Tema II: Análisis de circuitos mediante la transformada de Laplace

La transformada de Laplace

Concepto e interés práctico

Es una **herramienta** que transforma un problema en el dominio del tiempo
en un problema en el dominio de la frecuencia
(el fasor convierte una señal sinusoidal en un número complejo).

Aplicaciones:

Análisis del régimen transitorio en circuitos
descritos por más de dos ecuaciones diferenciales.

Análisis del régimen transitorio en circuitos
sometidos a excitaciones distintas de simples saltos de nivel.

Introducción del concepto de función de transferencia
para analizar la respuesta en frecuencia de un circuito
sometido a excitación sinusoidal.

Relacionar el comportamiento de un circuito en el dominio del tiempo
con su comportamiento en el dominio de la frecuencia.

Definición

Dada una función f(t), que depende de la variable independiente tiempo (t), su transformada de Laplace se define mediante la expresión

$$F(s) = \mathrm{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$$

$[t] = s \Rightarrow [s] = s^{-1}$ (frecuencia) $\Rightarrow$

La transformada de Laplace
convierte un problema en el dominio del tiempo
en un problema equivalente
en el dominio de la frecuencia.

Observaciones

La integral es impropia ya que el límite superior de integración es ∞.
En consecuencia, la integral puede no converger.
Sin embargo, en análisis de circuitos se hace referencia únicamente
a funciones que hacen que la integral converja, con lo que tienen transformada de Laplace.

Se hará referencia únicamente a transformadas dadas por la integral indicada,
que reciben el nombre de transformadas unilaterales.
Las transformadas bilaterales son aquéllas en las que el límite inferior de integración es -∞.

Si f(t) es discontinua en el origen, su valor en t = 0 se evalúa en $t = 0^-$.

Se hará referencia únicamente a señales de interés en circuitos eléctricos y electrónicos
que se comportan como sistemas LTI.

Transformadas funcionales son las que se realizan sobre funciones matemáticas.
Transformadas operacionales son aquellas
que involucran operaciones realizadas sobre funciones.

Transformadas de Laplace funcionales

En todos los casos $f(t) = 0$ para $t < 0^-$.

Función matemática		Transformada de Laplace
Delta de Dirac (impulso unitario)	$\delta(t)$	1
Escalón unitario	$u(t)$	$\frac{1}{s}$
Rampa	t	$\frac{1}{s^2}$
Exponencial	e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$
Seno	$\mathrm{sen}(\omega t)$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
Coseno	$\cos(\omega t)$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$
Rampa amortiguada	te^{-at}	$\frac{1}{(s+a)^2}$
Seno amortiguado	$e^{-at}\mathrm{sen}(\omega t)$	$\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$
Coseno amortiguado	$e^{-at}\cos(\omega t)$	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$

Transformadas de Laplace operacionales

Operación	Transformada de Laplace
$f(t)$	$F(s)$
$Kf(t)$	$KF(s)$
$\sum_i f_i(t)$ (algebraica)	$\sum_i F_i(s)$ (algebraica)
$\dfrac{d^n f(t)}{dt^n}$	$s^n F(s) - s^{n-1} f(0^-) - s^{n-2}\left[\dfrac{df(t)}{dt}\right]_{t=0^-} - \ldots - \left[\dfrac{d^{n-1}f(t)}{dt^{n-1}}\right]_{t=0^-}$
$\int_0^t f(\tau)d\tau$	$\dfrac{F(s)}{s}$
$f(t - t_0)u(t - t_0),\ t_0 > 0$ s	$e^{-st_0}F(s)$
$e^{-at}f(t)$	$F(s + a)$
$f(at),\ a > 0$ s^{-1}	$\dfrac{1}{a}F\left(\dfrac{s}{a}\right)$
$tf(t)$	$-\dfrac{dF(s)}{ds}$
$t^n f(t)$	$(-1)^n \dfrac{d^n F(s)}{ds^n}$
$\dfrac{f(t)}{t}$	$\int_s^\infty F(\tau)d\tau$

Ejemplo 1 de cálculo de transformada de Laplace

Se desea obtener la transformada de Laplace de la función $y(t) = t^2 e^{-at}$

Observando las tablas anteriores podemos escribir $y(t) = t^n f(t)$

$$\text{con } n = 2 \text{ y } f(t) = e^{-at} \Rightarrow F(s) = \frac{1}{s + a}$$

$$y(t) = t^n f(t) \Rightarrow Y(s) = (-1)^n \frac{d^n F(s)}{ds^n} = \frac{2}{(s + a)^3}$$

Ejemplo 2 de cálculo de transformada de Laplace

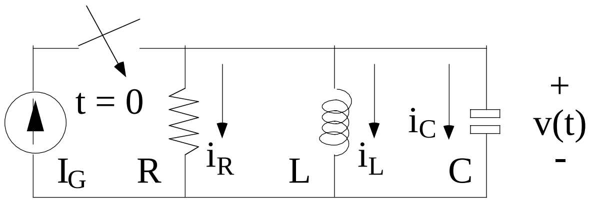
Se desea obtener la transformada de Laplace de la función $y(t) = t\cos(\omega t)$

Observando las tablas anteriores podemos escribir $y(t) = tf(t)$

$$\text{con } f(t) = \cos(\omega t) \Rightarrow F(s) = \frac{s}{s^2 + \omega^2}$$

$$y(t) = t^n f(t) \Rightarrow Y(s) = -\frac{dF(s)}{ds} = \frac{s^2 - \omega^2}{(s^2 + \omega^2)^2}$$

Ejemplo 1 de aplicación a un circuito



El circuito de la figura,
en el que la fuente es continua y son datos
las características de todos los elementos,
ha permanecido mucho tiempo sin cambios
antes del cambio de posición del interruptor.
Una vez producido éste,
ya no experimenta más cambios.

Se desea obtener v(t) para t > 0.

Para cualquier instante se tiene

Ecuación de nudo
y relaciones
funcionales

$$I_G u(t) = i_R(t) + i_L(t) + i_C(t) \tag{1}$$

esto indica que la fuente sólo se aplica para t > 0

$$i_R(t) = \frac{v(t)}{R},\ i_C(t) = C\frac{dv(t)}{dt},\ v(t) = L\frac{di_L(t)}{dt} \Rightarrow i_L(t) = \frac{1}{L}\int_0^t v(\tau)d\tau \tag{2}$$

Sustituyendo (2) en (1) se obtiene

$$I_G u(t) = \frac{v(t)}{R} + \frac{1}{L}\int_0^t v(\tau)d\tau + C\frac{dv(t)}{dt} \tag{3}$$

Aplicando a (3) la transformación de Laplace
de acuerdo con lo indicado en las anteriores, se obtiene

$$\frac{I_G}{s} = \frac{V(s)}{R} + \frac{V(s)}{Ls} + C[sV(s) - v(0^-)] \tag{4}$$

Teniendo en cuenta que para t < 0 no había energía almacenada en el circuito (los elementos pasivos estaban desconectados de la excitación), $v(0^-) = 0$ V, con lo que (4) queda en la forma

$$\frac{I_G}{s} = V(s)\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{sL} + sC\right) \tag{5}$$

de donde puede deducirse

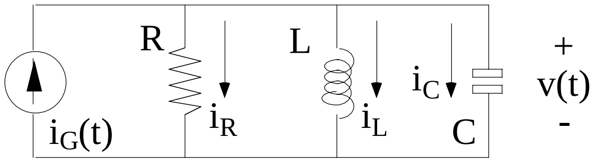
$$V(s) = \frac{I_G/C}{s^2 + \frac{s}{RC} + \frac{1}{LC}} \Rightarrow v(t) = \mathcal{L}^{-1}\{V(s)\}$$

La función temporal buscada es la transformada inversa de Laplace de V(s). Más adelante se indicará cómo obtener transformadas inversas de Laplace.

Comparación de métodos para analizar el régimen transitorio

Análisis integro-diferencial	**Análisis basado en la transformada de Laplace**
Resolución de una o más ecuaciones diferenciales en el dominio del tiempo.	Resolución de una o más ecuaciones algebraicas en el dominio s.

Ejemplo 2 de aplicación a un circuito



Se desea obtener la transformada de Laplace correspondiente a v(t).

$i_G(t) = K\cos(\omega t)$, $K = 1.2$ A, $\omega = 1$ rad/s
$R = 1\ \Omega$, $L = 1.6$ H, $C = 0.625$ F

Se sigue un procedimiento idéntico al utilizado en el ejemplo anterior.
La única diferencia es que la transformada de Laplace correspondiente a la fuente es

$$I_G(s) = \frac{Ks}{s^2 + \omega^2}$$

con lo que la ecuación (5) pasa a ser

$$\frac{Ks}{s^2 + \omega^2} = V(s)\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{sL} + sC\right)$$

Despejando V(s) y utilizando los valores numéricos se obtiene

$$V(s) = \frac{1.92s^2}{(s^2 + 1)(s^2 + 1.6s + 1)}\ \text{Vs}$$

La utilización de la transformada de Laplace permite tratar de forma unificada problemas de régimen transitorio y problemas de régimen sinusoidal.

La transformada inversa de Laplace

Se trata de obtener la expresión en el dominio del tiempo correspondiente a una expresión dada en el dominio s.

Procedimiento general

En general, la transformada de Laplace
correspondiente a una variable de interés en un circuito
es una función racional (sólo aparecen potencias enteras de s) de la forma

$$F(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0}{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}$$

donde

a_i (i = 0, 1, ... , n) y b_j(j = 0, 1, ... , m) son constantes reales.
m y n son enteros positivos (números naturales).
Si m > n, F(s) se denomina función real propia.
Si m < n, F(s) se denomina función real impropia.

1. Se consideran únicamente **funciones reales propias**.
2. Obtención de las **raíces del denominador**.
   El denominador siempre puede escribirse en la forma

   $$D(s) = (s + s_1)(s + s_2) \dots (s + s_k)^p \dots (s + s_m)$$

   donde $s = -s_k$ (y cualquier otro término similar) es una raíz múltiple.
3. Expansión en **fracciones parciales**.

   $$F(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{K_1}{s + s_1} + \frac{K_2}{s + s_2} + \dots + \frac{K_{k1}}{s + s_k} + \dots + \frac{K_{kp}}{(s + s_k)^p} + \dots + \frac{K_m}{s + s_m}$$

4. Determinación de los **coeficientes** K_j (j = 0, 1, ... , m).
5. Utilización de las tablas anteriores para obtener las transformadas inversas correspondientes a las fracciones parciales.

Obtención de coeficientes cuando las raíces son reales y distintas

Sea F(s) una función racional propia
y sean $s = -s_j$ (j = 1, 2, ..., m) las raíces de su denominador.

La función puede escribirse en la forma

$$F(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{K_1}{s + s_1} + \frac{K_2}{s + s_2} + \dots + \frac{K_m}{s + s_m} = \frac{N(s)}{(s + s_1)(s + s_2)\dots(s + s_m)}$$

El coeficiente K_j, correspondiente a la fracción en la que figura la raíz $s = -s_j$, está dado por

$$K_j = \{(s + s_j)F(s)\}_{s=-s_j} = \frac{N(-s_j)}{\prod\limits_{p=1,\ p\neq j}^{m} (s + s_p)}$$

Obtenidos los coeficientes, conviene comprobar que el cálculo se ha realizado bien.

Para ello se evalúan F(s) y su expansión en fracciones parciales para cualquier valor de s (no coincidente con las raíces del denominador)
y los dos resultados han de ser iguales.

Se sugiere utilizar como valor de s uno que haga nulo N(s).

Ejemplo

Se desea obtener la transformada inversa de Laplace de la función

$$F(s) = \frac{6s^2 + 26s + 26}{(s + 1)(s + 2)(s + 3)}$$

$$F(s) = \frac{6s^2 + 26s + 26}{(s + 1)(s + 2)(s + 3)} = \frac{K_1}{s + 1} + \frac{K_2}{s + 2} + \frac{K_3}{s + 3}$$

$$K_1 = \{F(s)(s + 1)\}_{s = -1} = \left\{\frac{6s^2 + 26s + 26}{(s + 2)(s + 3)}\right\}_{s = -1} = 3$$

$$K_2 = \{F(s)(s + 2)\}_{s = -2} = \left\{\frac{6s^2 + 26s + 26}{(s + 1)(s + 3)}\right\}_{s = -2} = 2$$

$$K_3 = \{F(s)(s + 3)\}_{s = -3} = \left\{\frac{6s^2 + 26s + 26}{(s + 1)(s + 2)}\right\}_{s = -3} = 1$$

$$F(s) = \frac{6s^2 + 26s + 26}{(s + 1)(s + 2)(s + 3)} = \frac{3}{s + 1} + \frac{2}{s + 2} + \frac{1}{s + 3}$$

Para comprobar que la expansión en fracciones parciales ha sido bien hecha
se evalúan los dos miembros de la última ecuación para $s = -2.77$
(una de las raíces del numerador de la función)
y se obtiene que ambos son nulos.

Utilizando los contenidos de las tablas de transformadas se llega a

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3}{s + 1}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s + 2}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s + 3}\right\} =$$

$$= (3e^{-t} + 2e^{-2t} + e^{-3t})u(t)$$

La presencia del escalón unitario en la última expresión es para asegurar que f(t) sólo es nula para valores positivos de t, lo cual se requiere para que sean válidas las expresiones que figuran en las tablas.

Obtención de coeficientes cuando hay raíces reales y complejas (todas ellas distintas entre sí)

Sea F(s) una función racional propia
y sean $s = -s_j$ (j = 1, 2, ..., m) las raíces de su denominador.

Se aplica el procedimiento detallado en el apartado anterior, resultando que

Los coeficientes correspondientes a raíces reales son reales.

Los coeficientes correspondientes a raíces complejas son complejos.

Las raíces complejas se presentan en pares conjugados,
con lo que los coeficientes correspondientes también son pares conjugados
(sólo es necesario calcular la mitad de tales coeficientes).

Es decir, en el desarrollo de F(s) aparecen términos de la forma

$$G(s) = \frac{K}{s + \alpha - j\beta} + \frac{K^*}{s + \alpha + j\beta}, \text{ siendo } K = |K|e^{j\theta}$$

con lo que la transformada inversa correspondiente a estos términos es
(de acuerdo con las tablas de transformadas)

$$g(t) = \mathcal{L}^{-1}\{G(s)\} = 2|K|e^{-\alpha t}\cos(\beta t + \theta)u(t)$$

Obtenidos los coeficientes, conviene comprobar que el cálculo se ha realizado bien, procediendo de forma similar a la indicada en el apartado anterior.

Ejemplo

Se desea obtener la transformada inversa de Laplace de la función

$$F(s) = \frac{10(s^2 + 119)}{(s + 5)(s^2 + 10s + 169)}$$

Manipulando el denominador puede observarse que tiene dos raíces complejas, con lo que

$$F(s) = \frac{K_1}{s + 5} + \frac{K}{s + 5 - j12} + \frac{K^*}{s + 5 + j12} \Rightarrow \alpha = 5,\ \beta = 12$$

$$K_1 = \{F(s)(s + 5)\}_{s = -5} = 10$$

$$K = |K|e^{j\theta} = \{F(s)(s + 5 - j12)\}_{s = -5 + j12} = j4.16 \Rightarrow |K| = 4.16,\ \theta = 90\ ^{o}$$

Utilizando los contenidos de las tablas de transformadas se llega a

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = \left[\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{10}{s + 5}\right\} + 2|K|e^{-\alpha t}\cos(\beta t + \theta)\right]u(t) =$$

$$= [10e^{-5t} + 8.33e^{-5t}\cos(12t + 90\ ^{o})]u(t)$$

Obtención de coeficientes cuando las raíces son reales y algunas están repetidas

Sea F(s) una función racional propia;
sean $s = -s_j$ (j = 1, 2, ..., m) las raíces reales de su denominador distintas entre sí,
y sea $s = -s_p$ la raíz real repetida r veces (p y r son números naturales).

La función puede escribirse en la forma

$$F(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{N(s)}{(s + s_1) \ldots (s + s_m)(s + s_p)^r} = \frac{K_1}{s + s_1} + \ldots + \frac{K_m}{s + s_m} + \frac{K_{p1}}{s + s_p} + \ldots + \frac{K_{pr}}{(s + s_p)^r}$$

Los coeficientes correspondientes a raíces distintas se obtienen como se indicó antes.

Los coeficientes correspondientes a la raíz repetida se obtienen mediante los algoritmos

$$K_{pr} = [F(s)(s + s_p)^r]_{s\,=\,-\,s_p},\ K_{pr-v}(v = 0, 1, \ldots, r\text{-}1) = \left\{\frac{d^v}{ds^v}[F(s)(s + s_p)^r]\right\}_{s\,=\,-\,s_p}$$

Obtenidos los coeficientes, conviene comprobar que el cálculo se ha realizado bien, utilizando un procedimiento similar a los indicados en apartados anteriores.

Ejemplo

Se desea obtener la transformada inversa de Laplace de la función

$$F(s) = \frac{4s^2 + 7s + 1}{s(s+1)^2}$$

$$F(s) = \frac{4s^2 + 7s + 1}{s(s+1)^2} = \frac{K_1}{s} + \frac{K_{21}}{s+1} + \frac{K_{22}}{(s+1)^2}$$

$$K_1 = \{F(s)s\}_{s=0} = 1$$

$$K_{22} = \{F(s)(s+1)^2\}_{s=-1} = 2$$

$$K_{21} = \left\{\frac{d}{ds}[F(s)(s+1)^2]\right\}_{s=-1} = \left\{\frac{d}{ds}\left[\frac{4s^2 + 7s + 1}{s}\right]\right\}_{s=-1} = 3$$

Utilizando los contenidos de las tablas de transformadas se llega a

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3}{s+1}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{(s+1)^2}\right\} = (1 + 3e^{-t} + 2te^{-t})u(t)$$

Obtención de coeficientes cuando hay raíces complejas y algunas están repetidas

El procedimiento es idéntico al indicado para el caso de raíces reales múltiples.

Caso general de raíces múltiples

$$s = -a \text{ (raíz real de multiplicidad r)} \Rightarrow \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{K}{(s+a)^r}\right\} = \frac{Kt^{r-1}e^{-at}}{(r-1)!}u(t)$$

$$s = -\alpha + j\beta \text{ (raíz compleja de multiplicidad r)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{K}{(s+\alpha-j\beta)^r}\right\} = \left[\frac{2|K|t^{r-1}e^{-\alpha t}}{(r-1)!}\cos(\beta t+\theta)\right]u(t)$$

En muchos problemas de análisis de circuitos $r \leq 2$.
En esa situación la tabla siguiente es de utilidad para obtener transformadas inversas por simple inspección.

K	Raíces	F(s)	f(t)
Real	Real simple	$\frac{K}{s+a}$	$Ke^{-at}u(t)$
Real	Real múltiple	$\frac{K}{(s+a)^2}$	$Kte^{-at}u(t)$
$\lvert K\rvert e^{j\theta}$	Compleja simple	$\frac{K}{s+\alpha-j\beta} + \frac{K^*}{s+\alpha+j\beta}$	$2\lvert K\rvert e^{-\alpha t}\cos(\beta t+\theta)u(t)$
$\lvert K\rvert e^{j\theta}$	Compleja múltiple	$\frac{K}{(s+\alpha-j\beta)^2} + \frac{K^*}{(s+\alpha+j\beta)^2}$	$2t\lvert K\rvert e^{-\alpha t}\cos(\beta t+\theta)u(t)$

Ejemplo

Se desea obtener la transformada inversa de Laplace de la función

$$F(s) = \frac{40}{(s^2 + 4s + 5)^2}$$

$$F(s) = \frac{40}{(s^2 + 4s + 5)^2} = \frac{40}{(s + 2 - j)^2(s + 2 + j)^2} =$$

$$F(s) = \frac{K_1}{s + 2 - j} + \frac{K_1^*}{s + 2 + j} + \frac{K_2}{(s + 2 - j)^2} + \frac{K_2^*}{(s + 2 + j)^2} \Rightarrow \alpha = 2,\ \beta = 1$$

$$K_2 = |K_2|e^{j\theta_2} = \{F(s)(s + 2 - j)^2\}_{s = -2 + j} = -10 \Rightarrow |K_2| = 10,\ \theta = 180\ º$$

$$K_1 = \left\{\frac{d}{ds}[F(s)(s + 2 + j)^2]\right\}_{s = -2 - j} = \left\{\frac{d}{ds}\left[\frac{40}{(s + 2 - j)^2}\right]\right\}_{s = -2 - j} = -j10 \Rightarrow |K_1| = 10,\ \theta_1 = -90\ º$$

Utilizando los contenidos de la última tabla se llega a

$$f(t) = [20e^{-2t}\cos(t - 90\ º) + 20te^{-2t}\cos(t + 180\ º)]u(t)$$

Transformada inversa de una función racional impropia

Una función racional impropia puede ser escrita en la forma

$$F(s) = \frac{N'(s)}{D(s)} = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \ldots + \frac{N(s)}{D(s)}$$

Es decir, puede escribirse como un polinomio más una función racional propia.

La transformada inversa de Laplace de la función racional propia
se obtiene como se indicó en apartados anteriores.

Los términos del polinomio dan lugar a transformadas inversas de la forma

$$\mathcal{L}^{-1}[a] = a\delta(t),\ \mathcal{L}^{-1}[a_p s^p] = a_p \frac{d^p\delta(t)}{dt^p}$$

Ejemplo

Se desea obtener la transformada inversa de Laplace de la función

$$F(s) = \frac{2s^3 + 8s^2 + 2s - 4}{s^2 + 5s + 4}$$

$$F(s) = \frac{2s^3 + 8s^2 + 2s - 4}{s^2 + 5s + 4} = 2s - 2 + F'(s)$$

$$F'(s) = \frac{4s + 4}{s^2 + 5s + 4} = \frac{4s + 4}{(s + 1)(s + 4)} = \frac{K_1}{s + 1} + \frac{K_2}{s + 4}$$

$$K_1 = \{F'(s)(s + 1)\}_{s = -1} = 0,\ K_2 = \{F'(s)(s + 4)\}_{s = -4} = 4$$

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = 2\frac{d\delta(t)}{dt} - 2\delta(t) - 4e^{-4t}u(t)$$

Polos y ceros de funciones racionales propias

Una función racional puede ser escrita en la forma

$$F(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0}{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0} =$$

$$= \frac{K(s + z_1)(s + z_2) \dots (s + z_n)}{(s + p_1)(s + p_2) \dots (s + p_n)},\ K = \frac{a_n}{b_m}$$

Esta operación (factorización de un polinomio) se realiza,
salvo casos sencillos, utilizando herramientas informáticas.

Las raíces del denominador ($-p_j$, j = 1, 2, ... , m) se llaman polos,
ya que, para s igual a cualquiera de ellas, F(s) se hace infinita.

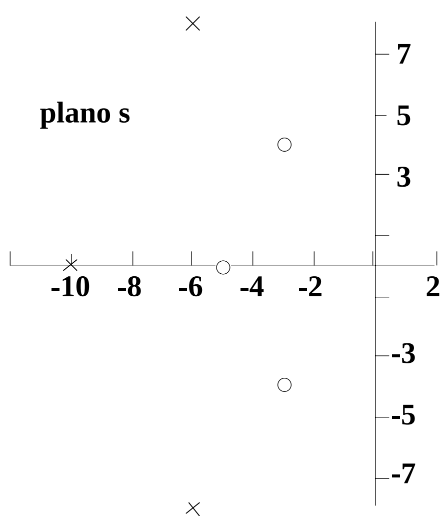
Las raíces del numerador ($-z_i$, i = 1, 2, ... , m) se llaman ceros,
ya que, para s igual a cualquiera de ellas, F(s) se hace nula.

Los ceros y polos se representan en un plano (plano *s*) complejo (O: cero; X: polo).
Puede haber ceros y polos en el infinito,
pero sólo se considerarán los representables en el plano *s* finito
(valores reales en abscisas; imaginarios en ordenadas).

Ejemplo

$$F(s) = \frac{10(s + 5)(s + 3 - j4)(s + 3 + j4)}{s(s + 10)(s + 6 - j8)(s + 6 + j8)}$$

Además de los indicados,
la función tiene un cero en s = - ∞



Teoremas de los valores inicial y final

Siendo $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$, se cumple

Teorema del valor inicial.

f(t) no contiene funciones impulso.

$$\lim_{t \to 0^+} f(t) = \lim_{s \to \infty} [sF(s)]$$

Teorema del valor final.

Los polos de F(s) están en el semiplano s izquierdo (puede haber un polo de primer orden -no múltiple- en el origen).

$$\lim_{t \to \infty} f(t) = \lim_{s \to 0} [sF(s)]$$

Estos teoremas son útiles para comprobar si se ha calculado correctamente F(s) antes de obtener su transformada inversa.

El comportamiento predicho por los teoremas debe coincidir con el que muestra el circuito.

Ejemplo

Se desea obtener los valores de f(t) en $t = 0^+$ y $t = \infty$ sabiendo que

$$F(s) = \frac{7s^2 + 63s + 134}{(s+3)(s+4)(s+5)}$$

$$\text{lím}(t \to 0^+)\ f(t) = \text{lím}(s \to \infty)\ [sF(s)] = 7$$

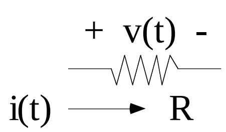
$$\text{lím}(t \to \infty)\ f(t) = \text{lím}(s \to 0)\ [sF(s)] = 0$$

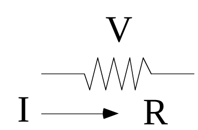
Circuitos equivalentes en el dominio s

Variables en el dominio del tiempo	Variables en el dominio s
corriente, $[i(t)] = A$	$I = \mathcal{L}\{i(t)\}$, $[I] = As$
voltaje (tensión), $[v(t)] = V$	$V = \mathcal{L}\{v(t)\}$, $[V] = Vs$

Elementos pasivos

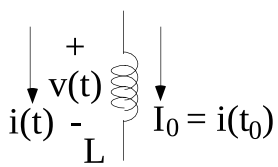
t_0 es el instante en el que cambian las condiciones del circuito



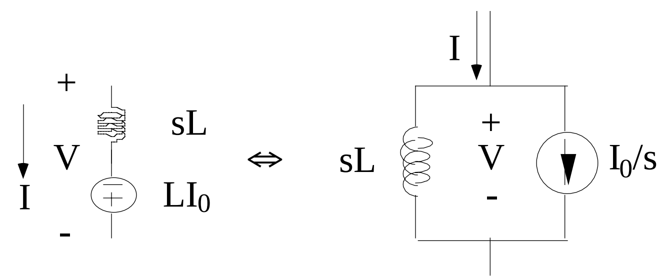


$v(t) = Ri(t)$

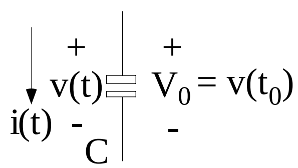
$V = RI$



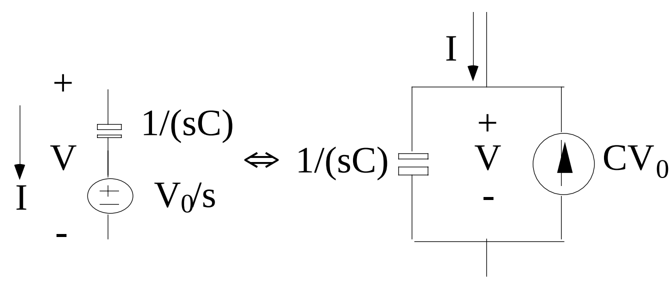
$$v(t) = L\frac{di(t)}{dt} \Rightarrow i(t) = \frac{1}{L}\int_{t_0^-}^{t} v(\tau)d\tau + I_0$$



$V = sLI - LI_0$, $I = V/(sL) + I_0/s$



$$i(t) = C\frac{dv(t)}{dt} \Rightarrow v(t) = \frac{1}{C}\int_{t_0^-}^{t} i(\tau)d\tau + V_0$$



$V = I/(sC) + V_0/s$, $I = sCV - CV_0$

Fuentes independientes de continua

Fuentes dependientes

$I_x = L\{i_x\}$ $V_x = L\{v_x\}$

Utilización de circuitos en el dominio s

Son de aplicación:

-Los criterios de signos.

-Las reglas de agrupación de elementos.

-Las reglas de transformación de generadores.

-Las leyes de Kirchhoff.

-La técnica de análisis por mallas.

-La técnica de análisis por nudos.

-Los circuitos equivalentes de Thèvenin y Norton (véase más adelante).

Principio de superposición:

La transformada de Laplace de la respuesta de un circuito sometido a una combinación lineal de excitaciones individuales es la misma combinación lineal de las transformadas de Laplace de las respuestas a las excitaciones individuales.

Para calcular la respuesta a una excitación individual las fuentes representativas de las restantes excitaciones han de estar desactivadas.

Resolución de circuitos con ayuda de la transformada de Laplace

Procedimiento general

1 Representar el circuito en el dominio s.

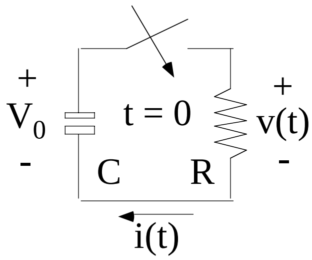
2 Formular las ecuaciones que caracterizan el circuito
después de efectuado el paso (1).

3 Resolver las ecuaciones de (2) para las variables de interés.

4 Transformar los resultados obtenidos en (3) en sus equivalentes
en el dominio del tiempo (transformada inversa de Laplace).

5 Comprobar que los resultados obtenidos en (4)
tienen significado físico
mediante la aplicación de los teoremas de los valores inicial y final.

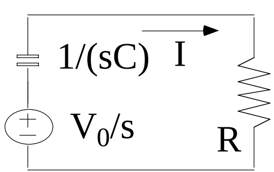
Ejemplo 1



El circuito de la figura,
en el que son datos las características de todos los elementos,
ha permanecido mucho tiempo sin cambios
antes del cambio de posición del interruptor. En ese momento la capacidad está cargada con una tensión conocida.
Una vez producido el cambio,
el circuito ya no experimenta más cambios.

Se desea obtener i(t) para t > 0.

Para t > 0,
la representación del circuito en el dominio transformado es la mostrada en la figura.
Entre las dos representaciones posibles,
se ha elegido la indicada por ser la más adecuada para calcular la corriente.

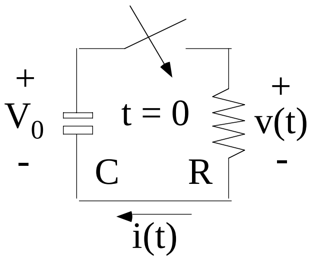


$$\frac{V_0}{s} = \frac{I}{sC} + RI \Rightarrow I = \frac{V_0/R}{s + \frac{1}{RC}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow i(t) = \mathcal{L}^{-1}\{I\} = \frac{V_0}{R} e^{-t/(RC)} u(t)$$

La transformada inversa se obtiene de la tabla
de transformadas de Laplace funcionales.

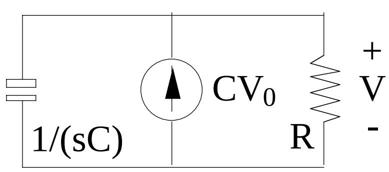
Ejemplo 2



El circuito de la figura,
en el que son datos las características de todos los elementos,
ha permanecido mucho tiempo sin cambios
antes del cambio de posición del interruptor. En ese momento la capacidad está cargada con una tensión conocida.
Una vez producido el cambio,
el circuito ya no experimenta más cambios.

Se desea obtener v(t) para t > 0.

Para t > 0,
la representación del circuito en el dominio transformado es la mostrada en la figura.
Entre las dos representaciones posibles,
se ha elegido la indicada por ser la más adecuada para calcular la tensión.

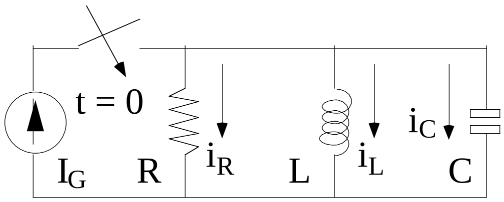


$$CV_0 = \frac{V}{\frac{1}{sC}} + \frac{V}{R} \Rightarrow V = \frac{V_0}{s + \frac{1}{RC}}$$

$$\Rightarrow v(t) = \mathcal{L}^{-1}\{V\} = V_0 e^{-t/(RC)} u(t)$$

La transformada inversa se obtiene de la tabla
de transformadas de Laplace funcionales.

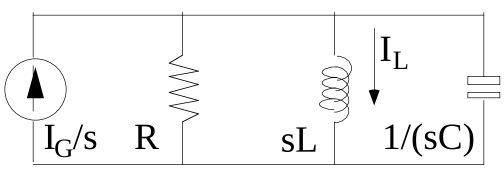
Ejemplo 3



El circuito de la figura,
en el que la fuente es continua y son datos las características de todos los elementos, ha permanecido mucho tiempo sin cambios antes del cambio de posición del interruptor.
Una vez producido éste,
ya no experimenta más cambios.

Se desea obtener $i_L(t)$ para $t > 0$.

Para $t > 0$,
la representación del circuito en el dominio transformado es la mostrada en la figura.



$$\frac{I_G}{s} = V\left(sC + \frac{1}{R} + \frac{1}{sL}\right) \Rightarrow$$

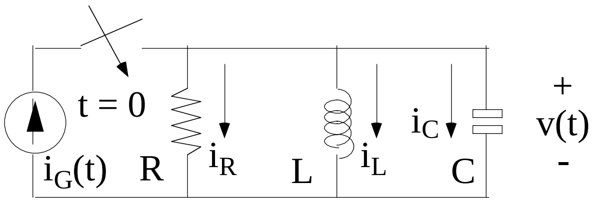
$$\Rightarrow V = \frac{I_G/C}{s^2 + \frac{s}{RC} + \frac{1}{LC}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I_L = \frac{V}{sL} = \frac{I_G/(LC)}{s\left(s^2 + \frac{s}{RC} + \frac{1}{LC}\right)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow i_L = \mathcal{L}^{-1}\{I_L\}$$

Para calcular la transformada inversa
es necesario conocer los valores
de los elementos del circuito.

Ejemplo 4

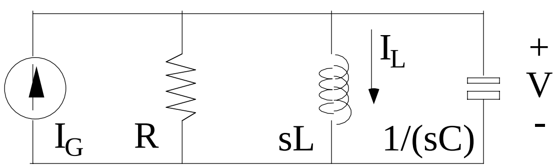


$i_G(t) = I_m\cos(\omega t)$, $I_m = 24$ mA, $\omega = 40$ krad/s
$R = 625\ \Omega$, $L = 25$ mH, $C = 25$ nF

El circuito de la figura
ha permanecido mucho tiempo sin cambios
antes del cambio de posición del interruptor.
Una vez producido éste,
ya no experimenta más cambios.

Se desea obtener $i_L(t)$ para $t > 0$.

Para $t > 0$,
la representación del circuito en el dominio transformado es la mostrada en la figura.



$$I_G = \frac{sI_m}{s^2 + \omega^2}$$

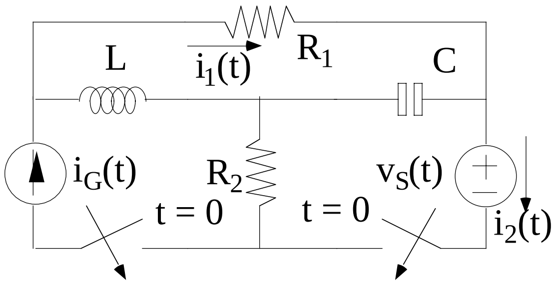
$$V = \frac{I_G/C}{s^2 + \frac{s}{RC} + \frac{1}{LC}} = \frac{[I_m/(LC)]s}{(s^2 + \omega^2)\left(s^2 + \frac{s}{RC} + \frac{1}{LC}\right)}$$

$$I_L = \frac{V}{sL} = \frac{384 \times 10^5 s}{(s - j\omega)(s + j\omega)(s + \alpha - j\beta)(s + \alpha + j\beta)},\ \alpha = 32000\ s^{-1},\ \beta = 24000\ s^{-1}$$

En este caso no es posible utilizar el teorema del valor final
para comprobar la corrección de los cálculos
porque $i_L(s)$ tiene dos polos en el eje imaginario.

$$i_L(t) = \mathcal{L}^{-1}\{I_L(s)\} = [15\cos(\omega t - 90^\circ) + 25e^{-\alpha t}\cos(\beta t + 90^\circ)]u(t)\ \text{mA}$$

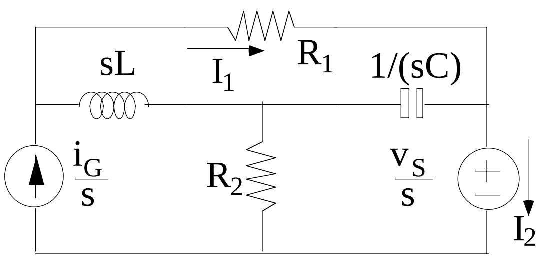
Ejemplo 5



$i_G(t) = 6$ A, $v_S(t) = 75$ V, $R_1 = 10\ \Omega$
$R_2 = 5\ \Omega$, $L = 2.5$ H, $C = 0.2$ F

El circuito de la figura ha permanecido mucho tiempo sin cambios antes del cambio de posición de los interruptores. Una vez producido éste, ya no experimenta más cambios.

Se desea obtener $i_1(t)$ e $i_2(t)$ para $t > 0$ y los valores iniciales y finales de tales corrientes.



Para $t > 0$, el circuito en el dominio s es el mostrado en la figura adjunta.

Utilizando análisis por mallas, se tienen las ecuaciones

$$0 = I_1\left(sL + R_1 + \frac{1}{sC}\right) - \frac{I_2}{sC} - \frac{i_G}{s}sL \qquad \frac{v_S}{s} = \frac{I_1}{sC} - I_2\left(R_2 + \frac{1}{sC}\right) + \frac{i_G}{s}R_2$$

Utilizando los datos del problema se llega a

$$i_1(t) = \mathcal{L}^{-1}\{I_1(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{6(s^2 + s - 3)}{s(s^2 + 5s + 6)}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{6(s^2 + s - 3)}{s(s + 2)(s + 3)}\right\} = (-3 + 3e^{-2t} + 6e^{-3t})u(t)$$

$$i_2(t) = \mathcal{L}^{-1}\{I_2(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{-9s^2 - 30s - 18}{s(s^2 + 5s + 6)}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{-9s^2 - 30s - 18}{s(s + 2)(s + 3)}\right\} = (-3 - 3e^{-2t} - 3e^{-3t})u(t)$$

Utilizando los teoremas de los valores inicial y final se tiene

$$i_1(0^+) = \lim\ (s \to \infty)\ (sI_1) = 6 \text{ A}, \quad i_1(\infty) = \lim\ (s \to 0)\ (sI_1) = -3 \text{ A}$$

Obsérvese que el hecho de que la respuesta sea única (sobreamortiguada en este caso) exige que los denominadores de las transformadas de las dos corrientes sean iguales.

La función de transferencia

Dado un sistema en el que X(s) e Y(s) son, respectivamente, las transformadas de Laplace de las señales de entrada y salida, la función de transferencia se define como

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$$

Un sistema tiene tantas funciones de transferencia
como salidas distintas se consideren en él.

Se supone que la señal de entrada (excitación) está representada por una única fuente.
Si hay diversas excitaciones, se obtendrá la función de transferencia para cada una de ellas.
y se aplicará el principio de superposición para determinar la función de transferencia total.

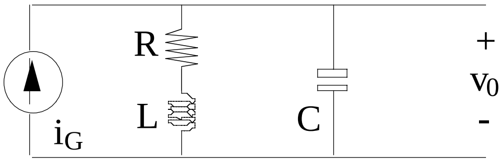
El estudio se restringirá a circuitos en los que todas las condiciones iniciales son nulas.

Dado que Y(s) = H(s)X(s), la expansión del segundo miembro en una suma de fracciones conduce a un término por cada polo de H(s) y a otro por cada polo de X(s).
Los primeros representan el régimen transitorio; los segundos, el estacionario.

En los circuitos de interés

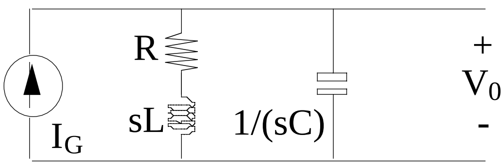
H(s) es siempre una función racional.
Los polos y ceros complejos aparecen siempre en pares conjugados.
Los ceros pueden estar en cualquier parte del plano s
(si están en el semiplano izquierdo, se dice que H(s) es de fase mínima).
Los polos sólo pueden estar en el semiplano izquierdo.

Ejemplo



Siendo v_0 la salida e i_G la excitación, se desea obtener la función de transferencia, y los polos y ceros de dicha función.

$$R = 2\ \Omega,\ L = 1\ H,\ C = 0.1\ F$$



El circuito en el dominio transformado es el mostrado en la figura adjunta, en el que se verifica (obsérvese que no se indica la forma de $i_G(t)$)

$$I_G = V_0\left(\frac{1}{R + sL} + sC\right) \Rightarrow H(s) = \frac{V_0}{I_G} = \frac{R + sL}{s^2LC + sRC + 1} = \frac{10(s + 2)}{s^2 + 2s + 10}$$

Ceros: $s + 2 = 0 \Rightarrow -z = -2$

Polos: $s^2 + 2s + 10 = 0 \Rightarrow -p_1 = -1 + j3,\ -p_2 = -1 - j3$

Observaciones

Si la excitación se retrasa un intervalo temporal, también lo hace la salida (característica de un sistema invariante con el tiempo),
como se demuestra mediante las relaciones

$$\mathcal{L}\{x(t - t_0)u(t - t_0)\} = e^{-st_0}X(s) \Rightarrow Y(s) = H(s)X(s) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \mathcal{L}^{-1}\{H(s)X(s)e^{-st_0}\} = y(t - t_0)u(t - t_0)$$

La transformada inversa de la función de transferencia
es la respuesta del circuito al impulso unidad,
como se demuestra mediante las relaciones

$$x(t) = \delta(t) \Rightarrow X(s) = 1 \Rightarrow Y(s) = H(s) \Rightarrow y(t) = h(t)$$

La respuesta de un circuito al impulso unitario, $h(t)$, contiene suficiente información
para permitir el cálculo de la respuesta a cualquier excitación,
proceso en el que se utiliza la integral de convolución.

Función de transferencia en régimen sinusoidal permanente

Conocida la función de transferencia de un circuito, no es necesario utilizar fasores para determinar su respuesta en régimen sinusoidal permanente.

En régimen sinusoidal permante las señales presentes en el sistema son sinusoidales.

$$x(t) = A\cos(\omega t + \varphi) = A\cos(\omega t)\cos(\varphi) - A\mathrm{sen}(\omega t)\mathrm{sen}(\varphi) \Rightarrow X(s) = \frac{A[s\cos(\varphi) - \omega \mathrm{sen}(\varphi)]}{s^2 + \omega^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Y(s) = H(s)\frac{A[s\cos(\varphi) - \omega \mathrm{sen}(\varphi)]}{s^2 + \omega^2} = \frac{K}{s - j\omega} + \frac{K^*}{s + j\omega} + G(s)$$

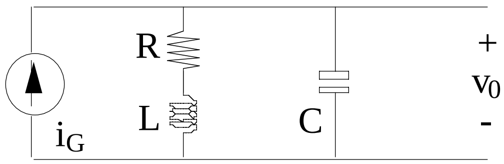
G(s) es un conjunto de términos generados por los polos de H(s).
Ya que representan el régimen transitorio, no serán tenidos en cuenta.

$$\text{Siendo } H(j\omega) = |H(j\omega)|e^{j\theta(\omega)},$$

$$K = \left[\frac{H(s)A[s\cos(\varphi) - \omega \mathrm{sen}(\varphi)]}{s + j\omega}\right]_{s=j\omega} = \frac{H(j\omega)Ae^{j\varphi}}{2} = \frac{A|H(j\omega)|e^{j[\varphi + \theta(\omega)]}}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y(t) = A|H(j\omega)|\cos[\omega t + \varphi + \theta(\omega)]$$

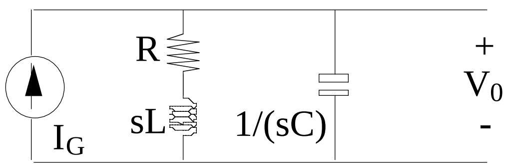
Ejemplo



Se desea obtener la expresión temporal de $v_0(t)$.

$$i_G(t) = I_A\cos(\omega t),\ I_A = 10\ \text{A},\ \omega = 4\ \text{rad/s}$$

$$R = 2\ \Omega,\ L = 1\ \text{H},\ C = 0.1\ \text{F}$$



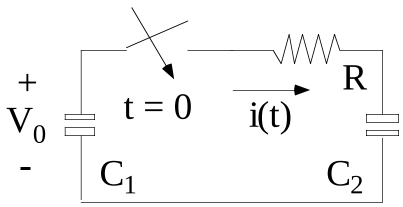
El circuito en el dominio transformado es el mostrado en la figura adjunta, en el que se verifica

$$I_G = V_0\left(\frac{1}{R + sL} + sC\right) \Rightarrow H(s) = \frac{V_0}{I_G} = \frac{R + sL}{s^2LC + sRC + 1} = \frac{10(s + 2)}{s^2 + 2s + 10}$$

$$H(j\omega) = \frac{10(j\omega + 2)}{-\omega^2 + j2\omega + 10} = 2 - j4\ \text{V/A} = 4.47_{\angle -63.43^{\circ}} \Rightarrow |H(j\omega)| = 4.47\ \text{V/A},\ \theta(\omega) = -63.43^{\circ}$$

$$v_0(t) = I_A|H(j\omega)|\cos[\omega t + \theta(\omega)] = 44.7\cos(4t - 63.43^{\circ})\ \text{V}$$

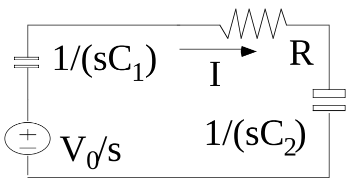
Obtención de una respuesta impulso



Para t < 0,
la capacidad C_1 está descargada,
y la capacidad C_2 tiene una tensión V_0.

Un razonamiento similar puede hacerse con inductancias.

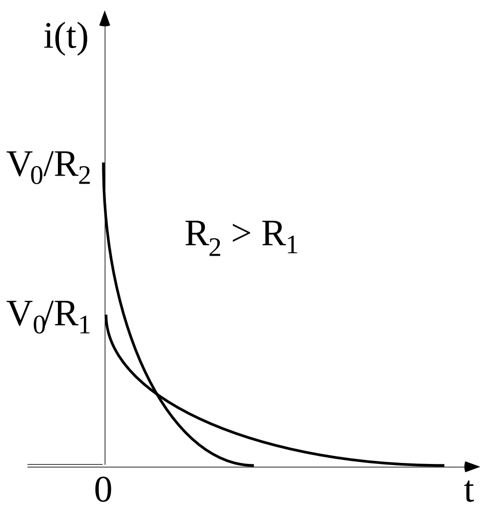
La figura muestra el circuito transformado para t > 0, en el que



$$C = C_1 \text{ en serie con } C_2 = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}$$

$$I = \frac{V_0/R}{s + \frac{1}{RC}} \Rightarrow i(t) = \mathcal{L}^{-1}\{I\} = \frac{V_0}{R} e^{-t/(RC)} u(t)$$

La transformada inversa se obtiene de la tabla de transformadas de Laplace funcionales



A medida que la resistencia se reduce
$i(0^+)$ tiende a infinito
y la duración de la respuesta se reduce.

El área comprendida entre la curva
y el eje de abscisas está dada por

$$\text{Área} = \int_0^\infty \frac{V_0}{R} e^{-t/(RC)} dt = V_0 C = \text{constante}$$

La combinación de las características indicadas
es la que corresponde a una función impulso.

$$R = 0\ \Omega \Rightarrow I = \frac{V_0/s}{\frac{1}{sC_1} + \frac{1}{sC_2}} = CV_0 \Rightarrow i(t) = CV_0 \delta(t)$$