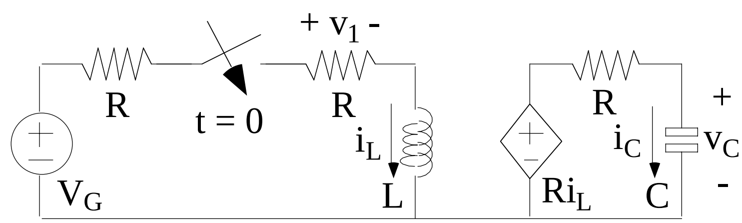
PROBLEMA 1



El circuito de la figura, en el que la fuente independiente es continua y son datos las características de todos los elementos, ha permanecido mucho tiempo sin cambios antes del cierre del interruptor; una vez producido éste, el circuito ya no experimenta más cambios. Hallad:

1 (1.2 puntos) v_1, v_C, i_L e i_C en los instantes $t = 0^-$, $t = 0^+$ y $t = \infty$.

2 (0.8 puntos) Las ecuaciones diferenciales que caracterizan la evolución de v_C e i_L para $t \geq 0$.

3 (0.5 puntos) La variación de energía en la inductancia entre $t = 0$ y $t = \infty$.

A lo largo del problema utilizamos la siguiente nomenclatura:

$$i_C = C\frac{dv_C}{dt},\ v_L = L\frac{di_L}{dt}$$

1 Para $t < 0$ la inductancia es un cortocircuito y la capacidad es un circuito abierto. Por tanto,

$$i_L(0^-) = 0\ \text{A} \rightarrow v_1(0^-) = Ri_L(0^-) = 0\ \text{V}$$

$$i_C(0^-) = 0\ \text{A} \rightarrow v_C(0^-) = Ri_L(0^-) = 0\ \text{V}$$

La corriente en la inductancia y la tensión en la capacidad no pueden cambiar bruscamente. Por tanto,

$$v_C(0^+) = v_C(0^-) = 0\ \text{V},\ \ i_L(0^+) = i_L(0^-) = 0\ \text{A}$$

$$v_1(0^+) = Ri_L(0^+) = 0\ \text{V},\ \ i_C(0^+) = \frac{Ri_L(0^+) - v_C(0^+)}{R} = 0\ \text{A}$$

Para $t = \infty$ la inductancia es un cortocircuito y la capacidad es un circuito abierto. Por tanto,

$$v_L(\infty) = 0\ \text{V} \rightarrow i_L(\infty) = \frac{V_G - v_L(\infty)}{R + R} = \frac{V_G}{2R} \rightarrow v_1(\infty) = Ri_L(\infty) = \frac{V_G}{2}$$

$$i_C(\infty) = 0\ \text{A} \rightarrow v_C(\infty) = Ri_L(\infty) = \frac{V_G}{2}$$

2 Para $t > 0$ en la malla que contiene la fuente independiente se verifica

$$V_G = (R + R)\,i_L + v_L = 2Ri_L + L\frac{di_L}{dt} \tag{1}$$

y en la malla que contiene la fuente dependiente se verifica

$$Ri_L = Ri_C + v_C = RC\frac{dv_C}{dt} + v_C \tag{2}$$

Despejando i_L de (2) y sustituyendo el resultado en (1) se obtiene

$$LC\frac{d^2v_C}{dt^2} + \left(2RC + \frac{L}{R}\right)\frac{dv_C}{dt} + 2v_C = V_G \tag{3}$$

(1) y (3) son las ecuaciones diferenciales buscadas.

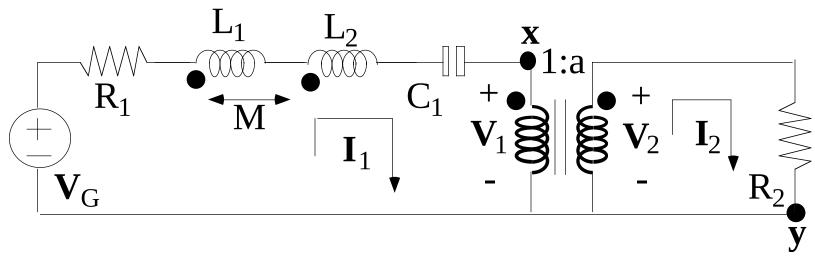
3 Para calcular la energía buscada aplicamos el siguiente razonamiento:

$$w_L = \int_0^\infty p_L(t)dt = \int_0^\infty v_L(t)i_L(t)dt = \int_0^\infty i_L(t)L\frac{di_L(t)}{dt}dt =$$

$$= \frac{L}{2}\left[i_L^2(\infty) - i_L^2(0)\right] = \frac{LV_G^2}{8R^2}$$

PROBLEMA 2

El circuito de la figura, en cuya representación se ha utilizado notación fasorial, funciona en régimen sinusoidal permanente a una frecuencia angular ω.



1 (1 punto) Escribid un sistema algebraico de cuatro ecuaciones que permita obtener $\mathbf{I}_1$, $\mathbf{I}_2$, $\mathbf{V}_1$ y $\mathbf{V}_2$ a partir de los elementos del circuito.

Utilizando los valores $\mathbf{V}_G$ = 4 V, ω = 100 krad/s, R_1 = 1 Ω, R_2 = 4 Ω, L_1 = 40 μH, L_2 = 40 μH, M = 10 μH, C_1 = 1 μF y a = 2,

2 (0.7 puntos) Obtened la expresión temporal de la potencia en L_1.

3 (0.8 puntos) Calculad el equivalente de Thèvenin entre los puntos **x** e **y**. ¿Qué impedancia hay que colocar entre esos dos puntos para que en ella se disipe la máxima potencia media posible?

1 Por mallas,

$$\mathbf{V}_G = \mathbf{I}_1\left(R_1 + j\omega L_1 + j\omega L_2 + \frac{1}{j\omega C_1} + j2\omega M\right) + \mathbf{V}_1,\ \mathbf{V}_2 = \mathbf{I}_2 R_2$$

Por las propiedades del transformador ideal,

$$\mathbf{V}_2 = a\mathbf{V}_1,\ \mathbf{I}_1 = a\mathbf{I}_2$$

2 Reflejando impedancias en el transformador ideal y sustituyendo los datos del enunciado,

$$\mathbf{V}_G = \mathbf{I}_1\left(R_1 + j\omega L_1 + j\omega L_2 + \frac{1}{j\omega C_1} + j2\omega M + \frac{R_2}{a^2}\right) \rightarrow \mathbf{I}_1 = 2\ \text{A} \rightarrow$$

$$\rightarrow i_1(t) = \text{Re}\left\{\mathbf{I}_1 e^{j\omega t}\right\} = 2\cos(\omega t)\ \text{A}\ (\omega = 10^5\ \text{rad/s})$$

$$\mathbf{V}_{L1} = \mathbf{I}_1(j\omega L_1 + j\omega M) = j10\ \text{V} \rightarrow$$

$$\rightarrow v_{L1}(t) = \text{Re}\left\{\mathbf{V}_{L1} e^{j\omega t}\right\} = 10\cos(\omega t + 90\ °)\ \text{V}\ (\omega = 10^5\ \text{rad/s})$$

$$p_{L1}(t) = v_{L1}(t)\, i_1(t) = 20\cos(\omega t)\cos(\omega t + 90\ °)\ \text{W}\ (\omega = 10^5\ \text{rad/s})$$

También,

$$S_{L1} = \frac{\mathbf{V}_{L1}\mathbf{I}_1^*}{2} = j10\ \text{VA} \rightarrow P_{L1} = \text{Re}\left\{S_{L1}\right\} = 0\ \text{W},\ Q_{L1} = \text{Im}\left\{S_{L1}\right\} = 10\ \text{VAR} \rightarrow$$

$$\rightarrow p_{L1}(t) = P_{L1} + P_{L1}\cos(2\omega t) - Q_{L1}\text{sen}(2\omega t) = -10\text{sen}(2\omega t)\ \text{W}\ (\omega = 10^5\ \text{rad/s})$$

3 El nudo **y** puede ser tomado como el de referencia. Por tanto, la tensión entre **x** e **y** es la del primario del transformador ideal. Cuando **x** e **y** están en circuito abierto la situación es la de la figura. En consecuencia, utilizando los valores del apartado anterior,

$$\mathbf{V}_{Th} = \mathbf{V}_{xy} = \mathbf{V}_1 = \frac{\mathbf{I}_1 R_2}{a^2} = 2\ \text{V}$$

Al conectar un cortocircuito entre **x** e **y** circula por él una corriente $\mathbf{I}_N$ (positiva hacia **y**), y la ecuación de la malla que contiene la fuente es

$$\mathbf{V}_G = \mathbf{I}_N\left(R_1 + j\omega L_1 + j\omega L_2 + \frac{1}{j\omega C_1} + j2\omega M\right) \rightarrow \mathbf{I}_N = 4\ \text{A}$$

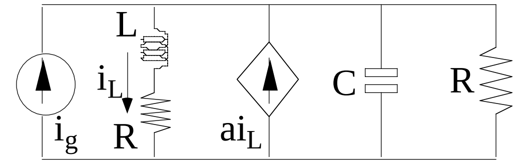
Por tanto,

$$Z_{Th} = \frac{\mathbf{V}_{Th}}{\mathbf{I}_N} = 0.5\ \Omega$$

La impedancia a colocar entre **x** e **y** para obtener la máxima potencia media es

$$Z_L = Z_{Th}^* = 0.5\ \Omega$$

PROBLEMA 3



En el circuito de la figura son datos los valores de R, L, C y a.

Sabiendo que $i_g(t) = I_G\cos(\omega t)$, y siendo I_G dato,

1 (0.5 puntos) Hallad el valor de la impedancia que **ve** la fuente independiente para un valor de ω dado.

2 (0.5 puntos) Hallad los valores a los que tienden el módulo y la fase de la tensión en la fuente dependiente cuando ω tiende a 0 rad/s y cuando ω tiende a ∞ rad/s (supóngase a < 2).

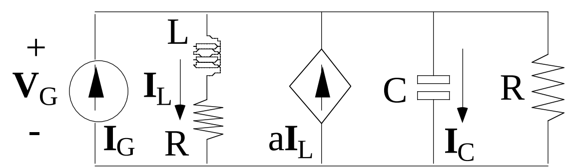
3 (0.75 puntos) Hallad el valor (ω_0) de la frecuencia angular (distinto de 0 rad/s) para el que la impedancia que **ve** la fuente es puramente resistiva. ¿Qué condición han de cumplir los parámetros R, L, C y a para que exista dicha frecuencia angular?

4 (0.5 puntos) Para un valor de ω dado ($\omega \neq \omega_0$) hallad el valor de a que hace que la impedancia **vista** por la fuente sea imaginaria pura.

5 (0.75 puntos) Sabiendo que $i_g(t) = I_D + I_G\cos(\omega_0 t)$, siendo I_D e I_G datos y teniendo ω_0 el valor calculado en el apartado **3**, hallad la potencia en bornas de la capacidad.

---

1 Dado que el circuito funciona en régimen sinusoidal permanente, utilizamos la nomenclatura mostrada en la figura adjunta, con $\mathbf{I}_G = I_G$.



$$\mathbf{I}_G + a\mathbf{I}_L = \frac{\mathbf{V}_G}{R} + \mathbf{V}_G j\omega C + \mathbf{I}_L,\ \mathbf{I}_L = \frac{\mathbf{V}_G}{R + j\omega L} \rightarrow \mathbf{I}_G = \mathbf{V}_G Y = \frac{\mathbf{V}_G}{Z}$$

$$Y = \frac{1}{R} + j\omega C + \frac{1 - a}{R + j\omega L},\ Z = \frac{1}{Y}$$

2 La tensión en la fuente dependiente coincide con la tensión en la fuente independiente ya que ambos elementos están en paralelo; es decir, la tensión buscada es $\mathbf{V}_G$.

$$\omega \rightarrow 0 \text{ rad/s} \Rightarrow Y \rightarrow \frac{2 - a}{R} \Rightarrow \mathbf{V}_G = \frac{\mathbf{I}_G}{Y} \rightarrow \frac{\mathbf{I}_G R}{2 - a}$$

$$\left(\text{módulo de } \mathbf{V}_G \rightarrow \frac{I_G R}{2 - a}, \text{ fase de } \mathbf{V}_G \rightarrow 0\ °\right)$$

$$\omega \rightarrow \infty \text{ rad/s} \Rightarrow Y \rightarrow j\omega C \Rightarrow \mathbf{V}_G = \frac{\mathbf{I}_G}{Y} \rightarrow -j\frac{\mathbf{I}_G}{\omega C}$$

$$\left(\text{módulo de } \mathbf{V}_G \rightarrow \frac{I_G}{\omega C}, \text{ fase de } \mathbf{V}_G \rightarrow -90\ °\right)$$

3 Para hallar el valor pedido efectuamos el siguiente razonamiento:

$$\text{Z resistiva } \to \mathrm{Im}\{Y\} = 0 \to \omega_0 C - \frac{(1-a)\,\omega_0 L}{R^2 + (\omega_0 L)^2} = 0 \to$$

$$\to \omega_0 = \begin{cases} 0 \text{ rad/s (no vale, por el enunciado)} \\ +\sqrt{\dfrac{1-a}{LC} - \dfrac{R^2}{L^2}} \end{cases}$$

Para que exista ω_0 el radical de la última expresión ha de ser > 0.

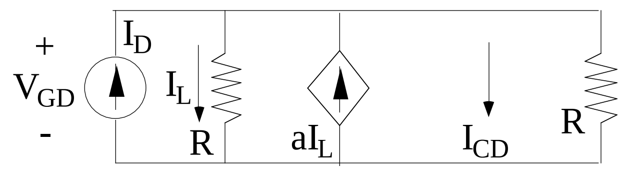
4 Para hallar el valor pedido efectuamos el siguiente razonamiento:

$$\text{Z imaginaria } \to \mathrm{Re}\{Y\} = 0 \to \frac{1}{R} + \frac{(1-a)R}{R^2 + (\omega L)^2} = 0 \to a = 2 + \left(\frac{\omega L}{R}\right)^2$$

5 Dado que hay dos excitaciones diferentes debemos aplicar el principio de superposición.

Continua

La inductancia es un cortocircuito y la capacidad es un circuito abierto.



$$I_{CD} = 0 \text{ A} \to I_D + \frac{aV_{GD}}{R} = V_{GD}\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R}\right) \to V_{GD} = \frac{I_D R}{2-a}$$

Régimen sinusoidal permanente

Utilizamos el circuito considerado en el primer apartado.

$$Y(\omega_0) = \frac{1}{R} + \frac{(1-a)R}{R^2 + (\omega_0 L)^2} \text{ (real)}$$

$$\mathbf{V}_G = \frac{\mathbf{I}_G}{Y(\omega_0)} \to v_{GA}(t) = \mathrm{Re}\{\mathbf{V}_G e^{j\omega_0 t}\} = \frac{I_G}{Y(\omega_0)}\cos(\omega_0 t)$$

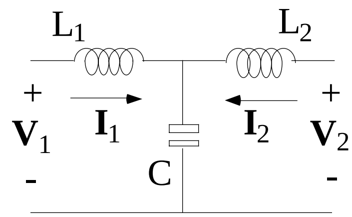
$$\mathbf{I}_C = \mathbf{V}_G j\omega_0 C = \frac{j\mathbf{I}_G \omega_0 C}{Y(\omega_0)} \to i_{CA}(t) = \mathrm{Re}\{\mathbf{I}_C e^{j\omega_0 t}\} = \frac{I_G \omega_0 C}{Y(\omega_0)}\cos(\omega_0 t + 90\,°)$$

Respuesta total

$$i_C(t) = I_{CD} + i_{CA}(t),\ \ v_C(t) = V_{GD} + v_{GA}(t)$$

$$p_C(t) = v_C(t)\, i_C(t) = \left[\frac{I_D R}{2-a} + \frac{I_G}{Y(\omega_0)}\cos(\omega_0 t)\right]\frac{I_G \omega_0 C}{Y(\omega_0)}\cos(\omega_0 t + 90\,°)$$

PROBLEMA 4



El cuadripolo de la figura, en cuya representación se ha utilizado notación fasorial, funciona en régimen sinusoidal permanente a una frecuencia angular ω.

1 (0.5 puntos) ¿Qué condiciones han de cumplirse para que sea simétrico?

2 (1 punto) Se conectan en paralelo dos cuadripolos como el del apartado **1**. Obtened los parámetros de admitancia del cuadripolo resultante. Supóngase $L_1 = L = L_2$ y $\omega L = 1/(\omega C)$.

3 (0.5 puntos) El cuadripolo resultante de la agrupación indicada en el apartado **2** se inserta entre una fuente de tensión (caracterizada por el fasor $\mathbf{V}_G$; lleva asociada una impedancia en serie Z_G) y una impedancia Z_L. Obtened la impedancia de entrada ($Z_i = \mathbf{V}_1/\mathbf{I}_1$) del cuadripolo.

1 En el cuadripolo se tienen las siguientes ecuaciones de mallas:

$$\mathbf{V}_1 = \mathbf{I}_1\left(j\omega L_1 + \frac{1}{j\omega C}\right) + \frac{\mathbf{I}_2}{j\omega C},\ \mathbf{V}_2 = \frac{\mathbf{I}_1}{j\omega C} + \mathbf{I}_2\left(j\omega L_2 + \frac{1}{j\omega C}\right) \tag{1}$$

Comparando estas ecuaciones con las correspondientes a la definición de los parámetros z,

$$\mathbf{V}_1 = \mathbf{I}_1 z_{11} + \mathbf{I}_2 z_{12},\ \mathbf{V}_2 = \mathbf{I}_1 z_{21} + \mathbf{I}_2 z_{22} \tag{2}$$

se tiene

$$z_{11} = j\omega L_1 + \frac{1}{j\omega C},\ z_{12} = \frac{1}{j\omega C} = z_{21},\ z_{22} = j\omega L_2 + \frac{1}{j\omega C} \tag{3}$$

Para que el cuadripolo sea simétrico han de cumplirse las condiciones

$z_{12} = z_{21}$, se cumple siempre; $z_{11} = z_{22} \rightarrow L_1 = L_2$

2 Manipulando las ecuaciones (2) se obtiene

$$\mathbf{I}_1 = \frac{\mathbf{V}_1 z_{22}}{z_{11}z_{22} - z_{12}z_{21}} - \frac{\mathbf{V}_2 z_{12}}{z_{11}z_{22} - z_{12}z_{21}},\ \mathbf{I}_2 = -\frac{\mathbf{V}_1 z_{21}}{z_{11}z_{22} - z_{12}z_{21}} + \frac{\mathbf{V}_2 z_{11}}{z_{11}z_{22} - z_{12}z_{21}} \tag{4}$$

Comparando estas ecuaciones con las correspondientes a la definición de los parámetros de admitancia,

$$\mathbf{I}_1 = \mathbf{V}_1 y_{11} + \mathbf{V}_2 y_{12},\ \mathbf{I}_2 = \mathbf{V}_1 y_{21} + \mathbf{V}_2 y_{22} \tag{5}$$

se tiene

$$y_{11} = \frac{z_{22}}{Z},\ y_{12} = -\frac{z_{12}}{Z},\ y_{21} = -\frac{z_{21}}{Z},\ y_{22} = \frac{z_{11}}{Z},\ Z = z_{11}z_{22} - z_{12}z_{21}$$

Sustituyendo en estas expresiones los datos del enunciado se obtiene

$$z_{11} = 0\ \Omega = z_{22},\ z_{12} = \frac{1}{j\omega C} = z_{21} \rightarrow y_{11} = 0\ \mathrm{S} = y_{22},\ y_{12} = j\omega C = y_{21}$$

En la agrupación en paralelo los parámetros de admitancia del cuadripolo resultante se obtienen de la siguiente forma:

$$\begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2y_{11} & 2y_{12} \\ 2y_{21} & 2y_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0\ \mathrm{S} & j2\omega C \\ j2\omega C & 0\ \mathrm{S} \end{bmatrix} \tag{6}$$

3 El circuito resultante queda caracterizado por las ecuaciones

$$\mathbf{V}_G = \mathbf{I}_1 Z_G + \mathbf{V}_1,\ \mathbf{V}_2 = -\mathbf{I}_2 Z_L;\ \mathbf{I}_1 = \mathbf{V}_1 Y_{11} + \mathbf{V}_2 Y_{12},\ \mathbf{I}_2 = \mathbf{V}_1 Y_{21} + \mathbf{V}_2 Y_{22}$$

A partir de ellas, y teniendo en cuenta (6), se puede deducir que

$$\mathbf{I}_1 = j\mathbf{V}_2 2\omega C = -j\,\mathbf{I}_2 Z_L 2\omega C = \mathbf{V}_1 Z_L (2\omega C)^2 \rightarrow Z_i = \frac{\mathbf{V}_1}{\mathbf{I}_1} = \frac{1}{Z_L(2\omega C)^2}$$