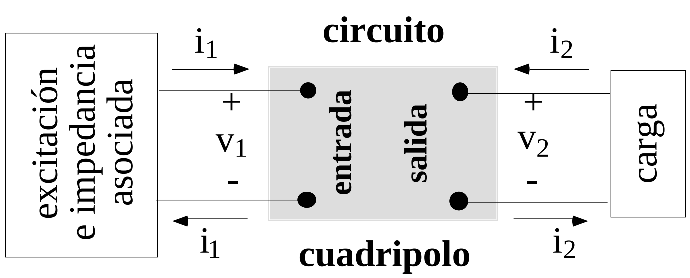
Tema IV: Cuadripolos

Conceptos básicos 182
Clasificación general de cuadripolos 182
Parámetros característicos 183
Reciprocidad y simetría 183
Obtención de los parámetros característicos 184
Inserción de un cuadripolo en un circuito 184
Interconexión de cuadripolos 185
Ejemplo 1 de cuadripolos 186
Ejemplo 2 de cuadripolos 187
Ejemplo 3 de cuadripolos 189
Ejemplo 4 de cuadripolos 190
Ejemplo 5 de cuadripolos 191
Ejemplo 6 de cuadripolos 193

Conceptos básicos

Definición	Condiciones de estudio
El circuito es tratado como una caja negra con dos puertas (cuatro terminales) de conexión al exterior. El comportamiento eléctrico del circuito es descrito en función de las tensiones y corrientes en las puertas, que se relacionan entre sí mediante un juego de parámetros característicos.	El cuadripolo no contiene fuentes independientes. En ausencia de excitación externa no hay energía almacenada en el cuadripolo. Regímenes permanentes continuo o sinusoidal.



Esquema general

Clasificación general de cuadripolos

Pasivos	Activos
La potencia entregada a la carga nunca puede ser mayor que la que la excitación entrega a la entrada	La potencia entregada a la carga puede ser mayor que la que la excitación entrega a la entrada

Parámetros característicos

Un juego de parámetros característicos de un cuadripolo consta de cuatro parámetros que relacionan las corrientes y las tensiones en sus puertas.

Se considerarán los indicados en la tabla siguiente.

Denominación	Ecuaciones	Notación matricial
Impedancia	$V_1 = I_1 z_{11} + I_2 z_{12}$ $V_2 = I_1 z_{21} + I_2 z_{22}$	$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}$
Admitancia	$I_1 = V_1 y_{11} + V_2 y_{12}$ $I_2 = V_1 y_{21} + V_2 y_{22}$	$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}$
Híbridos (h)	$V_1 = I_1 h_{11} + V_2 h_{12}$ $I_2 = I_1 h_{21} + V_2 h_{22}$	$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} I_1 \\ V_2 \end{bmatrix}$
Híbridos (g)	$I_1 = V_1 g_{11} + I_2 g_{12}$ $V_2 = V_1 g_{21} + I_2 g_{22}$	$\begin{bmatrix} I_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} V_1 \\ I_2 \end{bmatrix}$
Transmisión (abcd)	$V_1 = V_2 a - I_2 b$ $I_1 = V_2 c - I_2 d$	$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} V_2 \\ -I_2 \end{bmatrix}$

En régimen sinusoidal permanente los símbolos de corrientes y tensiones representan fasores.

En régimen permanente continuo los parámetros de impedancia y admitancia se denominan de resistencia y conductancia, respectivamente.

Reciprocidad y simetría

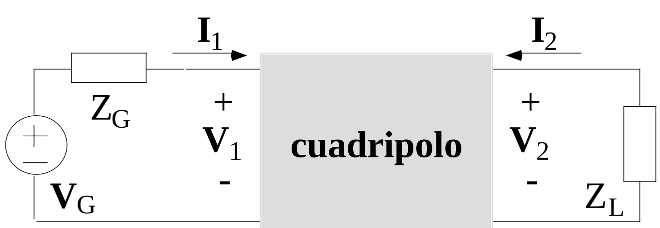
Cuadripolos recíprocos	Cuadripolos simétricos
Verifican las relaciones	Son recíprocos y verifican las relaciones
$z_{12} = z_{21}$, $y_{12} = y_{21}$ $h_{12} = -h_{21}$, $g_{12} = -g_{21}$, $ad - bc = 1$	$z_{11} = z_{22}$, $y_{11} = y_{22}$ $h_{11}h_{22} - h_{12}h_{21} = 1$, $g_{11}g_{22} - g_{12}g_{21} = 1$, $a = d$

Obtención de los parámetros característicos

Caso general	Aplicando las definiciones de los parámetros a partir de medidas o del conocimiento del interior del cuadripolo
Caso particular	Si se conoce el interior del cuadripolo, se puede caracterizar su comportamiento mediante un sistema de dos ecuaciones, que se compara con el correspondiente a la definición de los parámetros
Equivalencia entre parámetros	Si se conoce un juego de parámetros, a partir de él puede deducirse cualquier otro

Inserción de un cuadripolo en un circuito

El comportamiento de un cuadripolo en un circuito
queda completamente caracterizado por un sistema de cuatro ecuaciones,
a partir del cual es posible obtener cualquier función que se desee.



Ejemplo

Circuito en régimen sinusoidal permanente.

Excitación representada por una fuente de tensión independiente en serie con una impedancia.

$$\mathbf{V}_G = \mathbf{I}_1 Z_G + \mathbf{V}_1$$

$$\mathbf{V}_2 = -\,\mathbf{I}_2 Z_L$$

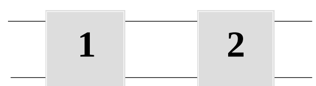
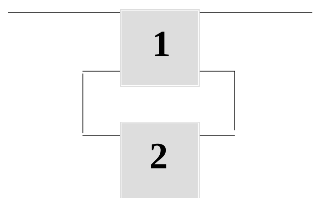
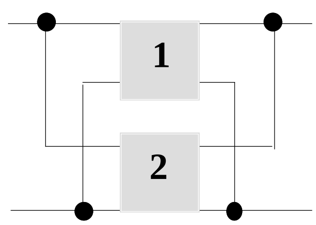
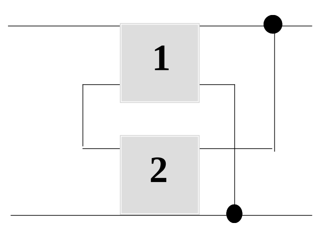
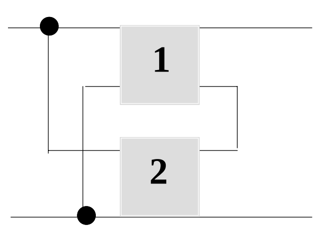
dos ecuaciones de parámetros

$\Rightarrow$

Impedancia de entrada
Ganancia de corriente
Ganancia de potencia
Equivalente Thèvenin
Impedancia de carga para máxima potencia
Otros

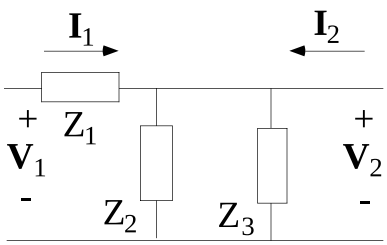
Interconexión de cuadripolos

El cuadripolo resultante de la interconexión de dos cuadripolos está caracterizado por unos parámetros que se calculan como se indica seguidamente.

Conexión	Esquema	Resultado
Cascada		[abcd] = $[abcd]_1 \times [abcd]_2$
Serie		[z] = $[z]_1 + [z]_2$
Paralelo		[y] = $[y]_1 + [y]_2$
Serie-paralelo		[h] = $[h]_1 + [h]_2$
Paralelo-serie		[g] = $[g]_1 + [g]_2$

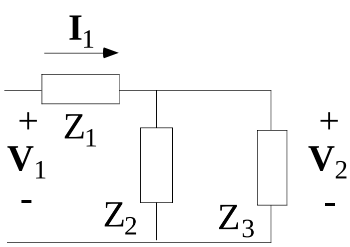
Se supondrá que las reglas de conexión son válidas siempre,
aunque estrictamente hablando sólo lo son siempre
para la agrupación en cascada.

Ejemplo 1 de cuadripolos



El circuito de la figura funciona en régimen sinusoidal permanente a una frecuencia dada. Son datos las características de todos los elementos.

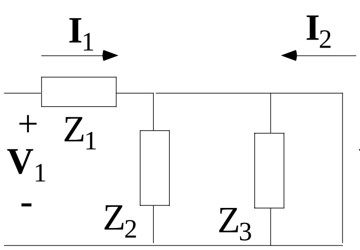
Se desea obtener los valores de z_{11}, h_{21}, e y_{22}.



$$z_{11} = \left(\frac{\mathbf{V}_1}{\mathbf{I}_1}\right)_{\mathbf{I}_2 = 0\ \mathrm{A}}$$

Imponiendo esta condición se tiene la situación mostrada en la figura, a partir de la que se deduce

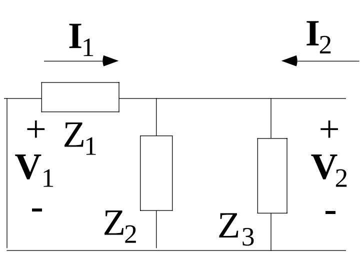
$$z_{11} = \left(\frac{\mathbf{V}_1}{\mathbf{I}_1}\right)_{\mathbf{I}_2 = 0\ \mathrm{A}} = Z_1 + Z_2//Z_3$$



$$h_{21} = \left(\frac{\mathbf{I}_2}{\mathbf{I}_1}\right)_{\mathbf{V}_2 = 0\ \mathrm{V}}$$

Imponiendo esta condición se tiene la situación mostrada en la figura, a partir de la que se deduce (no puede haber corriente en Z_2 y Z_3 porque $\mathbf{V}_2$ no sería nula)

$$h_{21} = \left(\frac{\mathbf{I}_2}{\mathbf{I}_1}\right)_{\mathbf{V}_2 = 0\ \mathrm{V}} = -1$$

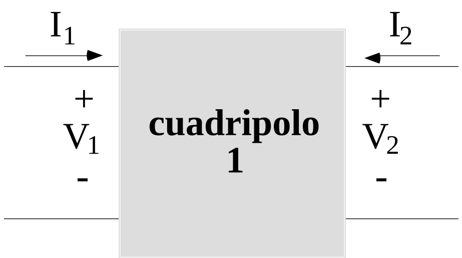


$$y_{22} = \left(\frac{\mathbf{I}_2}{\mathbf{V}_2}\right)_{\mathbf{V}_1 = 0\ \mathrm{V}}$$

Imponiendo esta condición en el cuadripolo se tiene

$$y_{22} = \left(\frac{\mathbf{I}_2}{\mathbf{V}_2}\right)_{\mathbf{V}_1 = 0\ \mathrm{V}} = \frac{1}{Z_1//Z_2//Z_3}$$

Ejemplo 2 de cuadripolos



El cuadripolo de la figura funciona en régimen permanente continuo, siendo simétrico en tales condiciones. Se efectúa una medida en él, que arroja los siguientes resultados:

$$V_1 = 8\text{ V},\ V_2 = 2\text{ V},\ I_1 = 6\text{ A},\ I_2 = 0\text{ A}$$

Se desea obtener los parámetros abcd del cuadripolo 1 en continua

Los parámetros de transmisión están definidos por las relaciones

$$V_1 = V_2 a - I_2 b,\ I_1 = V_2 c - I_2 d \qquad (1)$$

A partir de ellas pueden obtenerse los parámetros aplicando sus definiciones.
Es decir,

$$a = \left(\frac{V_1}{V_2}\right)_{I_2 = 0\text{ A}},\ b = \left(-\frac{V_1}{I_2}\right)_{V_2 = 0\text{ V}},\ c = \left(\frac{I_1}{V_2}\right)_{I_2 = 0\text{ A}},\ d = \left(-\frac{I_1}{I_2}\right)_{V_2 = 0\text{ V}}$$

Puede observarse que las condiciones de la medida mencionada en el enunciado corresponden precisamente con las necesarias para obtener a y c. Así,

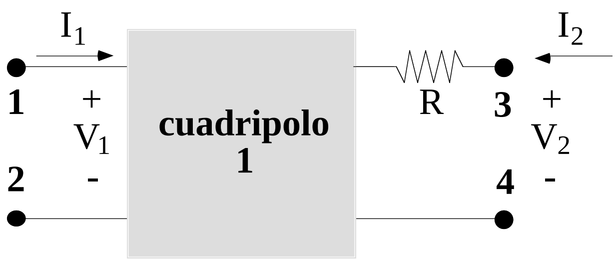
$$a = \left(\frac{V_1}{V_2}\right)_{I_2 = 0\text{ A}} = 4,\ c = \left(\frac{I_1}{V_2}\right)_{I_2 = 0\text{ A}} = 3\text{ S}$$

Además,

recíproco (porque es simétrico)	$\Rightarrow$	$a = d \Rightarrow d = 4$
simétrico		$ad - bc = 1 \Rightarrow b = 5\Omega$

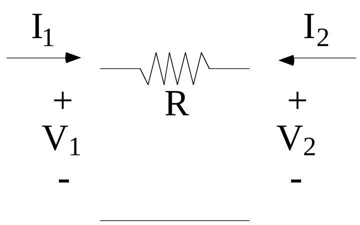
En resumen,

$$[abcd]_1 = \begin{bmatrix} 4 & 5\ \Omega \\ 3\text{ S} & 4 \end{bmatrix}$$



Se dispone el montaje de la figura (R = 1 Ω).

Se desea obtener los parámetros abcd del cuadripolo 1234 en continua.



Se trata de la interconexión en cascada del cuadripolo 1 y el cuadripolo R, siendo el segundo el representado en la figura adjunta.

A partir de ella pueden formularse las ecuaciones

$$V_1 = V_2 - I_2 R,\ I_1 = - I_2 \qquad (2)$$

Comparando (1-2) se deduce

$$a = 1,\ b = R = 1\ \Omega,\ c = 0\ \text{S},\ d = 1$$

De acuerdo con las reglas de la agrupación en cascada,

$$[abcd]_{1234} = [abcd]_1 \times [abcd]_R = \begin{bmatrix} 4 & 5\ \Omega \\ 3\ \text{S} & 4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 1\ \Omega \\ 0\ \text{S} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 9\ \Omega \\ 3\ \text{S} & 7 \end{bmatrix}$$

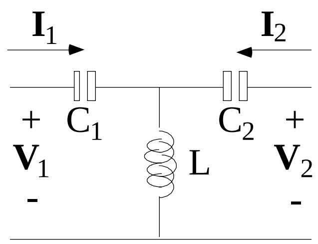
Puede observarse que el cuadripolo 1234 es recíproco

$$ad - bc = 1$$

pero no simétrico

$$a \neq d$$

Ejemplo 3 de cuadripolos



El cuadripolo de la figura funciona en régimen sinusoidal permanente a una frecuencia dada.
Son datos las características de todos los elementos.

¿Qué condiciones ha de cumplir para que sea simétrico a la frecuencia considerada?

Se desea obtener los parámetros abcd a dicha frecuencia.

Para determinar las condiciones de simetría puede considerarse cualquier juego de parámetros (si se cumplen las condiciones para uno de ellos, se cumplen para los restantes). Por las características del circuito, se eligen los parámetros z.

Ecuaciones del circuito	**Definición de parámetros z**	**Comparando**
$\mathbf{V}_1 = \mathbf{I}_1\left(\frac{1}{j\omega C_1} + j\omega L\right) + \mathbf{I}_2 j\omega L$	$\mathbf{V}_1 = \mathbf{I}_1 z_{11} + \mathbf{I}_2 z_{12}$	$z_{11} = \frac{1}{j\omega C_1} + j\omega L$ $z_{12} = j\omega L$
$\mathbf{V}_2 = \mathbf{I}_2\left(\frac{1}{j\omega C_2} + j\omega L\right) + \mathbf{I}_1 j\omega L$	$\mathbf{V}_2 = \mathbf{I}_1 z_{21} + \mathbf{I}_2 z_{22}$	$z_{21} = j\omega L$ $z_{22} = \frac{1}{j\omega C_2} + j\omega L$
Reciprocidad	$z_{12} = z_{21}$	Se cumple siempre
Simetría	Reciprocidad y $z_{11} = z_{22}$	Sólo se cumple si $C_1 = C_2$

Los parámetros de transmisión pueden ser obtenidos por distintos procedimientos. Ya que se conocen los de impedancia, aquéllos pueden ser determinados a partir de éstos.

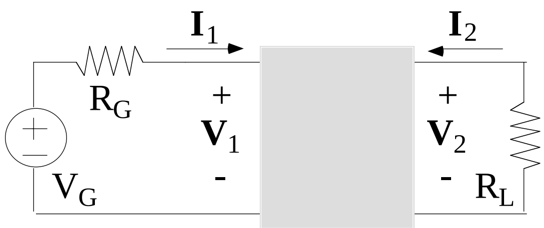
$$\left.\begin{aligned}\mathbf{V}_1 &= \mathbf{I}_1 z_{11} + \mathbf{I}_2 z_{12}\\ \mathbf{V}_2 &= \mathbf{I}_1 z_{21} + \mathbf{I}_2 z_{22}\end{aligned}\right| \Rightarrow \left|\begin{aligned}\mathbf{I}_1 &= \frac{\mathbf{V}_2}{z_{21}} - \mathbf{I}_2\frac{z_{22}}{z_{21}}\\ \mathbf{V}_1 &= \mathbf{V}_2\frac{z_{11}}{z_{21}} - \mathbf{I}_2\frac{z_{11}z_{22} - z_{12}z_{21}}{z_{21}}\end{aligned}\right.$$

Comparando las últimas expresiones con la definición de los parámetros abcd

$$a = \frac{z_{11}}{z_{21}},\ b = \frac{z_{11}z_{22} - z_{12}z_{21}}{z_{21}}$$

$$c = \frac{1}{z_{21}},\ d = \frac{z_{22}}{z_{21}}$$

Ejemplo 4 de cuadripolos



Se desea obtener los parámetros z (son todos positivos) y la potencia en el cuadripolo cuando está insertado en el circuito.

El cuadripolo de la figura es recíproco y funciona en continua. Sobre él se efectúan tres medidas, que arrojan los siguientes resultados:

1: $V_1 = 100$ V, $I_1 = 20$ A, $I_2 = 0$ A
2: $V_1 = 0$ V, $I_1 = 8$ A, $V_2 = 2$ V
3: $I_1 = 0$ A, $V_2 = 3$ V, $I_2 = 1$ A

$V_G = 8$ V, $R_G = 11\ \Omega$, $R_L = 2\ \Omega$

Definición de parámetros z

$$V_1 = I_1 z_{11} + I_2 z_{12} \quad (1)$$
$$V_2 = I_1 z_{21} + I_2 z_{22} \quad (2)$$

Condición de reciprocidad en (1-2) ($z_{12} = z_{21}$)

$$V_1 = I_1\left(z_{11} - \frac{z_{12}^2}{z_{22}}\right) + V_2\frac{z_{12}}{z_{22}} \quad (3)$$

Condiciones de **medida 1** en (1) $\Rightarrow$ $z_{11} = 5\ \Omega$

Condiciones de **medida 3** en (2) $\Rightarrow$ $z_{22} = 3\ \Omega$

Condiciones de **medida 2** en (3) $\Rightarrow$ $z_{12} = z_{21} = 4\ \Omega$; $z_{12} = z_{21} = -3.75\ \Omega$ (no vale)

Cuadripolo insertado en el circuito

$$\left.\begin{array}{l} V_1 = I_1 z_{11} + I_2 z_{12} \\ V_2 = I_1 z_{21} + I_2 z_{22} \\ V_G = I_1 R + V_1 \\ V_2 = -I_2 R_L \end{array}\right| \Rightarrow \left|\begin{array}{l} I_1 = 0.625 \text{ A} \\ I_2 = -0.5 \text{ A} \end{array}\right.$$

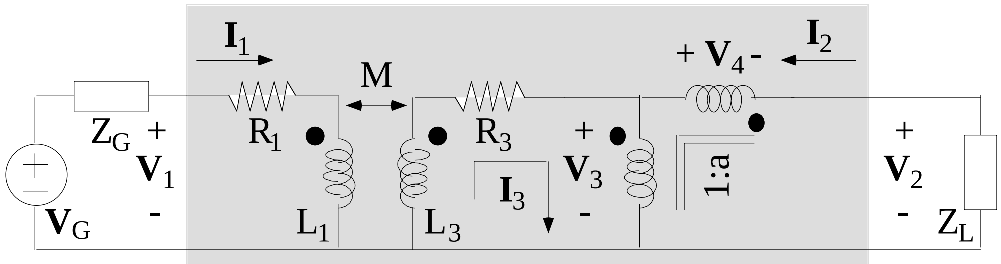
Potencias en distintos elementos del circuito:

$$P(V_G) = -V_G I_1 = -5 \text{ W},\ P(R_G) = I_1^2 R_G = 4.3 \text{ W},\ P(R_L) = I_2^2 R_L = 0.5 \text{ W}$$

El balance de potencias en todo el circuito ha de ser nulo.

$$P(V_G) + P(R_G) + P_{cuad} + P(R_L) = 0 \text{ W} \Rightarrow P_{cuad} = 0.2 \text{ W}$$

Ejemplo 5 de cuadripolos



El cuadripolo de la figura funciona en régimen sinusoidal permanente a una frecuencia dada y son datos las características de todos los elementos.

Se desea obtener los parámetros z del cuadripolo a la frecuencia considerada y la potencia compleja en Z_L cuando el cuadripolo está insertado en el circuito.

En el cuadripolo se verifican las ecuaciones

$$\mathbf{V}_1 = \mathbf{I}_1(R_1 + j\omega L_1) - \mathbf{I}_3 j\omega M$$

$$0 = -\mathbf{I}_1 j\omega M + \mathbf{I}_3(j\omega L_3 + R_3) + \mathbf{V}_3$$

$$\mathbf{V}_3 = \mathbf{V}_4 + \mathbf{V}_2$$

$$\frac{\mathbf{V}_4}{\mathbf{V}_3} = -a, \quad \frac{\mathbf{I}_3 + \mathbf{I}_2}{\mathbf{I}_2} = -a$$

La caracterización de un cuadripolo se hace en función exclusivamente de las corrientes y las tensiones en sus puertas. En consecuencia, es necesario eliminar del sistema anterior $\mathbf{I}_3$, $\mathbf{V}_3$ y $\mathbf{V}_4$.

Manipulando el sistema anterior se llega a las ecuaciones

$$\mathbf{V}_1 = \mathbf{I}_1(R_1 + j\omega L_1) + \mathbf{I}_2 j\omega M(1 + a)$$

$$\mathbf{V}_2 = \mathbf{I}_1 j\omega M(1 + a) + \mathbf{I}_2(R_3 + j\omega L_3)(1 + a)^2$$

Comparando estas ecuaciones con las correspondientes a la definición de los parámetros de impedancia se obtiene

$$z_{11} = R_1 + j\omega L_1, \; z_{12} = j\omega M(1 + a)$$

$$z_{21} = j\omega M(1 + a), \; z_{22} = (R_3 + j\omega L_3)(1 + a)^2$$

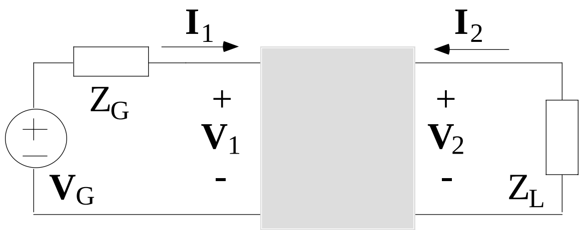
Con el cuadripolo insertado en el circuito se tiene

$$\left.\begin{array}{c} \mathbf{V}_1 = \mathbf{I}_1 z_{11} + \mathbf{I}_2 z_{12} \\ \mathbf{V}_2 = \mathbf{I}_1 z_{21} + \mathbf{I}_2 z_{22} \\ \mathbf{V}_G = \mathbf{I}_1 Z_G + \mathbf{V}_1 \\ \mathbf{V}_2 = - \mathbf{I}_2 Z_L \end{array}\right| \quad \Rightarrow \quad \mathbf{I}_2 = - \frac{z_{21}}{(Z_G + z_{11})(Z_L + z_{22}) - z_{12} z_{21}} \mathbf{V}_G$$

Obsérvese que la corriente pedida se obtiene en función de los parámetros del cuadripolo y de los elementos externos.

$$S_L = - \frac{\mathbf{V}_2 \mathbf{I}_2^*}{2} = - \frac{|\mathbf{I}_2|^2 Z_L}{2}$$

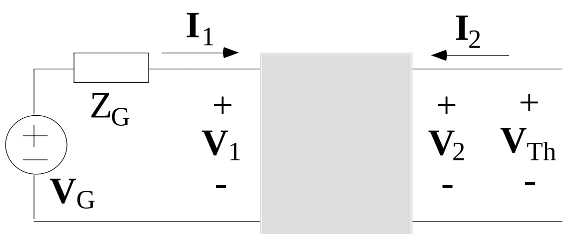
Ejemplo 6 de cuadripolos



El circuito de la figura funciona en régimen sinusoidal permanente a una frecuencia dada, para la cual se conocen los parámetros h del cuadripolo.

Se desea obtener el equivalente Thèvenin en la puerta de salida del cuadripolo en las condiciones indicadas.

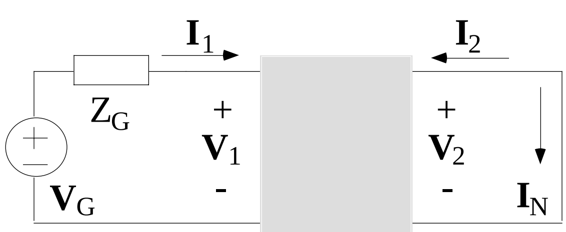
Cálculo de la tensión de circuito abierto



$$\mathbf{V}_1 = \mathbf{I}_1 h_{11} + \mathbf{V}_2 h_{12}$$
$$\mathbf{I}_2 = \mathbf{I}_1 h_{21} + \mathbf{V}_2 h_{22}$$
$$\mathbf{V}_G = \mathbf{I}_1 Z_G + \mathbf{V}_1$$
$$\mathbf{V}_2 = -\,\mathbf{I}_2 Z_L$$

$$\mathbf{I}_2 = 0\text{ A} \Rightarrow \mathbf{V}_2 = \frac{h_{21}}{h_{12}h_{21} - h_{22}(Z_G + h_{11})}\mathbf{V}_G = \mathbf{V}_{Th}$$

Cálculo de la corriente de cortocircuito



$$\mathbf{V}_1 = \mathbf{I}_1 h_{11} + \mathbf{V}_2 h_{12}$$
$$\mathbf{I}_2 = \mathbf{I}_1 h_{21} + \mathbf{V}_2 h_{22}$$
$$\mathbf{V}_G = \mathbf{I}_1 Z_G + \mathbf{V}_1$$
$$\mathbf{V}_2 = -\,\mathbf{I}_2 Z_L$$

$$\mathbf{V}_2 = 0\text{ V} \Rightarrow \mathbf{I}_2 = \frac{h_{21}}{Z_G + h_{11}}\mathbf{V}_G = -\,\mathbf{I}_N$$

Impedancia equivalente

$$Z_{Th} = \frac{\mathbf{V}_{Th}}{\mathbf{I}_N} = -\,\frac{Z_G + h_{11}}{h_{12}h_{21} - h_{22}(Z_G + h_{11})}$$