# Tema IV:
# Ideas básicas sobre filtros

# Consideraciones generales

## Definición de filtro

Un filtro es un cuadripolo que permite el paso de señales
con determinadas frecuencias
e impide el paso de señales con otras frecuencias.

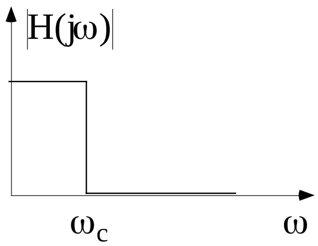

El comportamiento de un filtro se representa matemáticamente
mediante su función o característica de transferencia,
expresada directamente en notación fasorial
o utilizando la transformada de Laplace.

$$H(j\omega) = \frac{\mathbf{V}_o(j\omega)}{\mathbf{V}_i(j\omega)} = \left[\frac{V_o(s)}{V_i(s)}\right]_{s=j\omega} = \left|H(j\omega)\right|_{\angle\varphi(\omega)}$$

# Características ideales

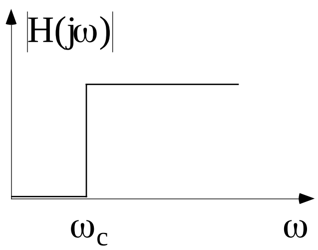
Según sea la característica de transferencia, hay cuatro tipos ideales de filtros.

**Paso bajo**



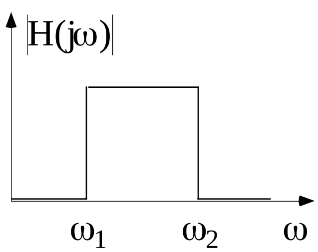

Permite el paso de todas las señales con frecuencias menores que $\omega_c$ e impide el paso de todas las señales con frecuencias superiores a $\omega_c$.

**Paso alto**



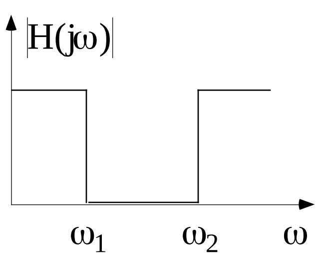

Permite el paso de todas las señales con frecuencias mayores que $\omega_c$ e impide el paso de todas las señales con frecuencias inferiores a $\omega_c$.

**Paso banda**




Permite el paso de todas las señales con frecuencias entre $\omega_1$ y $\omega_2$ e impide el paso de todas las señales con frecuencias distintas.

**Banda eliminada**




Impide el paso de todas las señales con frecuencias entre $\omega_1$ y $\omega_2$ y permite el paso de todas las señales con frecuencias distintas.

# Frecuencia de corte

Frecuencia de corte $$\omega = \omega_c \Rightarrow |H(j\,\omega_c)| = \frac{|H(j\,\omega)|_{max}}{\sqrt{2}}$$

Para $\omega = \omega_c$, la potencia media entregada a una carga
conectada a la salida de un filtro excitado por una señal sinusoidal
es la mitad de la máxima potencia media que puede entregarse a dicha carga.

# Tipos de filtros

**Pasivos.**

Formados exclusivamente por elementos pasivos.
El módulo de la función de transferencia es normalmente inferior a la unidad
(puede ser superior en casos excepcionales).
Si se conecta una carga a la salida del filtro,
el módulo de la función de transferencia es siempre inferior a la unidad.

**Activos.**

Contienen elementos activos (dispositivos tipo transistor) en su interior,
con lo que el módulo de la función de transferencia,
independientemente de que haya o no una carga conectada a la salida,
puede ser superior a la unidad.

# Condiciones de estudio

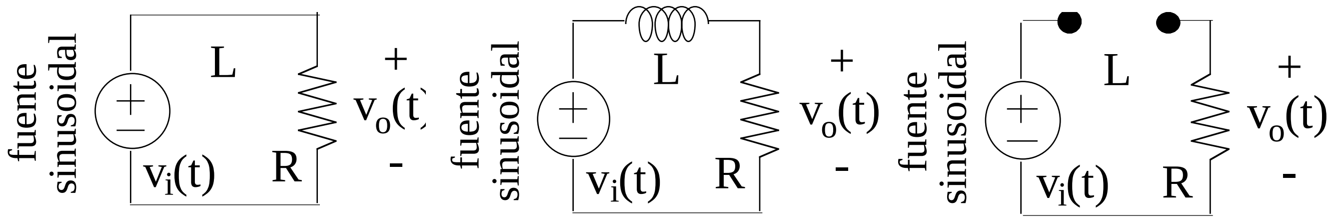
Se hará referencia únicamente a filtros pasivos.

No se tendrá en cuenta de forma especial
la fase de la característica de transferencia del filtro.

# Filtros elementales

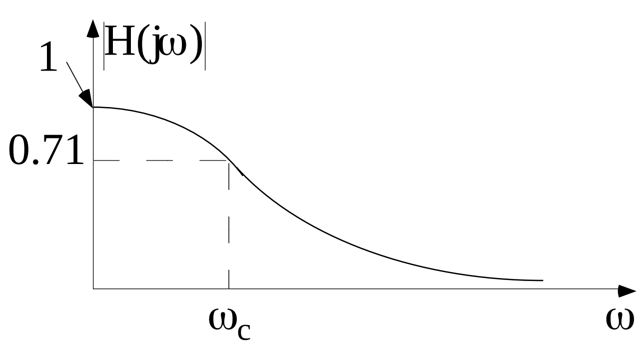
## Filtro paso bajo constituido por un circuito RL serie

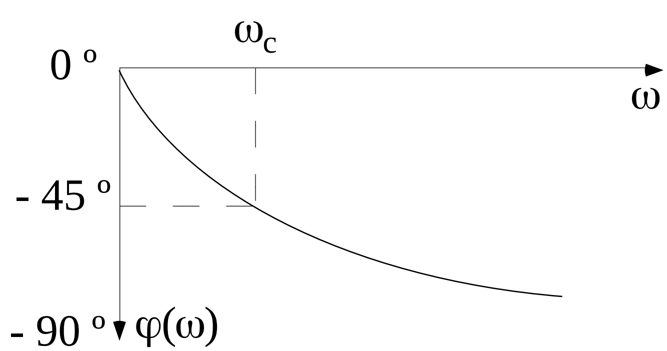
Circuito aproximado $\omega \to 0$ rad/s | Circuito original | Circuito aproximado $\omega \to \infty$ rad/s




$$H(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{R/L}{s + R/L} \Rightarrow H(j\omega) = [H(s)]_{s=j\omega} = \frac{R/L}{s + R/L} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |H(j\omega)| = \frac{R/L}{\sqrt{\omega^2 + (R/L)^2}}, \ \varphi(\omega) = -\operatorname{arctg}\left(\frac{\omega L}{R}\right)$$

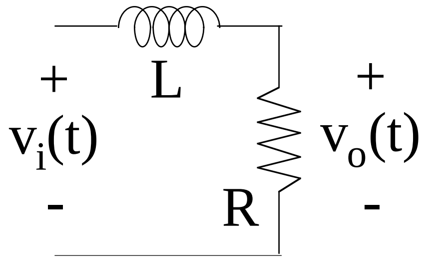



$$|H(j\omega)|_{max} = 1 \Rightarrow |H(j\omega_c)| = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \omega_c = \frac{R}{L}$$

# Resumen de filtros paso bajo elementales

**Paso bajo**
**RL serie**



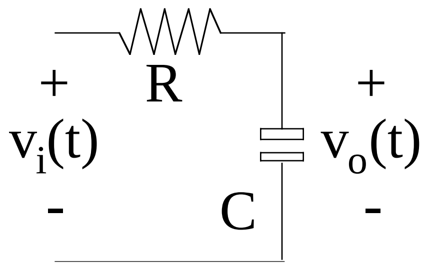

$$\omega_c = R/L$$

$$H(s) = \frac{\omega_c}{s + \omega_c}$$

$$|H(j\omega)| = \frac{\omega_c}{\sqrt{\omega^2 + \omega_c^2}}$$

$$\varphi(\omega) = -\operatorname{arctg}\frac{\omega}{\omega_c}$$

**Paso bajo**
**RC serie**




$$\omega_c = 1/(RC)$$

$$H(s) = \frac{\omega_c}{s + \omega_c}$$

$$|H(j\omega)| = \frac{\omega_c}{\sqrt{\omega^2 + \omega_c^2}}$$

$$\varphi(\omega) = -\operatorname{arctg}\frac{\omega}{\omega_c}$$

**Observaciones**

Las dos características de transferencia son de la forma genérica

$$H(s) = \frac{\omega_c}{s + \omega_c}$$

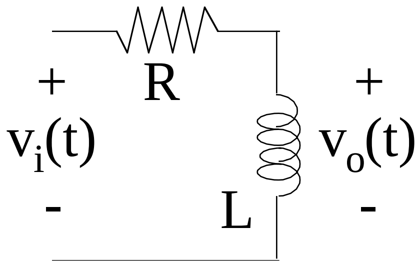
Luego cualquier circuito que tenga una función de transferencia de esta forma se comporta como un filtro paso bajo.

$$\omega_c = 1/\tau$$

siendo $\tau$ la constante de tiempo del circuito (respuesta natural en régimen transitorio).

# Resumen de filtros paso alto elementales

**Paso alto RL serie**



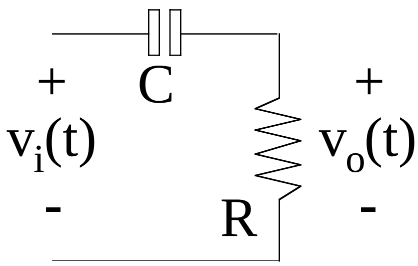

$$\omega_c = R/L$$

$$H(s) = \frac{s}{s + \omega_c}$$

$$|H(j\omega)| = \frac{\omega}{\sqrt{\omega^2 + \omega_c^2}}$$

$$\varphi(\omega) = 90^{o} - \text{arctg}\frac{\omega}{\omega_c}$$

**Paso alto RC serie**




$$\omega_c = 1/(RC)$$

$$H(s) = \frac{s}{s + \omega_c}$$

$$|H(j\omega)| = \frac{\omega}{\sqrt{\omega^2 + \omega_c^2}}$$

$$\varphi(\omega) = 90^{o} - \text{arctg}\frac{\omega}{\omega_c}$$

**Observaciones**

Las dos características de transferencia son de la forma genérica

$$H(s) = \frac{s}{s + \omega_c}$$

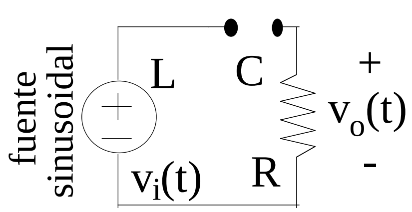
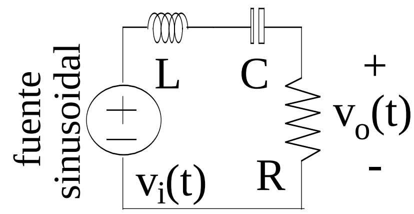
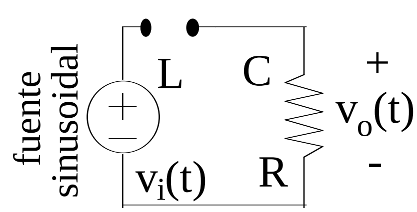
Luego cualquier circuito que tenga una función de transferencia de esta forma se comporta como un filtro paso alto.

$$\omega_c = 1/\tau$$

siendo $\tau$ la constante de tiempo del circuito (respuesta natural en régimen transitorio).

En circuitos RC (RL) constituidos por los mismos elementos la frecuencia de corte siempre tiene el mismo valor, independientemente de que el filtro sea paso alto o paso bajo.

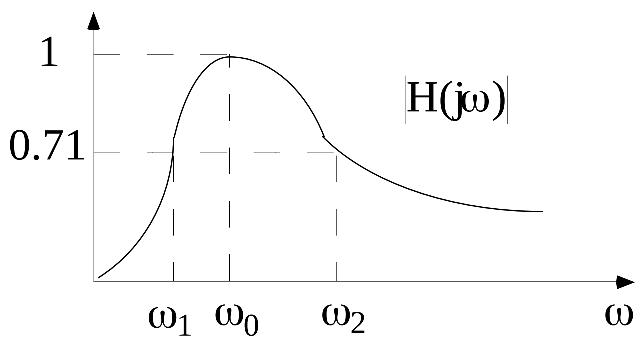
# Filtro paso banda constituido por un circuito RLC serie

| Circuito aproximado $\omega \to 0$ rad/s | Circuito original | Circuito aproximado $\omega \to \infty$ rad/s |
|---|---|---|
|  |  |  |

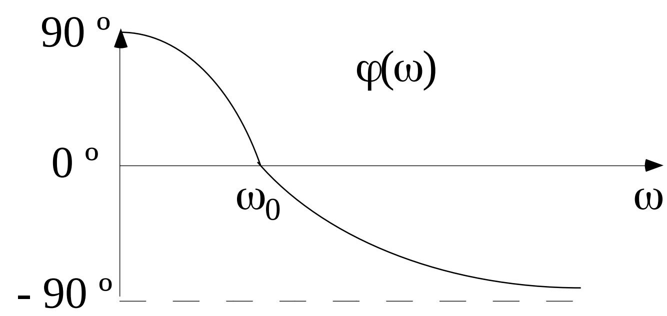


$$H(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{(R/L)s}{s^2 + (R/L)s + 1/(LC)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |H(j\omega)| = \frac{\omega(R/L)}{\sqrt{[1/(LC) - \omega^2]^2 + [\omega(R/L)]^2}}, \ \varphi(\omega) = 90^{\circ} - \mathrm{arctg}\left[\frac{\omega(R/L)}{1/(LC) - \omega^2}\right]$$









**Frecuencia central o de resonancia**

$$\omega = \omega_0 \Rightarrow |H(j\omega_0)| = \mathrm{Max}\{|H(j\omega)|\} = |H(j\omega)|_{max}$$

La función de transferencia es real

$$\omega_0 = \sqrt{\omega_1 \omega_2}$$

**Frecuencias de corte**

$$\omega = \omega_1 \Rightarrow |H(j\omega_1)| = \frac{|H(j\omega)|_{max}}{\sqrt{2}} = |H(j\omega_2)| \Leftarrow \omega_2 = \omega$$

**Ancho de banda**

$$BW = \omega_2 - \omega_1$$

**Factor de calidad**

$$Q = \omega_0 / BW$$

# Circuitos en régimen transitorio y en régimen sinusoidal

Si el circuito de la transparencia anterior está sometido a una excitación continua en lugar de estar sometido a una excitación sinusoidal permanente, su comportamiento en régimen transitorio (aplicación o supresión de la excitación en t = 0) está caracterizado por los parámetros

$$\text{Coeficiente de amortiguamiento (frecuencia de Neper): } \alpha = \frac{R}{2L}$$

$$\text{Frecuencia de resonancia: } \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Relacionando ambos regímenes puede llegarse a la conclusión de que

$$BW = 2\alpha$$

Teniendo en cuenta que

$$Q = \frac{\omega_0}{BW}$$

y que la respuesta en régimen transitorio puede ser subamortiguada, sobreamortiguada o crítica, estando la frontera entre las dos primeras definida por la relación

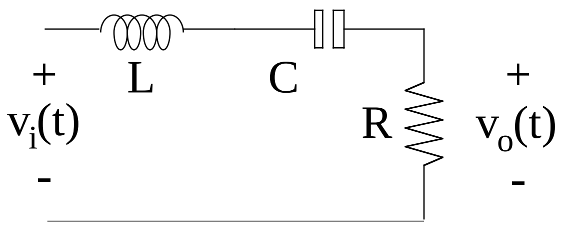
$$\omega_0^2 = \alpha^2 \Rightarrow Q = 0.5$$

**Circuito con respuesta subamortiguada en régimen transitorio** $\Rightarrow$ **Circuito con banda estrecha y aguda (Q alto)**

**Circuito con respuesta sobreamortiguada en régimen transitorio** $\Rightarrow$ **Circuito con gran ancho de banda (Q bajo)**

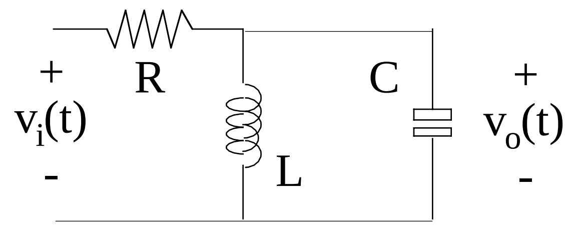
# Resumen de filtros paso banda elementales

**Paso banda RLC serie**




$$\tau = L/R$$

**Paso banda RLC paralelo**




$$\tau = RC$$

$$H(s) = \frac{s/\tau}{s^2 + s/\tau + \omega_0^2}$$

$$|H(j\omega)| = \frac{\omega/\tau}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\omega/\tau)^2}}$$

$$\varphi(\omega) = 90\,^{o} - \mathrm{arctg}\frac{\omega/\tau}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

$$\omega_1 = -\frac{1}{2\tau} + \sqrt{\left(\frac{1}{2\tau}\right)^2 + \omega_0^2}$$

$$\omega_1 = \frac{1}{2\tau} + \sqrt{\left(\frac{1}{2\tau}\right)^2 + \omega_0^2}$$

$$\omega_0 = \sqrt{\omega_1\omega_2} = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

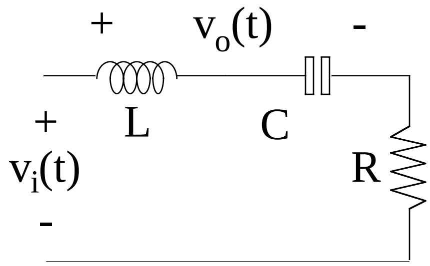
$$BW = \omega_2 - \omega_1 = 1/\tau$$

$$Q = \frac{\omega_0}{BW} = \sqrt{\frac{\tau}{RC}}$$

$$Q = \frac{\omega_0}{BW} = \sqrt{\frac{R\tau}{L}}$$

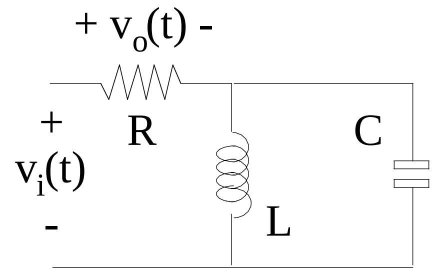
# Resumen de filtros de banda eliminada elementales

## Banda eliminada RLC serie




$$\tau = L/R$$

## Banda eliminada RLC paralelo




$$\tau = RC$$

$$H(s) = \frac{s^2 + \omega_0^2}{s^2 + s/\tau + \omega_0^2}$$

$$|H(j\omega)| = \frac{\left|\omega_0^2 - \omega^2\right|}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\omega/\tau)^2}}$$

$$\varphi(\omega) = -\operatorname{arctg}\frac{\omega/\tau}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

$$\omega_1 = -\frac{1}{2\tau} + \sqrt{\left(\frac{1}{2\tau}\right)^2 + \omega_0^2}$$

$$\omega_1 = \frac{1}{2\tau} + \sqrt{\left(\frac{1}{2\tau}\right)^2 + \omega_0^2}$$

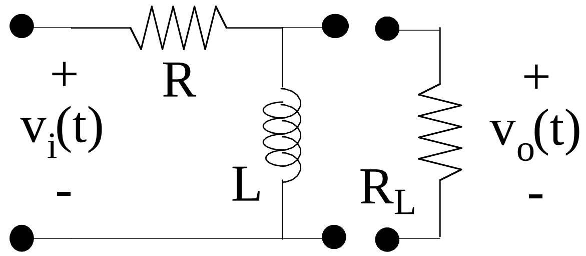
$$\omega_0 = \sqrt{\omega_1\omega_2} = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$$BW = \omega_2 - \omega_1 = 1/\tau$$

$$Q = \frac{\omega_0}{BW} = \sqrt{\frac{\tau}{RC}}$$

$$Q = \frac{\omega_0}{BW} = \sqrt{\frac{R\tau}{L}}$$

# Ejemplo 1

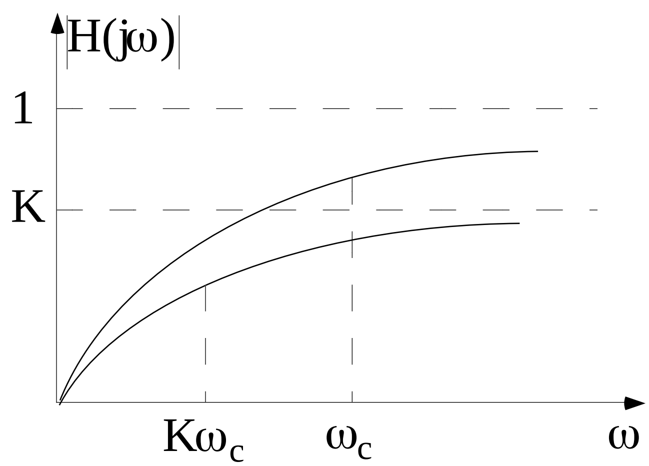



Se desea comprobar el efecto de conectar una carga resistiva a la salida de un filtro paso alto constituido por un circuito RL serie.

Teniendo en cuenta que el circuito se comporta como un divisor de tensión, su función de transferencia es

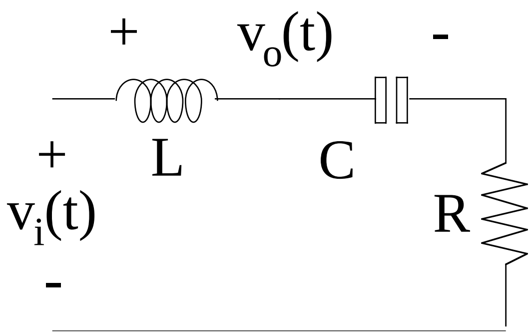
$$H(s) = \frac{V_0(s)}{V_i(s)} = \frac{\dfrac{R_L sL}{R_L + sL}}{R + \dfrac{R_L sL}{R_L + sL}} = \frac{\left(\dfrac{R_L}{R + R_L}\right)s}{s + \left(\dfrac{R_L}{R + R_L}\right)\dfrac{R}{L}} = \frac{Ks}{s + \omega_{cL}}$$

$$K = \frac{R_L}{R + R_L},\ \omega_{cL} = K\omega_c,\ \omega_c = \frac{R}{L}$$




Es decir, y puesto que K < 1,
la presencia de la carga no altera
el comportamiento cualitativo del circuito
(sigue siendo un filtro paso alto),
pero disminuye el máximo
del módulo de la función de transferencia
y la frecuencia de corte.

# Ejemplo 2




Se desea diseñar un filtro de banda eliminada con la estructura mostrada en la figura.
La frecuencia central y el ancho de banda son, respectivamente, 750 y 250 Hz.
La capacidad vale 100 nF.

Se pretende calcular los valores de R y L, y los de las frecuencias límites de la banda eliminada.

$$BW = \omega_2 - \omega_1 = 2\pi \times 250 = \frac{1}{\tau} \Rightarrow \tau = 0.64 \text{ ms}$$

$$Q = \frac{\omega_0}{BW} = \sqrt{\frac{\tau}{RC}} \Rightarrow R = \left(\frac{BW}{\omega_0}\right)^2 \frac{\tau}{C} = \left(\frac{2\pi \times 250}{2\pi \times 750}\right)^2 \frac{0.64 \times 10^{-3}}{100 \times 10^{-9}} = 710\ \Omega$$

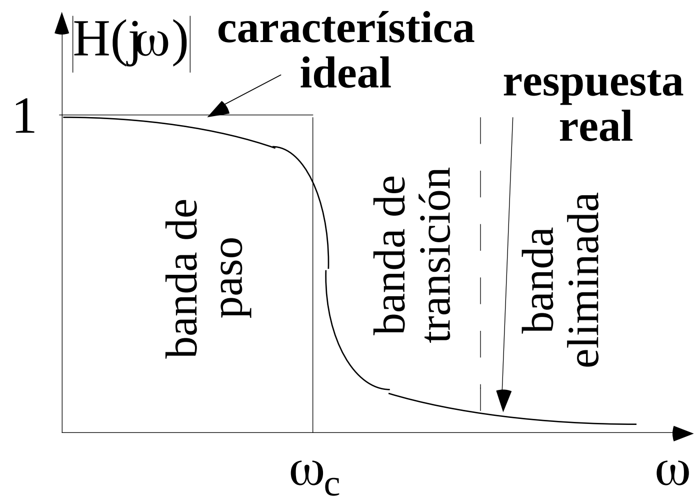
$$L = R\tau = 454 \text{ mH}$$

$$\omega_1 = -\frac{1}{2\tau} + \sqrt{\left(\frac{1}{2\tau}\right)^2 + \omega_0^2} = 4 \text{ krad/s}$$

$$\omega_2 = \omega_1 + BW = 5.57 \text{ krad/s}$$

# Filtros reales

Ningún filtro real presenta una característica de transferencia ideal, sino otra (respuesta) que se aproxima más o menos a aquélla.

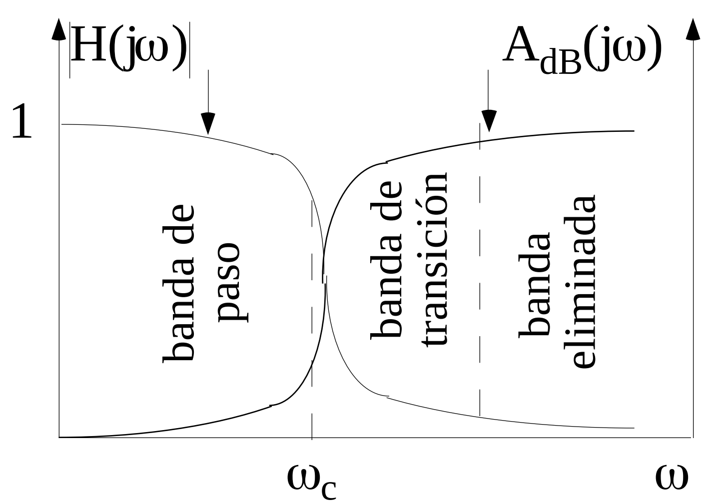



**Ejemplo de filtro paso bajo real.**

Las frecuencias a la entrada son transferidas de distinta forma a la salida, y algunas frecuencias no deseadas están presentes a la salida.

## Caracterización matemática de un filtro real

Un filtro puede representarse mediante su característica de transferencia, o indicando su función de atenuación.




**Atenuación**

$$A_{dB}(j\omega) = -20\log|H(j\omega)|\ \mathrm{dB}$$

$$|H(j\omega)| = 1 \Rightarrow A_{dB} = 0\ \mathrm{dB}$$

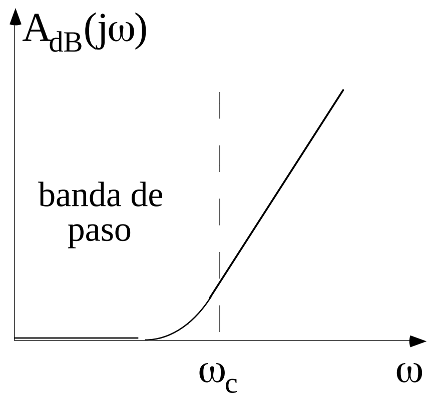
$$|H(j\omega)| = 0.5 \Rightarrow A_{dB} = 6\ \mathrm{dB}$$

$$|H(j\omega)| = 0.01 \Rightarrow A_{dB} = 40\ \mathrm{dB}$$

# Tipos de respuestas

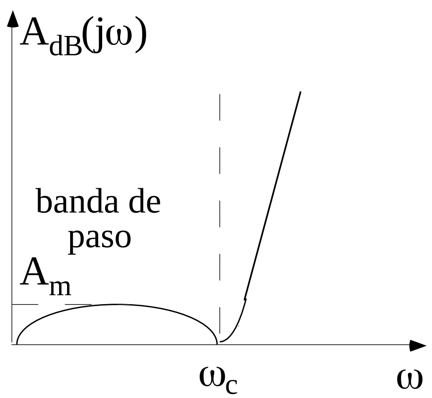
Ejemplos de respuestas para filtros paso bajo
(para otros tipos de filtros se aplicarían consideraciones similares).

Hay muchos tipos posibles de respuestas
(sólo se considerarán la Butterworth y la Chebyshev).



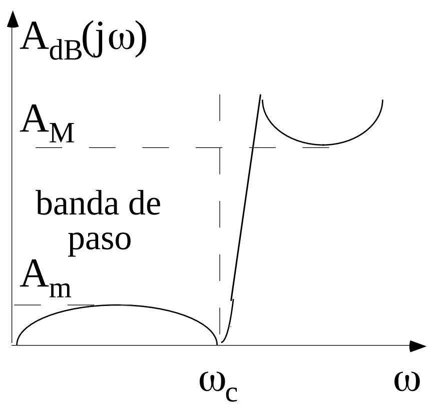

## Respuesta Butterworth

La atenuación es mínima en la banda de paso,
pero crece lentamente fuera de ella.




## Respuesta Chebyshev

La atenuación crece más rápidamente
fuera de la banda de paso,
pero hay cierta atenuación (rizado) en ésta,
con un valor máximo $A_m$.




## Respuesta Cauer (elíptica)

La atenuación crece todavía más rápidamente
fuera de la banda de paso,
pero hay cierta atenuación (rizado) en esa zona,
con un valor mínimo $A_M$.

# Procedimiento de diseño de filtros

1. **Seleccionar el tipo de filtro**
   (paso bajo, paso alto, paso banda, de banda eliminada).

2. **Seleccionar el tipo de respuesta**
   (Butterworth, Chebyshev).

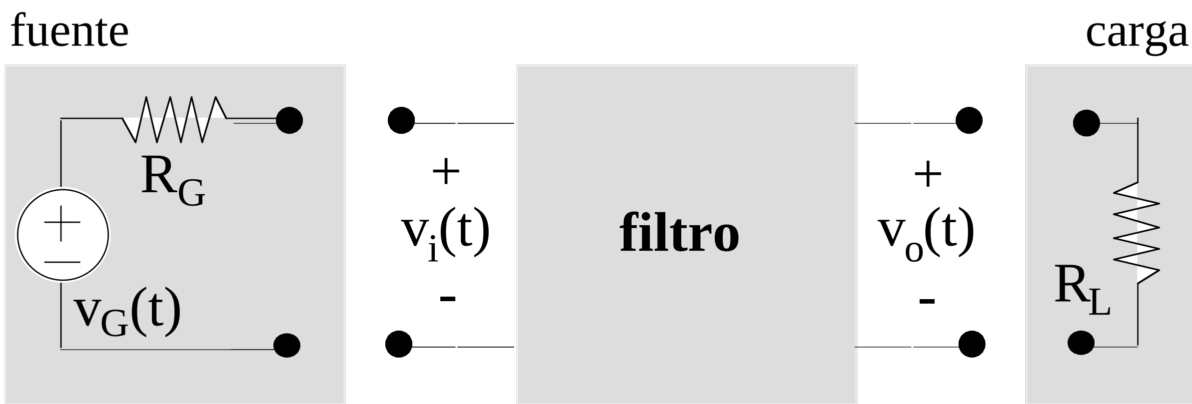
3. **Especificar las características del filtro**
   (frecuencia de corte, frecuencias límites, frecuencia central,
   atenuación máxima en la banda de paso,
   atenuación mínima fuera de la banda de paso,
   atenuación a una frecuencia dada fuera de la banda de paso).

4. **Diseño de un filtro paso bajo normalizado**:
   -Cálculo del número de secciones que constituyen el filtro.
   -Cálculo de los elementos pasivos de cada sección.

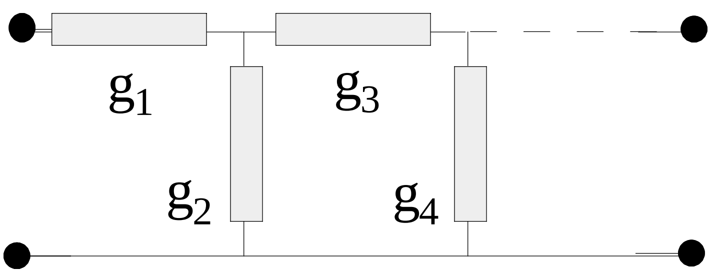
5. **Escalado del prototipo de filtro paso bajo normalizado**
   (transformar cada elemento del prototipo
   en los elementos pasivos necesarios para tener el filtro deseado).

# Prototipo de filtro paso bajo normalizado

## Esquema del circuito a considerar

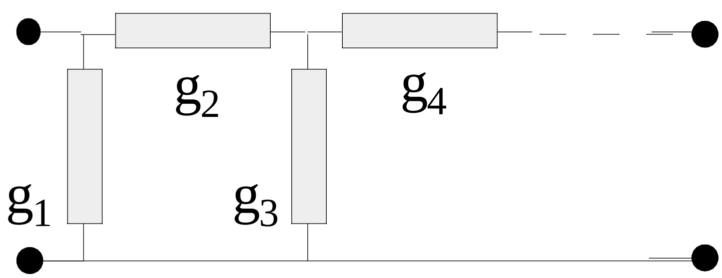



## Esquema del filtro




$R_G \leq R_L$

El filtro empieza con un elemento en serie




$R_G \geq R_L$

El filtro empieza con un elemento en paralelo

**Objetivo**

-Determinar el valor de n (orden del filtro).

-Determinar los valores de $g_i$ (i = 1, 2, ... , n).

# Datos a considerar

| Tipo de filtro | Respuesta | Datos |
|---|---|---|
| Paso bajo<br>Paso alto | Butterworth<br>Chebyshev | $\omega_c$: frecuencia de corte<br>$\omega_p$: una frecuencia en la banda de paso<br>$\omega_s$: una frecuencia en la banda rechazada<br>$A_{max}$(dB): atenuación máxima tolerada en la banda de paso; se especifica para $\omega = \omega_p$<br>$A_{min}$(dB): atenuación mínima exigida en la banda eliminada; se especifica para $\omega = \omega_s$ |

Para la respuesta Butterworth, ha de hacerse siempre

$$\omega_p = \omega_c$$

En el caso de respuesta Butterwrth se supone en todo momento que la atenuación correspondiente a la frecuencia de corte es $A_{max}$ = 3 dB.

De lo contrario, algunas de las fórmulas que siguen a continuación no son válidas.

| **Tipo de filtro** | **Respuesta** | **Datos** |
| --- | --- | --- |
| Paso banda<br>Banda eliminada | Butterworth<br>Chebyshev | $\omega_p$: una frecuencia en la banda de paso<br>$\omega_s$: una frecuencia en la banda rechazada<br>$A_{max}$(dB): atenuación máxima tolerada en la banda de paso; se especifica para $\omega = \omega_p$<br>$A_{min}$(dB): atenuación mínima exigida en la banda eliminada; se especifica para $\omega = \omega_s$<br>frecuencia central: $\omega_0 = \sqrt{\omega_1 \omega_2}$<br>ancho de banda: $BW = \omega_2 - \omega_1$<br>ancho de banda relativo: $bw = \frac{\omega_2 - \omega_1}{\omega_0}$ |

En el caso de respuesta Butterwrth se supone en todo momento que las atenuaciones correspondientes a las frecuencias extremas de la banda son $A_{max}$ = 3 dB.

De lo contrario, algunas de las fórmulas que siguen a continuación no son válidas.

# Normalización de frecuencias

Puesto que se trata de diseñar un prototipo de filtro paso bajo,
hay que normalizar las frecuencias de cualquier otro filtro
para que ésta pueda ser tratado como paso bajo.

| **Filtro normalizado** | **Filtro paso alto** | **Filtro paso banda** | **Filtro de banda eliminada** |
|---|---|---|---|
| $\left(\frac{\omega_s}{\omega_p}\right)_{norm}$ | $\frac{\omega_p}{\omega_s}$ | $\frac{1}{bw}\left(\frac{\omega_s}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega_s}\right)$ | $\frac{bw}{\frac{\omega_s}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega_s}}$ |

Para la respuesta Butterworth, ha de hacerse siempre $\omega_p = \omega_c$

# Cálculo del orden del filtro

| **Orden** | **Respuesta Butterworth** | **Respuesta Chebyshev** |
|---|---|---|
| n | $a_{min} = 10^{A_{min}/10} - 1$ | $a_{min} = 10^{A_{min}/10} - 1$ |
| | $a_{max} = 10^{A_{max}/10} - 1$ | $a_{max} = 10^{A_{max}/10} - 1$ |
| | $n = \frac{\log(a_{min}/a_{max})}{2\log(\omega_s/\omega_c)_{norm}}$ | $n = \frac{\operatorname{arccosh}\sqrt{a_{min}/a_{max}}}{\operatorname{arccosh}(\omega_s/\omega_p)_{norm}}$ |

Si el resultado del cálculo no es un número entero,
se elige para n el entero inmediatamente superior a dicho resultado
(las especificaciones se cumplen por exceso).

# Cálculo de la atenuación

Conocidos el tipo, la respuesta y el orden del filtro,
es posible determinar la atenuación que introduce el filtro a cualquier frecuencia.

| Respuesta Butterworth | Respuesta Chebyshev |
|---|---|
| $A(dB) = 10\log\left[1 + \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)_{norm}^{2n}\right]$ | $\omega < \omega_c \Rightarrow A(dB) = 10\log\left\{1 + a_{max}\cos^2\left[n\ \arccos\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)_{norm}\right]\right\}$ <br> $\omega > \omega_c \Rightarrow A(dB) = 10\log\left\{1 + a_{min}\cosh^2\left[n\ \operatorname{arccosh}\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)_{norm}\right]\right\}$ |

Para calcular $(\omega/\omega_c)_{norm}$
se utilizan las expresiones del apartado **Normalización de frecuencias**
sustituyendo $\omega_s$ por $\omega$.

# Cálculo de los elementos del prototipo normalizado

## Respuesta Butterworth (fórmulas de Bossé)

*Caso general*

$$K = \frac{4R_G R_L}{(R_G + R_L)^2} \leq 1 \Rightarrow 0 \leq (R_G - R_L)^2$$

La condición se cumple siempre.

$$\alpha = (1 - K)^{1/(2n)}$$

$$b_i = 1 + \alpha^2 - 2\alpha\cos\frac{i\pi}{n}, \; i = 1, 2, \dots , n$$

$$x_i = \operatorname{sen}\left(\frac{2i - 1}{2n}\pi\right), \; i = 1, 2, \dots , n$$

$$g_1 = \frac{2x_1}{1 - \alpha}$$

$$g_i = \frac{4x_{i-1}x_i}{b_{i-1}g_{i-1}}, \; i = 2, 3, \dots , n$$

*Caso particular (fórmulas de Bennet)*

$$R_G = R_L \Rightarrow K = 1 \Rightarrow g_i = 2\operatorname{sen}\left(\frac{2i - 1}{2n}\pi\right), \; i = 1, 2, \dots , n$$

## Respuesta Chebyshev (fórmulas de Takahasi)

*Caso general*

$$n \text{ impar} \Rightarrow K = \frac{4R_G R_L}{(R_G + R_L)^2} \leq 1 \Rightarrow 0 \leq (R_G - R_L)^2$$

Esta condición se cumple siempre.

$$n \text{ par} \Rightarrow K = \frac{4R_G R_L}{(R_G + R_L)^2}(1 + a_{max}) \leq 1 \Rightarrow 4R_G R_L a_{max} \leq (R_G - R_L)^2$$

Esta condición no se cumple siempre.
En particular, no es posible obtener filtros de orden par con respuesta Chebyshev en los que las resistencias de fuente y de carga sean iguales.

$$\alpha = \frac{1}{n}\operatorname{arcsenh}\left(\sqrt{\frac{1}{a_{max}}}\right) \qquad \hat{\alpha} = \frac{1}{n}\operatorname{arcsenh}\left(\sqrt{\frac{1 - K}{a_{max}}}\right)$$

$$b_i = \operatorname{senh}^2\alpha + \operatorname{senh}^2\hat{\alpha} + \operatorname{sen}^2\frac{i\pi}{n} - 2\operatorname{senh}(\alpha)\operatorname{senh}(\hat{\alpha})\cos\frac{i\pi}{n},\ i = 1, 2, ..., n$$

$$x_i = \operatorname{sen}\left(\frac{2i - 1}{2n}\pi\right),\ i = 1, 2, ... , n$$

$$g_1 = \frac{2x_1}{\operatorname{senh}(\alpha) - \operatorname{senh}(\hat{\alpha})}$$

$$g_i = \frac{4x_{i-1}x_i}{b_{i-1}g_{i-1}},\ i = 2, 3, ... , n$$

*Caso particular*

$$K = 1$$

Esta condición implica que las resistencias de fuente y de carga son iguales
en el caso de un filtro de orden impar,
y que son distintas en el caso de un filtro de orden par.

$$\alpha = \frac{1}{n}\operatorname{arcsenh}\left(\sqrt{\frac{1}{a_{max}}}\right)$$

$$b_i = \operatorname{senh}^2\alpha + \operatorname{sen}^2\frac{i\pi}{n},\ i = 1, 2, ..., n$$

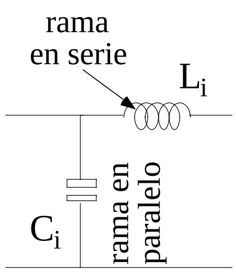
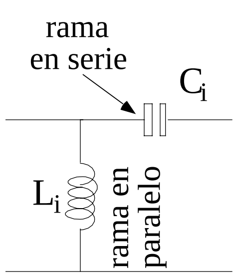
$$x_i = \operatorname{sen}\left(\frac{2i - 1}{2n}\pi\right),\ i = 1, 2, ... , n$$

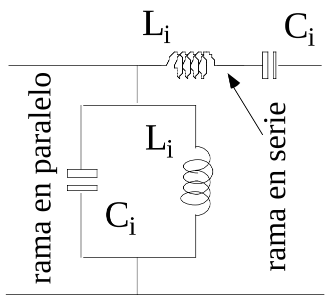
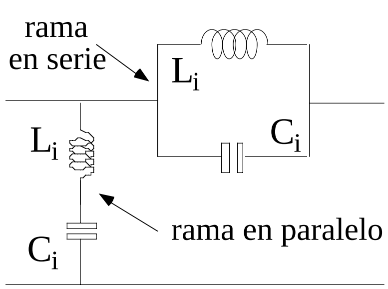
$$g_1 = \frac{2x_1}{\operatorname{senh}(\alpha)}$$

$$g_i = \frac{4x_{i-1}x_i}{b_{i-1}g_{i-1}},\ i = 2, 3, ... , n$$

# Obtención de los elementos del filtro

Se trata de convertir cada elemento $g_i$ del prototipo normalizado
en una determinada combinación de inductancias y capacidades con ciertos valores.
Las reglas de conversión de los elementos del prototipo en elementos reales
son las que se exponen seguidamente.

| **Tipo** | **Esquema** | **Fórmulas de conversión** |
|---|---|---|
| Paso bajo |  | Ramas en serie con la línea: $$L_i = \frac{R_G g_i}{\omega_c}$$ Ramas en paralelo con la línea: $$C_i = \frac{g_i}{R_G \omega_c}$$ |
| Paso alto |  | Ramas en serie con la línea: $$C_i = \frac{1}{R_G g_i \omega_c}$$ Ramas en paralelo con la línea: $$L_i = \frac{R_G}{g_i \omega_c}$$ |

| Tipo | Esquema | Fórmulas de conversión |
|---|---|---|
| Paso banda |  | Ramas en serie con la línea:<br>$L_i = \dfrac{R_G g_i}{bw\omega_0},\ C_i = \dfrac{bw}{R_G g_i \omega_0}$<br>Ramas en paralelo con la línea:<br>$L_i = \dfrac{R_G bw}{g_i \omega_0},\ C_i = \dfrac{g_i}{bwR_G\omega_0}$ |
| Banda eliminada |  | Ramas en serie con la línea:<br>$L_i = \dfrac{R_G g_i bw}{\omega_0},\ C_i = \dfrac{1}{bwR_G g_i \omega_0}$<br>Ramas en paralelo con la línea:<br>$L_i = \dfrac{R_G}{bwg_i\omega_0},\ C_i = \dfrac{bwg_i}{R_G\omega_0}$ |

# Ejemplo 1

Se desea diseñar un filtro paso alto con respuesta Butterworth,
que ha de insertarse entre dos resistencias de 50 Ω.
La frecuencia de corte del filtro ha de ser 3 krad/s,
y para ella la atenuación será 3 dB.
Para una frecuencia de 1 krad/s, la atenuación mínima ha de ser 30 dB.

$$a_{min} = 10^{A_{min}/10} - 1 = 10^{30/10} - 1 = 999 \qquad a_{max} = 10^{A_{max}/10} - 1 = 10^{3/10} - 1 = 1$$

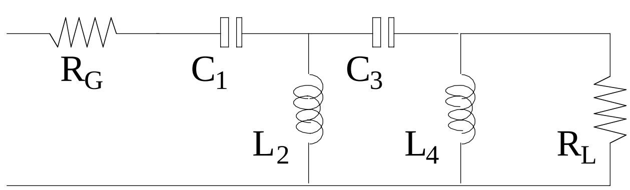
$$\left(\frac{\omega_s}{\omega_p}\right)_{norm} = \frac{\omega_p}{\omega_s} = \frac{3 \times 10^3 \text{ rad/s}}{10^3 \text{ rad/s}} = 3$$

$$\frac{\log(a_{min}/a_{max})}{2\log(\omega_s/\omega_p)_{norm}} = 3.14 \Rightarrow n = 4$$

Ya que $R_G = 50\ \Omega = R_L$, puede empezarse el filtro con un elemento en serie o en paralelo.
Empezando con un elemento en serie, se tiene

$$R_G = 50\ \Omega = R_L \Rightarrow K = 1 \Rightarrow g_i = 2\text{sen}\left(\frac{2i - 1}{2n}\pi\right),\ i = 1, 2, \ldots, n$$

| $i$ | $g_i$ | $C_i = \frac{1}{R_G g_i \omega_c}$ | $L_i = \frac{R_G}{g_i \omega_c}$ |
|---|---|---|---|
| 1 | 0.765 | $C_1 = 8.7\ \mu F$ | |
| 2 | 1.85 | | $L_2 = 9$ mH |
| 3 | 1.85 | $C_3 = 3.6\ \mu F$ | |
| 4 | 0.765 | | $L_4 = 21.8$ mH |



# Ejemplo 2

Se desea diseñar un filtro paso banda con respuesta Butterworth,
que ha de insertarse entre dos resistencias de 50 Ω.
Las frecuencias extremas del filtro son 40 y 160 krad/s,
y para ellas la atenuación será 3 dB.
Para una frecuencia de 240 krad/s, la atenuación mínima ha de ser 20 dB.

$$a_{min} = 10^{A_{min}/10} - 1 = 10^{20/10} - 1 = 99 \qquad a_{max} = 10^{A_{max}/10} - 1 = 10^{3/10} - 1 = 1$$

$$BW = \omega_2 - \omega_1 = 160\text{ krad/s} - 40\text{ krad/s} = 120\text{ krad/s}$$

$$\omega_0 = \sqrt{\omega_1\omega_2} = 80\text{ krad/s} \qquad bw = \frac{BW}{\omega_0} = 1.5$$

$$\left(\frac{\omega_s}{\omega_p}\right)_{norm} = \frac{1}{bw}\left(\frac{\omega_s}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega_s}\right) = \frac{1}{1.5}\left(\frac{240 \times 10^3\text{ rad/s}}{80 \times 10^3\text{ rad/s}} - \frac{80 \times 10^3\text{ rad/s}}{240 \times 10^3\text{ rad/s}}\right) = 1.78$$

$$\frac{\log(a_{min}/a_{max})}{2\log(\omega_s/\omega_p)_{norm}} = 4 \Rightarrow n = 4$$

Ya que $R_G = 50\ \Omega = R_L$, puede empezarse el filtro con un elemento en serie o en paralelo.
Empezando con un elemento en paralelo, se tiene

$$R_G = 50\ \Omega = R_L \Rightarrow K = 1 \Rightarrow g_i = 2\text{sen}\left(\frac{2i - 1}{2n}\pi\right),\ i = 1, 2, \ldots, n$$

| i | $g_i$ | $L_{serie} = \frac{R_G g_i}{bw\omega_0}$ | $C_{serie} = \frac{bw}{R_G g_i \omega_0}$ | $L_{par} = \frac{R_G bw}{g_i \omega_0}$ | $C_{par} = \frac{g_i}{bw R_G \omega_0}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0.765 | | | $L_1 = 1.23$ mH | $C_1 = 0.13$ µF |
| 2 | 1.85 | $L_2 = 0.78$ mH | $C_2 = 0.2$ µF | | |
| 3 | 1.85 | | | $L_3 = 0.51$ mH | $C_3 = 0.31$ µF |
| 4 | 0.765 | $L_4 = 0.32$ mH | $C_4 = 0.49$ µF | | |