éstos dependen de las características de los elementos del circuito.

En circuitos con dos elementos reactivos no existe nada exactamente equiparable a la constante de tiempo. Para determinar un parámetro aproximadamente equivalente puede seguirse cualquiera de los siguientes procedimientos:

Obtener el mayor valor de t que hace que hace que un término exponencial valga $e^{-5} = 0.0067$ (en el ejemplo anterior, t = 5 s).

Calcular la mayor de las *constantes de tiempo* que aparecen en las ecuaciones diferenciales (en el ejemplo anterior, (3 - k)RC = 4 s, L/R = 1 s).

Ejemplo 2 de respuesta en circuito con dos elementos



$I_A = 2$ A, $I_B = 2$ A
$R = 1\ \Omega$, $L = 1$ H, $C = 1$ F

El circuito de la figura, en el que las fuentes son continuas ha permanecido mucho tiempo sin cambios antes del cambio de posición de los interruptores. Una vez producido éste, ya no se producen más cambios.

Se desea obtener la expresión temporal de la potencia en la fuente I_A.

Para t > 0 se tiene

Ecuaciones del circuito y relaciones funcionales

$$RC\frac{dv_C}{dt} + v_C = v_a = Ri_L + L\frac{di_L}{dt} \qquad (1)$$

$$I_A = C\frac{dv_C}{dt} + \frac{v_a}{R} + i_L \qquad (2)$$

Combinando (1-2) se obtiene

Ecuaciones diferenciales

$$2LC\frac{d^2v_C}{dt^2} + \left(3RC + \frac{L}{R}\right)\frac{dv_C}{dt} + 2v_C = RI_A$$

$$2LC\frac{d^2i_L}{dt^2} + \left(3RC + \frac{L}{R}\right)\frac{di_L}{dt} + 2i_L = I_A$$

con lo que puede deducirse

Ecuación característica

$$a = 2LC = 2\ s^2,\ b = 3RC + \frac{L}{R} = 4\ s,\ c = 2$$

$$\alpha = \frac{b}{2a} = 1\ s^{-1},\ \omega_0 = \sqrt{\frac{c}{a}} = 1\ \text{rad/s}$$

Tipo de respuesta

$$\alpha^2 = \omega_0^2 \Rightarrow \text{respuesta crítica}$$

Expresión temporal de v_C $$v_C(t) = v_{Cf} + Ate^{-\alpha t} + Be^{-\alpha t} \qquad (3)$$

Combinando (1-3) se llega a

Expresión temporal de i_L
$$i_L(t) = I_A - \frac{v_{Cf}}{R} + A\left(2\alpha C - \frac{1}{R}\right)te^{-\alpha t} + \left[-2CA + B\left(2\alpha C - \frac{1}{R}\right)\right]e^{-\alpha t} = \qquad (4)$$
$$= 2 - v_{Cf} + Ate^{-\alpha t} + (B - 2A)e^{-\alpha t}$$

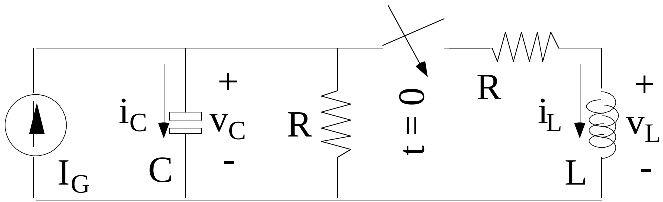
Aplicando las condiciones y finales a (3-4) se tiene

Por el circuito		Por la expresión temporal		
$2\ V = RI_B$	$v_C(0)$	$v_{Cf} + B$		$v_{Cf} = 1\ V$
$1\ V = \frac{RI_A}{2}$	$v_C(\infty)$	v_{Cf}	$\Rightarrow$	$A = 0.5\ V/s$
$1\ A = \frac{I_A}{2}$	$i_L(0)$	$2 - v_{Cf} + B - 2A$		$B = 1\ V$

Respuesta
$$v_C(t) = 1 + 0.5te^{-t} + e^{-t}\ V\ (t\ \text{en s})$$
$$i_L(t) = 1 + 0.5te^{-t}\ A\ (t\ \text{en s})$$

$$p_A(t) = -v_a(t)I_a = -\left[Ri_L(t) + L\frac{di_L(t)}{dt}\right]I_A = -(2 + e^{-t})\ W\ (t\ \text{en s})$$

Ejemplo 3 de respuesta en circuito con dos elementos



$I_G = 2$ A

$R = 1\ \Omega$, $L = 1$ H, $C = 1$ F

El circuito de la figura, en el que la fuente es continua ha permanecido mucho tiempo sin cambios antes del cambio de posición del interruptor. Una vez producido éste, ya no se producen más cambios.

Se desea obtener la variación de energía en la capacidad entre $t = 0$ y $t = \infty$.

Para $t > 0$ se tiene

Ecuaciones del circuito y relaciones funcionales

$$v_C = Ri_L + L\frac{di_L}{dt} \qquad (1)$$

$$I_G = C\frac{dv_C}{dt} + \frac{v_C}{R} + i_L \qquad (2)$$

Combinando (1-2) se obtiene

Ecuaciones diferenciales

$$LC\frac{d^2v_C}{dt^2} + \left(RC + \frac{L}{R}\right)\frac{dv_C}{dt} + 2v_C = RI_G$$

$$LC\frac{d^2i_L}{dt^2} + \left(RC + \frac{L}{R}\right)\frac{di_L}{dt} + 2i_L = I_G$$

con lo que puede deducirse

Ecuación característica

$$a = LC = 1\ s^2,\ b = RC + \frac{L}{R} = 2\ s,\ c = 2$$

$$\alpha = \frac{b}{2a} = 1\ s^{-1},\ \omega_0 = \sqrt{\frac{c}{a}} = \sqrt{2}\ \text{rad/s}$$

Tipo de respuesta

$$\alpha^2 < \omega_0^2 \Rightarrow \text{respuesta subcrítica}$$

$$\omega_d = +\sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} = 1\ \text{rad/s}$$

Expresión temporal de i_L $$i_L(t) = i_{Lf} + Ae^{-\alpha t}\cos(\omega_d t) + Be^{-\alpha t}\mathrm{sen}(\omega_d t) \qquad (3)$$

Combinando (1-3) se llega a

Expresión temporal de v_C

$$\begin{aligned} v_C(t) &= Ri_{Lf} + Ae^{-\alpha t}[(R - \alpha L)\cos(\omega_d t) - \omega_d L\mathrm{sen}(\omega_d t)] + \\ &+ Be^{-\alpha t}[(R - \alpha L)\mathrm{sen}(\omega_d t) + \omega_d L\cos(\omega_d t)] = \\ &= i_{Lf} - Ae^{-t}\mathrm{sen}(t) + Be^{-t}\cos(t)] \end{aligned} \qquad (4)$$

Aplicando las condiciones y finales a (3-4) se tiene

Por el circuito		Por la expresión temporal		
$0\ A$	$i_L(0)$	$i_{Lf} + A$		$i_{Lf} = 1\ A$
$1\ A = \dfrac{I_G}{2}$	$i_L(\infty)$	i_{Lf}	$\Rightarrow$	$A = -1\ A$
$2\ V = RI_G$	$v_C(0)$	$i_{Lf} + B$		$B = 1\ A$

Respuesta

$$i_L(t) = 1 - e^{-t}\cos(t) + e^{-t}\mathrm{sen}(t)\ A\ (t \text{ en s})$$
$$v_C(t) = 1 + e^{-t}\cos(t) + e^{-t}\mathrm{sen}(t)\ V\ (t \text{ en s})$$

$$w_C = \int_0^\infty p_C(t)dt = \int_0^\infty v_C(t)C\frac{dv_C(t)}{dt}dt = \frac{C}{2}\left[v_C^2(\infty) - v_C^2(0)\right] = -1.5\ J$$

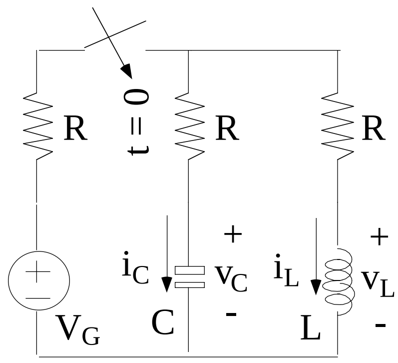
El valor de $v_C(\infty)$ puede obtenerse del circuito o de la expresión temporal

---

Si se deseara obtener la energía en la resistencia
que está en paralelo con la capacidad, el cálculo sería

$$w_R = \int_0^\infty p_R(t)dt = \int_0^\infty v_C(t)\frac{v_C(t)}{R}dt = \int_0^\infty \frac{[1 + e^{-t}\cos(t) + e^{-t}\mathrm{sen}(t)]^2}{R}dt$$

Ejemplo 4 de respuesta en circuito con dos elementos



El circuito de la figura, en el que la fuente es continua ha permanecido mucho tiempo sin cambios antes del cambio de posición del interruptor. Una vez producido éste, ya no se producen más cambios.

Se desea obtener la respuesta para $t > 0$.

Son datos los valores de V_G y τ, siendo $\tau = RC = \frac{L}{R}$.

Para $t > 0$ se tiene

Ecuaciones del circuito y relaciones funcionales

$$V_G = R\left(C\frac{dv_C}{dt} + i_L\right) + RC\frac{dv_C}{dt} + v_C$$

$$V_G = R\left(C\frac{dv_C}{dt} + i_L\right) + Ri_L + L\frac{di_L}{dt}$$

Ecuaciones diferenciales

$$2LC\frac{d^2v_C}{dt^2} + \left(3RC + \frac{L}{R}\right)\frac{dv_C}{dt} + 2v_C = V_G$$

$$2LC\frac{d^2i_L}{dt^2} + \left(3RC + \frac{L}{R}\right)\frac{di_L}{dt} + 2i_L = \frac{V_G}{R}$$

Ecuación característica

$$RC = \tau = \frac{L}{R} \Rightarrow LC = (RC)\left(\frac{L}{R}\right) = \tau^2$$

$$a = 2LC = 2\tau^2,\ b = 3RC + \frac{L}{R} = 4\tau,\ c = 2$$

Tipo de respuesta

$$\alpha = \frac{b}{2a} = \frac{1}{\tau},\ \omega_0 = \sqrt{\frac{c}{a}} = \frac{1}{\tau}$$

$$\alpha^2 = \omega_0^2 \Rightarrow \text{respuesta crítica}$$

Expresiones temporales

$$v_C(t) = v_{Cf} + Ate^{-\alpha t} + Be^{-\alpha t}$$

$$i_L(t) = \frac{V_G - v_{Cf}}{R} + A\left(2\alpha C - \frac{1}{R}\right)te^{-\alpha t} + \left[-2CA + B\left(2\alpha C - \frac{1}{R}\right)\right]e^{-\alpha t}$$

Por el circuito		Por la expresión temporal		
0 V	$v_C(0)$	$v_{Cf} + B$	$\Rightarrow$	$v_{Cf} = \frac{V_G}{2}$
$\frac{V_G}{2}$	$v_C(\infty)$	v_{Cf}		$A = 0$ V/s
0 A	$i_L(0)$	$\frac{V_G - v_{Cf}}{R} - 2CA + B\left(2\alpha C - \frac{1}{R}\right)$		$B = -\frac{V_G}{2}$

Respuesta

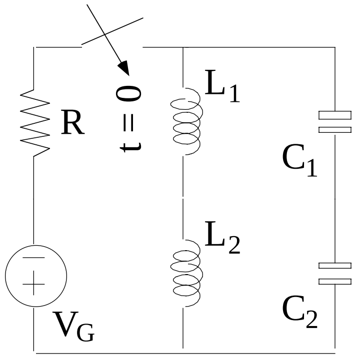
$$v_C(t) = \frac{V_G}{2}(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$$

$$i_L(t) = \frac{V_G}{2R}(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$$

La expresión temporal de la corriente en la inductancia
no está completamente determinada, ya que se desconoce el valor de R.

Pese a las apariencias, la respuesta de este circuito no está relacionada
con la de un circuito con un solo elemento reactivo.
La similitud formal se debe únicamente a la circunstancia
de que el coeficiente A tenga un valor nulo.

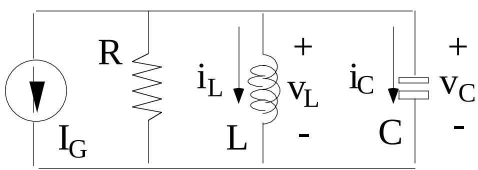
Ejemplo 5 de respuesta en circuito con dos elementos



El circuito de la figura, en el que la fuente es continua, ha permanecido mucho tiempo sin cambios antes del cambio de posición del interruptor. Una vez producido éste, ya no se producen más cambios.

Se desea obtener la expresión temporal de la potencia en C_2 para t > 0.

$$V_G = 0.5\text{ V},\ R = 0.5\ \Omega$$
$$L_1 = 0.6\text{ mH},\ L_2 = 0.4\text{ mH}$$
$$C_1 = 2\text{ mF},\ C_2 = 2\text{ mF}$$



Pese a tener cuatro elementos reactivos, el circuito puede ser tratado como si sólo tuviera dos, ya que aquéllos son agrupables dos a dos.

Para t > 0 el circuito es equivalente al de la figura adjunta, en la que

$$I_G = \frac{V_G}{R} = 1\text{ A}$$

$$L = L_1 + L_2 = 1\text{ mH},\ C = \frac{C_1C_2}{C_1 + C_2} = 1\text{ mF}$$

Ecuaciones del circuito y relaciones funcionales

$$v_C = L\frac{di_L}{dt}$$

$$-I_G = \frac{v_C}{R} + i_L + C\frac{dv_C}{dt}$$

Ecuaciones diferenciales

$$LC\frac{d^2v_C}{dt^2} + \frac{L}{R}\frac{dv_C}{dt} + v_C = 0$$

$$LC\frac{d^2i_L}{dt^2} + \frac{L}{R}\frac{di_L}{dt} + i_L = -I_G$$

Ecuación característica

$$a = LC = 10^{-6}\ s^2,\ b = \frac{L}{R} = 2\times10^{-3}\ s^1,\ c = 1$$

Tipo de respuesta

$$\alpha = \frac{b}{2a} = 10^3\ s^{-1},\ \omega_0 = \sqrt{\frac{c}{a}} = 10^3\ s^{-1}$$

$$\alpha^2 = \omega_0^2 \Rightarrow \text{respuesta crítica}$$

Expresiones temporales

$$i_L(t) = i_{Lf} + Ate^{-\alpha t} + Be^{-\alpha t}$$

$$v_C(t) = L[A(1 - \alpha t)e^{-\alpha t} - \alpha Be^{-\alpha t}] =$$
$$= 10^{-3}[A(1 - \alpha t)e^{-\alpha t} - \alpha Be^{-\alpha t}]$$

Por el circuito		Por la expresión temporal		
0 A	$i_L(0)$	$i_{Lf} + B$		$i_{Lf} = -1$ A
$-1\ A = -I_G$	$i_L(\infty)$	i_{Lf}	$\Rightarrow$	$A = 10^3$ A/s
0 V	$v_C(0)$	$10^{-3}(A - \alpha B)$		$B = 1$ A

Respuesta

$$i_L(t) = -1 + te^{-t} + e^{-t}\ \text{A (t en ms)}$$
$$v_C(t) = -te^{-t}\ \text{V (t en ms)}$$

$$C\frac{dv_C}{dt} = C_2\frac{dv_{C2}}{dt}$$

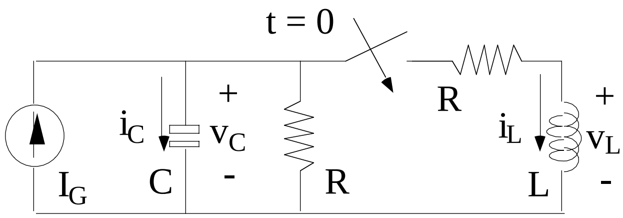
$$\int C\frac{dv_C}{dt}dt = \int C_2\frac{dv_{C2}}{dt}dt \Rightarrow C_2v_{C2} = Cv_C + K$$

$$t = 0 \Rightarrow v_{C2} = 0\ V = v_C \Rightarrow K = 0\ As$$

$$\Rightarrow v_{C2}(t) = \frac{C}{C_2}v_C(t)$$

$$p_{C2}(t) = v_{C2}(t)i_C(t) = \frac{C}{C_2}v_C(t)\frac{dv_C}{dt} = 0.5t(1 - t)e^{-2t}\ \text{mW (t en ms)}$$

Ejemplo 6 de respuesta en circuito con dos elementos



I_G = 2 A, R = 1 Ω

El régimen transitorio se caracteriza por los siguientes parámetros:
$\alpha = 1\ s^{-1}$, $\omega_0 = \sqrt{2}$ rad/s

El circuito de la figura, en el que la fuente es continua, ha permanecido mucho tiempo sin cambios antes del cambio de posición del interruptor. Una vez producido éste, ya no se producen más cambios.

Se desea obtener los valores de la inductancia y la capacidad.

Para t > 0 se tiene

Ecuaciones del circuito y relaciones funcionales

$$v_C = Ri_L + L\frac{di_L}{dt}$$

$$I_G = C\frac{dv_C}{dt} + \frac{v_C}{R} + i_L$$

Ecuación diferencial

$$LC\frac{d^2v_C}{dt^2} + \left(RC + \frac{L}{R}\right)\frac{dv_C}{dt} + 2v_C = RI_G$$

Ecuación característica

$$a = LC,\ b = RC + \frac{L}{R},\ c = 2$$

$$1\ s^{-1} = \alpha = \frac{b}{2a} = \frac{R}{2L} + \frac{1}{2RC}$$

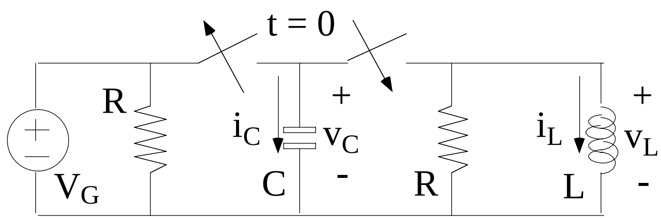
$$\sqrt{2}\ \text{rad/s} = \omega_0 = \sqrt{\frac{c}{a}} = \sqrt{\frac{2}{LC}}$$

$\Rightarrow$

L = 1 H

C = 1 F

Ejemplo 7 de respuesta en circuito con dos elementos



Para t > 0,

$v_C = (1 - t)e^{-t}$ V (t en s)

$i_L = 0.5te^{-t}$ A (t en s)

El circuito de la figura, en el que la fuente es continua, ha permanecido mucho tiempo sin cambios antes del cambio de posición de los interruptores. Una vez producido éste, ya no se producen más cambios.

Se desea obtener los valores de V_G, R, L y C.

Para t > 0 se tiene

Ecuaciones del circuito y relaciones funcionales

$$v_C = L\frac{di_L}{dt}$$

$$0 = C\frac{dv_C}{dt} + \frac{v_C}{R} + i_L$$

Ecuación diferencial

$$LC\frac{d^2i_L}{dt^2} + \frac{L}{R}\frac{di_L}{dt} + i_L = 0$$

Ecuación característica

$$a = LC,\ b = \frac{L}{R},\ c = 1$$

En régimen transitorio la respuesta es crítica,
ya que en las expresiones temporales figuran términos de la forma te^{-kt}.
En la respuesta crítica, el coeficiente de amortiguamiento
es el coeficiente del exponente en tales términos; luego,

$$\alpha = 1\ s^{-1}$$

En la respuesta crítica, los valores numéricos del coeficiente de amortiguamiento
y la frecuencia angular de resonancia son iguales; luego

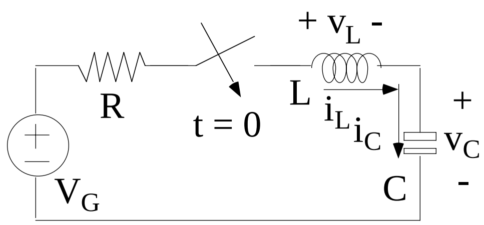
$$\omega_0 = \alpha = 1 \text{ rad/s}$$

(por el circuito) $V_G = v_C(0) = 1$ V (por la expresión temporal) $\Rightarrow V_G = 1$ V

Por las expresiones temporales	Por el circuito	Por las expresiones temporales	
$e^{-t} - te^{-t}$	$v_C = L\frac{di_L}{dt}$	$L(0.5e^{-t} - 0.5te^{-t})$	$\Rightarrow L = 2$ H

$$1 \text{ rad/s} = \omega_0 = \sqrt{\frac{c}{a}} = \frac{1}{\sqrt{LC}} \Rightarrow C = 0.5\ F,\ 1\ s^{-1} = \alpha = \frac{b}{2a} = \frac{1}{2RC} \Rightarrow R = 1\ \Omega$$

Ejemplo 8 de respuesta en circuito con dos elementos



Para t > 0,

$v_C = 10 - 5e^{-1000t} - 5e^{-9000t}$ V (t en s)

$i_L = e^{-1000t} + 9e^{-9000t}$ mA (t en s)

El circuito de la figura, en el que la fuente es continua, ha permanecido mucho tiempo sin cambios antes del cambio de posición del interruptor. Una vez producido éste, ya no se producen más cambios.

Se desea obtener los valores de V_G, R, L y C.

Para t > 0 se tiene

Ecuaciones del circuito y relaciones funcionales

$$i_L = C\frac{dv_C}{dt}$$

$$V_G = Ri_L + L\frac{di_L}{dt} + v_C$$

Ecuación diferencial

$$LC\frac{d^2v_C}{dt^2} + RC\frac{dv_C}{dt} + v_C = V_G$$

Ecuación característica

a = LC, b = RC, c = 1

La respuesta en régimen transitorio es supercrítica, ya que en las expresiones temporales figuran términos exponenciales con distintos valores de los coeficientes de los exponentes. En la respuesta supercrítica, esos coeficientes son las raíces de la ecuación característica; luego,

$s_1 = -1000\ s^{-1}$, $s_2 = -9000\ s^{-1}$

$$s_1 = -\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$$

$$s_2 = -\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$$

$\Rightarrow$

$$\alpha = -\frac{s_1 + s_2}{2} = 5000\ s^{-1}$$

$$\omega_0 = +\sqrt{\alpha^2 - \left(\frac{s_1 - s_2}{2}\right)^2} = 3000 \text{ rad/s}$$

(por el circuito) $V_G = v_C(\infty) = 10$ V (por la expresión temporal) $\Rightarrow V_G = 10$ V

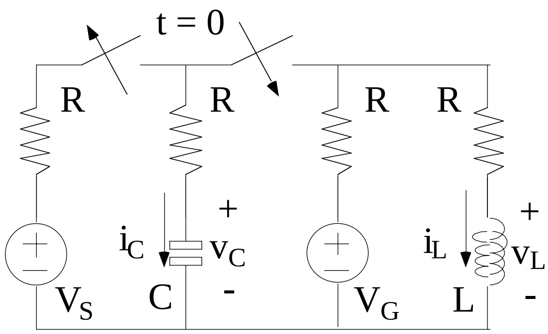
Por las expresiones temporales	Por el circuito	Por las expresiones temporales	
$0.001e^{-1000t} + 0.009e^{-9000t}$	$i_L = C\dfrac{dv_C}{dt}$	$C(5000e^{-1000t} + 45000e^{-9000t})$	$\Rightarrow C = 0.2\ \mu F$

$$3000 \text{ rad/s} = \omega_0 = \sqrt{\frac{c}{a}} = \frac{1}{\sqrt{LC}} \Rightarrow L = \frac{5}{9} \text{ H}$$

$$5000 \text{ s}^{-1} = \alpha = \frac{b}{2a} = \frac{R}{2L} \Rightarrow R = \frac{50}{9} \text{ k}\Omega$$

Ejercicios de repaso

Respuesta en transitorio / 1



V_S = 4 V, V_G = 4 V
R =1 Ω, L = 1 μH, C = 1 μF

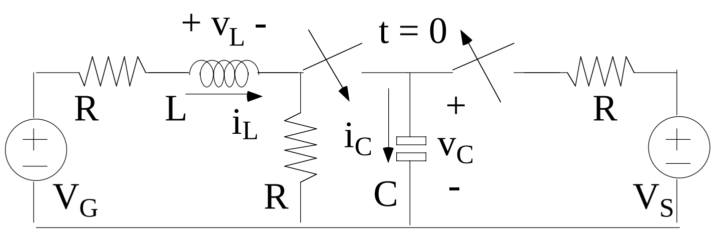
El circuito de la figura,
en el que las fuentes son continuas,
ha permanecido mucho tiempo
sin cambios antes del cambio
de posición de los interruptores.
Una vez producido éste,
ya no se producen más cambios.

Se desea obtener la expresión temporal
de la potencia en V_G para t > 0.

Solución

$p_G(t) = -8 + 4e^{-t}$ W (t en μs)

Respuesta en transitorio / 2



Se desea obtener la expresión temporal de la corriente en la capacidad para t > 0.

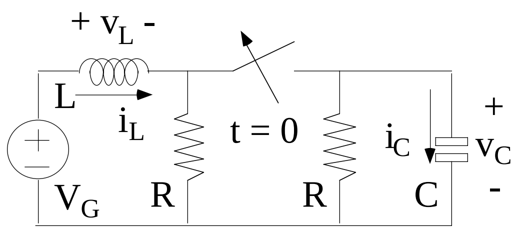
$V_S = 3$ V, $V_G = 4$ V
R =1 kΩ, L = 1 mH, C = 1 nF

El circuito de la figura, en el que las fuentes son continuas, ha permanecido mucho tiempo sin cambios antes del cambio de posición de los interruptores. Una vez producido éste, ya no se producen más cambios.

Solución

$i_C(t) = - e^{-t}[\cos(t) + \mathrm{sen}(t)]$ mA (t en µs)

Circuitos con elementos desacoplados



El circuito de la figura, en el que la fuente es continua, ha permanecido mucho tiempo sin cambios antes del cambio de posición del interruptor. Una vez producido éste, ya no se producen más cambios.

Son datos los valores de todos los elementos del circuito.

Se desea obtener las expresiones temporales de la corriente en la inductancia y la tensión en la capacidad para t > 0.

Para t > 0 se tiene

Ecuaciones del circuito, relaciones funcionales y ecuaciones diferenciales

$$V_G = L\frac{di_L}{dt} + Ri_L$$

$$0 = C\frac{dv_C}{dt} + \frac{v_C}{R}$$

Son ecuaciones diferenciales de primer orden, cada una en una variable; por tanto, se resuelven como se indicó anteriormente.

Expresiones temporales

$$i_L(t) = i_{Lf} + (i_{Lo} - i_{Lf})e^{-t/\tau_L}$$

$$i_{Lo} = i_L(0) = \frac{2V_G}{R},\ i_{Lf} = i_L(\infty) = \frac{V_G}{R},\ \tau_L = \frac{L}{R}$$

$$v_C(t) = v_{Cf} + (v_{Co} - v_{Cf})e^{-t/\tau_C}$$

$$v_{Co} = v_C(0) = V_G,\ v_{Cf} = v_C(\infty) = 0,\ \tau_C = RC$$

Observaciones

Para $t > 0$ los dos elementos reactivos y sus respectivas magnitudes eléctricas no se influyen entre sí; las variables son independientes y los elementos están *totalmente desacoplados*.

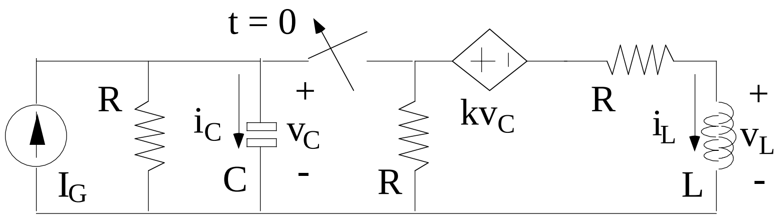
En circuitos con elementos totalmente desacoplados, a la variable fundamental de cada uno de ellos le corresponde una ecuación diferencial de primer orden.

Puede haber influencia de un elemento reactivo en otro sin que el segundo influya en el primero. Se habla entonces de elementos *parcialmente acoplados* (o *desacoplados*).

> A la variable correspondiente al elemento no influido (variable independiente) le corresponde una ecuación diferencial de primer orden.
>
> A la variable correspondiente al elemento influido (acoplado) le corresponde una ecuación diferencial de segundo orden.

En circuitos parcial o totalmente desacoplados no puede hablarse de respuesta única.

Ejemplo 1 de circuito con elementos desacoplados



I_G = 2 A, k = 1
R = 1 Ω, L = 1 H, C = 1 F

Se desea obtener las expresiones temporales de i_L y v_C para t > 0.

El circuito de la figura, en el que la fuente independiente es continua, ha permanecido mucho tiempo sin cambios antes del cambio de posición del interruptor. Una vez producido éste, ya no se producen más cambios.

Para t > 0 se tiene

Ecuaciones del circuito, y relaciones funcionales

$$I_G = \frac{v_C}{R} + C\frac{dv_C}{dt} \qquad (1)$$

$$0 = (R + R)i_L + kv_C + L\frac{di_L}{dt} \qquad (2)$$

(1) es una ecuación diferencial de primer orden en una sola variable; por tanto,

$$v_{Co} = v_C(0) = \frac{RI_G}{3 - k} = 1 \text{ V}, \; v_{Cf} = v_C(\infty) = RI_G = 2 \text{ V}, \; \tau_C = RC = 1 \text{ s}$$

$$v_C(t) = v_{Cf} + (v_{Co} - v_{Cf})e^{-t/\tau_C} = 2 - e^{-t} \text{ V (t en s)} \qquad (3)$$

Sustituyendo (3) en (2) se obtiene

$$\frac{di_L}{dt} + 2i_L + 2 = e^{-t}$$

La solución de esta ecuación diferencial (así como las de otras similares que surgen en circuitos con elementos parcialmente acoplados) no es sencilla porque el segundo miembro no es una constante. Por consiguiente, es preferible utilizar un procedimiento alternativo. Así, despejando v_C de (2) y sustituyendo el resultado en (1), se llega a

Ecuación diferencial de la variable acoplada

$$LC\frac{d^2i_L}{dt^2} + \left(2RC + \frac{L}{R}\right)\frac{di_L}{dt} + 2i_L = -kI_G$$

Ecuación característica $a = LC = 1\ s^2,\ b = 2RC + \frac{L}{R} = 3\ s,\ c = 2$

Tipo de respuesta $\alpha = \frac{b}{2a} = 1.5\ s^{-1},\ \omega_0 = \sqrt{\frac{c}{a}} = \sqrt{2}$ rad/s

$\alpha^2 > \omega_0^2 \Rightarrow$ respuesta supercrítica

Expresión temporal de i_L

$$i_L(t) = i_{Lf} + Ae^{s_1 t} + Be^{s_2 t} \quad (4)$$

$$s_1 = -\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} = -1\ s^{-1}$$

$$s_2 = -\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} = -2\ s^{-1}$$

Sustituyendo (4) en (2) se obtiene

Expresión temporal de v_C

$$v_C(t) = -\frac{2Ri_{Lf}}{k} - \frac{Ae^{s_1 t}}{k}(2R + Ls_1) - \frac{Be^{s_2 t}}{k}(2R + Ls_2) =$$

$$= -2i_{Lf} - Ae^{s_1 t} \quad (5)$$

Igualando término a término (3) y (5) $\Rightarrow$ $i_{Lf} = -1$ A, $A = 1$ A

(por el circuito) $0\ A = i_L(0) = i_{Lf} + A + B$ (por (4)) $\Rightarrow$ $B = 0$ A

Respuestas

$$v_C(t) = 2 - e^{-t}\ V\ (t \text{ en s})$$

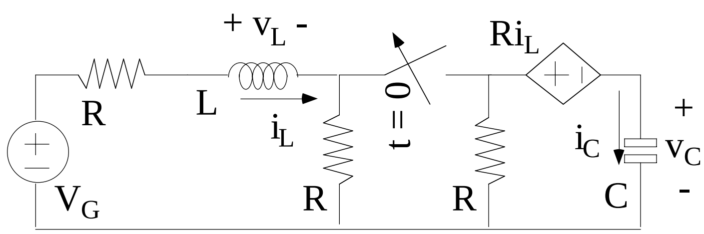
$$i_L(t) = -1 + e^{-t}\ A\ (t \text{ en s})$$

Tras la apertura del interruptor, la capacidad no está influida por la inductancia
(la primera está desacoplada con relación a la segunda),
pero la inductancia sigue influida por la capacidad
a través de la fuente dependiente (está acoplada).

La similitud de las expresiones temporales es puramente circunstancial
(se debe a que se anula el coeficiente de un término exponencial de la corriente).

El tratamiento general de elementos parcialmente acoplados
se basa en determinar la variable acoplada como si no se conociera
la expresión temporal de la variable independiente.

Ejemplo 2 de circuito con elementos desacoplados



$V_G = 2$ V

$R = 1\ \Omega$, $L = 4$ H, $C = 1$ F

Se desea obtener las expresiones temporales de i_L y v_C para $t > 0$.

El circuito de la figura, en el que la fuente independiente es continua, ha permanecido mucho tiempo sin cambios antes del cambio de posición del interruptor. Una vez producido éste, ya no se producen más cambios.

Para $t > 0$ se tiene

Ecuaciones del circuito, y relaciones funcionales

$$V_G = (R + R)i_L + L\frac{di_L}{dt} \qquad (1)$$

$$0 = RC\frac{dv_C}{dt} + Ri_L + v_C \qquad (2)$$

Expresión temporal de i_L

$$i_{Lo} = i_L(0) = \frac{2V_G}{3R} = \frac{4}{3}\ \text{A},\ i_{Lf} = i_L(\infty) = \frac{V_G}{2R} = 1\ \text{A},\ \tau_L = \frac{L}{2R} = 2\ \text{s}$$

$$i_L(t) = i_{Lf} + (i_{Lo} - i_{Lf})e^{-t/\tau_L} = 1 + \frac{e^{-0.5t}}{3}\ \text{A (t en s)} \qquad (3)$$

Despejando i_L de (2) y sustituyendo en (1) se tiene

Ecuación diferencial de la variable acoplada

$$LC\frac{d^2v_C}{dt^2} + \left(2RC + \frac{L}{R}\right)\frac{dv_C}{dt} + 2v_C = -V_G$$

Ecuación característica

$$a = LC = 4\ \text{s}^2,\ b = 2RC + \frac{L}{R} = 6\ \text{s},\ c = 2$$

Tipo de respuesta

$$\alpha = \frac{b}{2a} = \frac{3}{4}\ \text{s}^{-1},\ \omega_0 = \sqrt{\frac{c}{a}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\ \text{rad/s}$$

$$\alpha^2 > \omega_0^2 \Rightarrow \text{respuesta supercrítica}$$

Expresión temporal de v_C

$$v_C(t) = v_{Cf} + Ae^{s_1 t} + Be^{s_2 t} \quad (4)$$

$$s_1 = -\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} = -0.5 \text{ s}^{-1}$$

$$s_2 = -\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} = -1 \text{ s}^{-1}$$

Sustituyendo (4) en (2) se obtiene

Expresión temporal de i_L

$$i_L(t) = -\frac{v_{Cf}}{R} - \frac{Ae^{s_1 t}}{R}(1 + RCs_1) - \frac{Be^{s_2 t}}{R}(1 + RCs_2) =$$

$$= -v_{Cf} - 0.5Ae^{s_1 t} \quad (5)$$

Igualando término a término (3) y (5) $\Rightarrow$ $v_{Cf} = -1$ V, $A = -\frac{2}{3}$ V

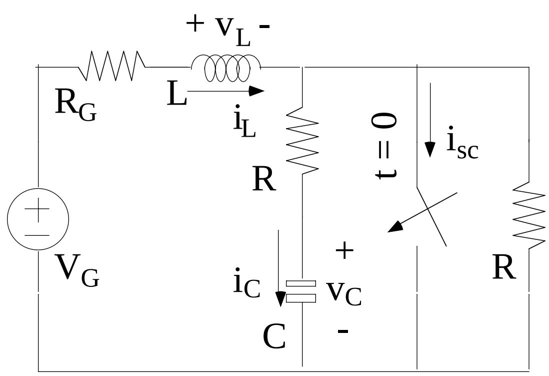
(por el circuito) $-\frac{2}{3}$ V $= v_C(0) = v_{Cf} + A + B$ (por (4)) $\Rightarrow$ $B = 1$ V

Respuestas

$$i_L(t) = 1 + \frac{e^{-0.5t}}{3} \text{ A (t en s)}$$

$$v_C(t) = -1 - \frac{2e^{-0.5t}}{3} + e^{-t} \text{ V (t en s)}$$

Ejemplo 3 de circuito con elementos desacoplados



$V_G = 2$ V, $R_G = 2\ \Omega$
$R = 1\ \Omega$, $L = 1$ H, $C = 0.5$ F

El circuito de la figura,
en el que la fuente es continua,
ha permanecido mucho tiempo
sin cambios antes del cambio de
posición del interruptor.
Una vez producido éste,
ya no se producen más cambios.

Se desea obtener la expresión temporal
de la corriente i_{sc} para $t > 0$.

Para $t > 0$ se tiene

Ecuaciones del circuito,
relaciones funcionales
y ecuaciones diferenciales

$$0 = RC\frac{dv_C}{dt} + v_C$$

$$V_G = R_G i_L + L\frac{di_L}{dt} + RC\frac{dv_C}{dt} + v_C = R_G i_L + L\frac{di_L}{dt}$$

Expresiones
temporales

$$i_L(t) = i_{Lf} + (i_{Lo} - i_{Lf})e^{-t/\tau_L}$$

$$i_{Lo} = i_L(0) = \frac{V_G}{R_G + R} = \frac{2}{3}\ \text{A},\ i_{Lf} = i_L(\infty) = \frac{V_G}{R_G} = 1\ \text{A},\ \tau_L = \frac{L}{R_G} = 0.5\ \text{s}$$

$$v_C(t) = v_{Cf} + (v_{Co} - v_{Cf})e^{-t/\tau_C}$$

$$v_{Co} = v_C(0) = \frac{R}{R_G + R}V_G = \frac{2}{3}\ \text{V},\ v_{Cf} = v_C(\infty) = 0\ \text{V},\ \tau_C = RC = 0.5\ \text{s}$$

$$i_L(t) = C\frac{dv_C(t)}{dt} + i_{sc}(t) + \frac{RC\frac{dv_C(t)}{dt} + v_C(t)}{R} \Rightarrow i_{sc}(t) = 1 + \frac{e^{-2t}}{3}\ \text{A (t en s)}$$

El cortocircuito, al imponer una tensión fija (nula),
separa los dos elementos reactivos.

Circuitos con cambios sucesivos

Los interruptores del circuito
cambian de posición
en instantes diferentes

Cálculo de la respuesta

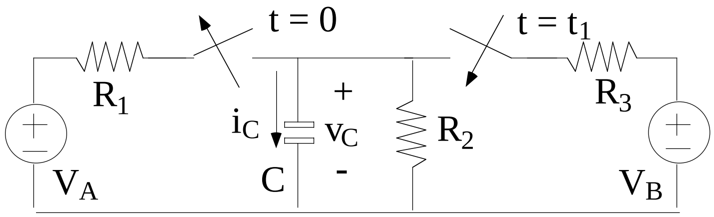
En cada intervalo
se aplica
el procedimiento
convencional

Las condiciones iniciales en cada intervalo
son las finales del intervalo anterior

Las condiciones finales en cada intervalo
son las correspondientes a $t = \infty$
(el circuito *no sabe*
que se producirán cambios posteriores)

En los términos exponenciales
el tiempo se desplaza al origen
de cada intervalo

Ejemplo 1 de circuito con cambios sucesivos



$V_A = 4$ V, $V_B = 3$ V, $C = 1$ F
$R_1 = 2\ \Omega$, $R_2 = 2\ \Omega$, $R_3 = 2\ \Omega$
$t_1 = 1$ s

El circuito de la figura, en el que las fuentes son continuas, ha permanecido mucho tiempo sin cambios antes de $t = 0$. Después de $t = t_1$ ya no experimenta más cambios.

Se desea conocer la variación de la corriente y la tensión en la capacidad para $0 < t < \infty$.

Para $0 < t \leq t_1$ se tiene

Ecuación del circuito y ecuación diferencial

$$R_2 C\frac{dv_C}{dt} + v_C = 0$$

$$v_{Co} = v_C(0) = \frac{R_2}{R_1 + R_2}V_A = 2\text{ V},\ v_{Cf} = v_C(\infty) = 0\text{ V},\ \tau = R_2C = 2\text{ s}$$

Expresiones temporales

$$v_C(t) = v_{Cf} + (v_{Co} - v_{Cf})e^{-t/\tau} = 2e^{-0.5t}\text{ V (t en s)} \qquad (1)$$

$$i_C(t) = C\frac{dv_C(t)}{dt} = -\,e^{-0.5t}\text{ A (t en s)} \qquad (2)$$

Para $t_1 \leq t < \infty$ se tiene

Ecuación del circuito y ecuación diferencial

$$\frac{V_B - v_C}{R_3} = C\frac{dv_C}{dt} + \frac{v_C}{R_2} \Rightarrow \frac{CR_2R_3}{(R_2 + R_3)}\frac{dv_C}{dt} + v_C = \frac{R_2}{R_2 + R_3}V_B$$

A partir de (1)

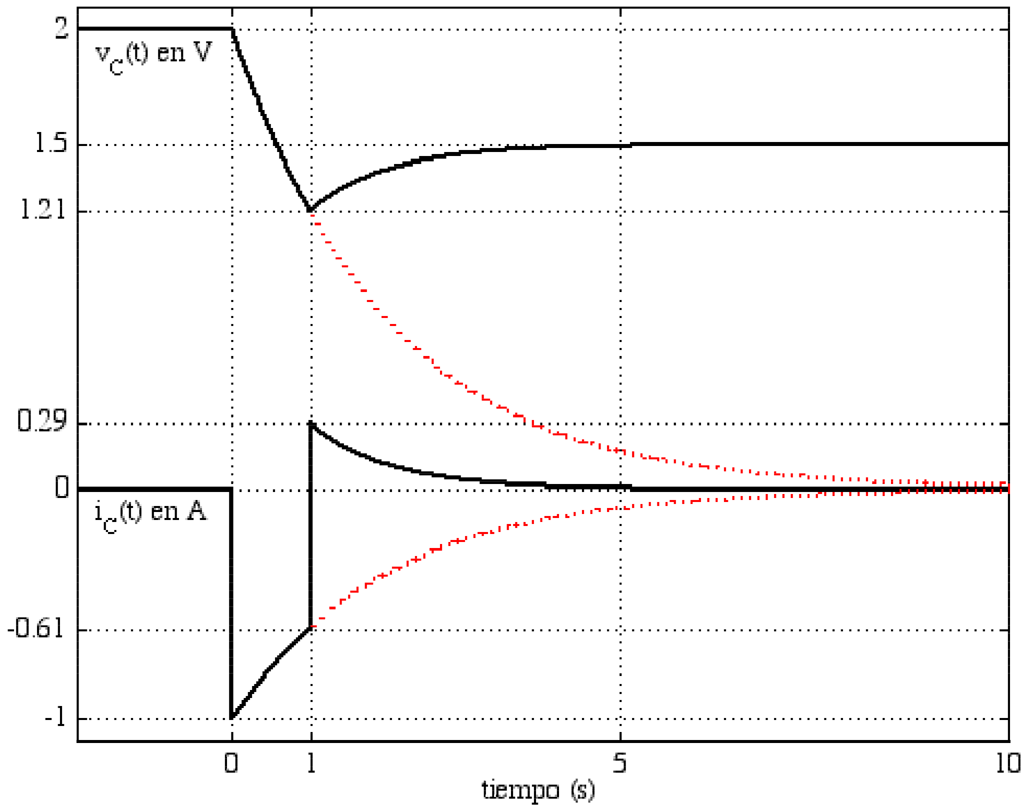
$$v_{Co} = v_C(t_1) = v_C(t_1^-) = 2e^{-0.5t_1} = 1.21\text{ V}$$

$$v_{Cf} = v_C(\infty) = \frac{R_2}{R_2 + R_3}V_B = 1.5\text{ V},\ \tau = \frac{CR_2R_3}{R_2 + R_3} = 1\text{ s}$$

Expresiones temporales

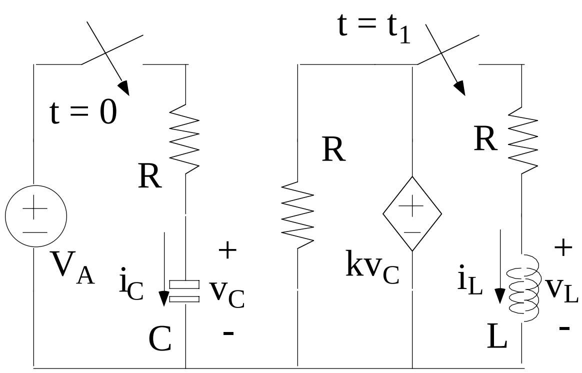
$$v_C(t) = v_{Cf} + (v_{Co} - v_{Cf})e^{-(t - t_1)/\tau} = 1.5 - 0.29e^{-(t - 1)}\text{ V (t en s)} \qquad (3)$$

$$i_C(t) = C\frac{dv_C(t)}{dt} = 0.29e^{-(t - 1)}\text{ A (t en s)} \qquad (4)$$



El procedimiento indicado en este ejemplo es aplicable a cualquier otra situación:
mayor número de cambios de posición de los interruptores,
circuitos con dos o más elementos acoplados,
o circuitos con elementos parcial o totalmente desacoplados.

Ejemplo 2 de circuito con cambios sucesivos



El circuito de la figura, en el que la fuente independiente es continua, ha permanecido mucho tiempo sin cambios antes de t = 0.
Después de $t = t_1$ ya no experimenta más cambios.

Se desea obtener
$i_C(0^+)$, $v_C(100\text{ ms})$ e $i_L(1.1\text{ s})$.

$V_A = 200\text{ mV}$, $k = 2$
$R = 0.5\text{ k}\Omega$, $L = 0.5\text{ H}$, $C = 2\ \mu\text{F}$
$t_1 = 1\text{ s}$

Para $0 < t \leq t_1$ se tiene

$$i_C(0^+) = \frac{V_A - v_C(0^+)}{R} = \frac{V_A - v_C(0^-)}{R} = \frac{V_A}{R} = 0.4\text{ mA}$$

$$RC\frac{dv_C}{dt} + v_C = V_A$$

En principio habría que resolver esta ecuación diferencial, obtener la expresión temporal correspondiente, y sustituir en ésta el valor t = 0.1 s.

Sin embargo, puede observarse que la constante de tiempo es

$$\tau = RC = 1\text{ ms} << 0.1\text{ s}$$

Es decir, la parte del circuito que incluye la capacidad está en régimen permanente en el instante de interés. En consecuencia,

$$v_C(0.1\text{ s}) = v_{Cf} = v_C(\infty) = V_A = 0.2\text{ V}$$

Para $t_1 \leq t < \infty$ se tiene

$$L\frac{di_L}{dt} + Ri_L = kv_C$$

Esta ecuación indica que la inductancia es un elemento acoplado.
Puede ser resuelta por el procedimiento convencional.
Pero es más sencillo aplicar un procedimiento alternativo.

La parte del circuito que contiene la capacidad continúa en régimen permanente
en este intervalo temporal, ya que no ha experimentado más cambios,
ni los cambios producidos en otra parte del circuito repercuten en ella.
En consecuencia, la ecuación anterior puede ser sustituida por

$$L\frac{di_L}{dt} + Ri_L = kV_A$$

Ahora habría que resolver esta ecuación diferencial,
obtener la expresión temporal correspondiente,
y sustituir en ésta el valor t = 0.1 s = (1.1 s - t_1).
Recuérdese que los exponentes correspondientes
a intervalos que no empiezan en 0
están desplazados con relación a sus respectivos orígenes.

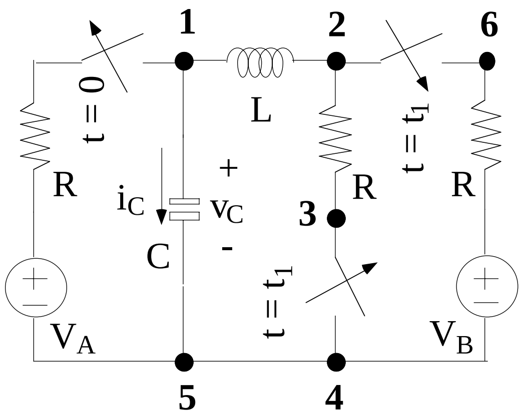
Pero, nuevamente, puede observarse que la constante de tiempo es

$$\tau = \frac{L}{R} = 1 \text{ ms} << 0.1 \text{ s}$$

Es decir, la parte del circuito que incluye la inductancia
también está en régimen permanente en el instante de interés. En consecuencia,

$$i_L(0.1 \text{ s}) = i_{Lf} = i_L(\infty) = \frac{kV_A}{R} = 0.8 \text{ mA}$$

Ejemplo 3 de circuito con cambios sucesivos



El circuito de la figura,
en el que las fuentes son continuas,
ha permanecido mucho tiempo
sin cambios antes de $t = 0$.
Después de $t = t_1$ ya no experimenta
más cambios.

Se desea obtener $v_C(t_1)$,
y determinar el tipo de respuesta
en la malla 126451 para $t > t_1$.

$t_1 = 100$ s

Para $0 < t \leq t_1$ y en la malla 123451

$\alpha = 10\,s^{-1}$, $\omega_0 = 8$ rad/s

Para $0 < t \leq t_1$ y en la malla 123451

$\alpha^2 > \omega_0^2 \Rightarrow$ respuesta supercrítica

$$s_{1,\,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} \Rightarrow s_1 = -4\,s^{-1},\ s_2 = -16\,s^{-1}$$

$$v_C(t) = v_{Cf} + Ae^{s_1 t} + Be^{s_2 t}$$

$$v_{Cf} = v_C(\infty) = 0\ \text{V}$$

$$Ae^{s_1 t_1} = Ae^{-400} \approx 0\ \text{V}$$

$$Be^{s_2 t_1} = Be^{-1600} \approx 0\ \text{V}$$

$$\Rightarrow v_C(t_1) \approx 0\ \text{V}$$

Para $t > t_1$ la malla 126451 es de la misma forma que la 123451
(los elementos pasivos tienen los mismos valores
y están dispuestos de la misma forma;
las fuentes independientes no influyen en la respuesta).
Luego la respuesta buscada también es supercrítica.