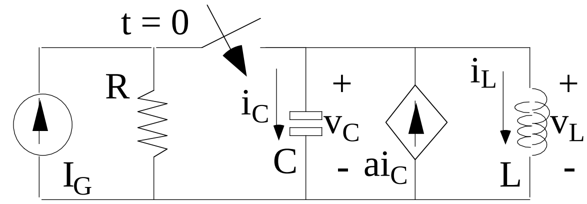
PROBLEMA 1

La fuente independiente es continua y son datos las características de todos los elementos.



El circuito de la figura ha permanecido mucho tiempo sin cambios antes del cierre del interruptor; una vez producido éste, el circuito ya no experimenta más cambios. Hallad:

1 (1.2 puntos) i_C, v_C, i_L y v_L en los instantes $t = 0^-$, $t = 0^+$ y $t = \infty$.

2 (0.8 puntos) Las ecuaciones diferenciales que caracterizan la evolución de v_C e i_L para $t \geq 0$.

3 (0.5 puntos) La variación de energía en la inductancia entre $t = 0$ y $t = \infty$.

A lo largo del problema utilizamos la siguiente nomenclatura:

$$i_C = C\frac{dv_C}{dt},\ v_L = L\frac{di_L}{dt}$$

1 Para $t < 0$ la inductancia es un cortocircuito y la capacidad es un circuito abierto. Por tanto,

$$i_C(0^-) = 0\ A \Rightarrow i_L(0^-) = ai_C(0^-) - i_C(0^-) = 0\ A;\ v_L(0^-) = 0\ V \Rightarrow v_C(0^-) = v_L(0^-) = 0\ V$$

La corriente en la inductancia y la tensión en la capacidad no pueden cambiar bruscamente. Por tanto,

$$v_C(0^+) = v_C(0^-) = 0\ V = v_L(0^+),\ i_L(0^+) = i_L(0^-) = 0\ A$$

$$I_G = \frac{v_C(0^+)}{R} + (1 - a)i_C(0^+) + i_L(0^+) \Rightarrow i_C(0^+) = \frac{I_G}{1 - a}$$

Para $t = \infty$ la inductancia es un cortocircuito y la capacidad es un circuito abierto. Por tanto,

$$i_C(\infty) = 0\ A,\ v_L(\infty) = 0\ V = v_C(\infty),\ i_L(\infty) = I_G - \frac{v_C(\infty)}{R} - (1 - a)i_C(\infty) = I_G$$

2 Para $t > 0$ se verifica

$$I_G = \frac{v_C}{R} + (1 - a)C\frac{dv_C}{dt} + i_L \qquad (1)$$

$$v_C = L\frac{di_L}{dt} \qquad (2)$$

Despejando v_C de (2) y sustituyendo el resultado en (1) se obtiene

$$(1- a)LC\frac{d^2i_L}{dt^2} + \frac{L}{R}\frac{di_L}{dt} + i_L = I_G \qquad (3)$$

Despejando i_L de (1) y sustituyendo el resultado en (2) se obtiene

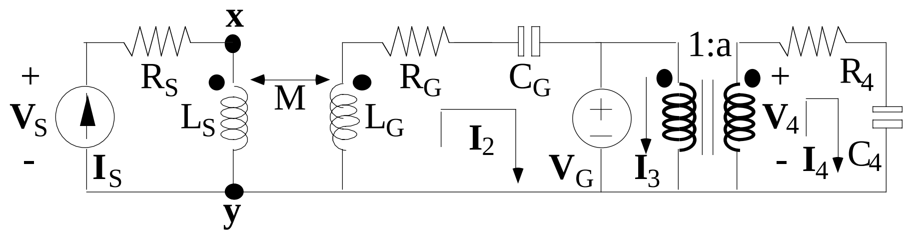
$$(1- a)LC\frac{d^2v_C}{dt^2} + \frac{L}{R}\frac{dv_C}{dt} + v_C = 0 \qquad (4)$$

(3) y (4) son las ecuaciones diferenciales buscadas.

3 Para calcular la energía buscada aplicamos el siguiente razonamiento:

$$w_G = \int_0^\infty p_L(t)dt = \int_0^\infty i_L v_L(t)\,dt = \int_0^\infty i_L L\frac{di_L(t)}{dt}dt = \left[\frac{Li_L^2}{2}\right]_0^\infty = \frac{LI_G^2}{2}$$

PROBLEMA 2



El circuito de la figura, en cuya representación se ha utilizado notación fasorial, funciona en régimen sinusoidal permanente a una frecuencia angular ω.

1 (1 punto) Escribid un sistema algebraico de cinco ecuaciones que permita obtener $\mathbf{I}_2$, $\mathbf{I}_3$, $\mathbf{I}_4$, $\mathbf{V}_S$ y $\mathbf{V}_4$ a partir de los elementos del circuito.

Utilizando los valores $\mathbf{V}_G = -1 + j$ V, $\mathbf{I}_S = 1$ A, $\omega = 100$ krad/s, $R_S = 1\ \Omega$, $R_G = 1\ \Omega$, $R_4 = 1\ \Omega$, $L_S = 20\ \mu$H, $L_G = 20\ \mu$H, $M = 10\ \mu$H, $C_G = 5\ \mu$F, $C_4 = 10\ \mu$F y $a = 2$,

2 (0.7 puntos) Obtened la expresión temporal de la potencia en la fuente de tensión.

3 (0.8 puntos) Calculad el equivalente de Thèvenin entre los puntos **x** e **y**. ¿Qué impedancia hay que colocar entre esos dos puntos para que en ella se disipe la máxima potencia media posible?

---

1 Por mallas,

$$\mathbf{V}_G = \mathbf{I}_S j\omega M - \mathbf{I}_2\left(j\omega L_G + R_G + \frac{1}{j\omega C_G}\right) \tag{1}$$

$$\mathbf{V}_S = \mathbf{I}_S(R_S + j\omega L_S) - \mathbf{I}_2 j\omega M,\ \ \mathbf{V}_4 = \mathbf{I}_4\left(R_4 + \frac{1}{j\omega C_4}\right)$$

Por las propiedades del transformador ideal,

$$\mathbf{V}_4 = a\mathbf{V}_G,\ \mathbf{I}_3 = a\mathbf{I}_4$$

2 Sustituyendo los datos del enunciado, a partir de (1) se obtiene

$$\mathbf{V}_G = \mathbf{I}_S j\omega M - \mathbf{I}_2\left(j\omega L_G + R_G + \frac{1}{j\omega C_G}\right) \rightarrow \mathbf{I}_2 = 1\ \mathrm{A}$$

y reflejando impedancias en el transformador ideal se obtiene

$$\mathbf{V}_G = \frac{\mathbf{I}_3}{a^2}\left(R_4 + \frac{1}{j\omega C_4}\right) \rightarrow \mathbf{I}_3 = -4\ \mathrm{A}$$

$\mathbf{I}_G = \mathbf{I}_3 - \mathbf{I}_2 = -5\ \mathrm{A} = 5_{\angle 180^\circ}\ \mathrm{A} \rightarrow$

$\rightarrow i_G(t) = \mathrm{Re}\{\mathbf{I}_G e^{j\omega t}\} = 5\cos(\omega t + 180^\circ)\ \mathrm{A}\ (\omega = 10^5\ \mathrm{rad/s})$

$\mathbf{V}_G = -1 + j\ \mathrm{V} = \sqrt{2}_{\angle 135^\circ}\ \mathrm{V} \rightarrow$

$\rightarrow v_G(t) = \mathrm{Re}\{\mathbf{V}_G e^{j\omega t}\} = \sqrt{2}\cos(\omega t + 135^\circ)\ \mathrm{V}\ (\omega = 10^5\ \mathrm{rad/s})$

$p_G(t) = -v_G(t)\, i_G(t) = 5\sqrt{2}\cos(\omega t)\cos(\omega t + 135^\circ)\ \mathrm{W}\ (\omega = 10^5\ \mathrm{rad/s})$

3 Cuando **x** e **y** están en circuito abierto la situación es la de la figura. En consecuencia, utilizando los valores del apartado anterior,

$$\mathbf{V}_{Th} = \mathbf{V}_{xy} = \mathbf{I}_S j\omega L_S - \mathbf{I}_2 j\omega M = j\ \mathrm{V}$$

Desactivando las fuentes (la de corriente se sustituye por un circuito abierto y la de tensión por un cortocircuito) y reflejando impedancias en el primario del transformador lineal se obtiene

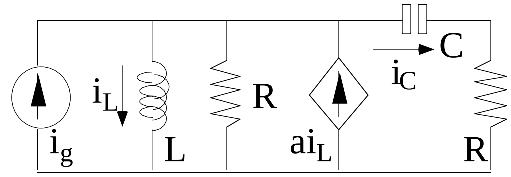
$$Z_{Th} = Z_{xy} = j\omega L_S + \frac{(\omega M)^2}{j\omega L_2 + R_G + \dfrac{1}{j\omega C_G}} = 1 + j2\ \Omega$$

La impedancia a colocar entre **x** e **y** para obtener la máxima potencia media es

$$Z_L = Z_{Th}^* = 1 - j2\ \Omega$$

Obsérvese que el cálculo de la corriente de cortocircuito entre **x** e **y** no es sencillo, ya que hay corriente tanto en el cortocircuito como en L_S. La segunda es necesaria para compensar la caída de tensión que se produce en dicha inductancia a causa de la inducción mutua entre L_S y L_G.

PROBLEMA 3



En el circuito de la figura son datos los valores de R, L, C y a.

Sabiendo que $i_g(t) = I_G\cos(\omega t)$, y siendo I_G dato (real),

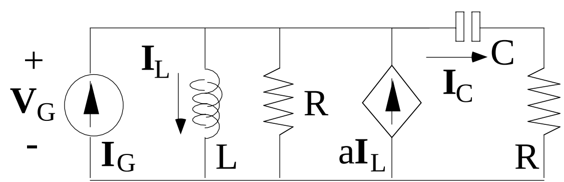
1 (0.5 puntos) Hallad el valor de la impedancia que **ve** la fuente independiente para un valor de ω dado.

2 (0.5 puntos) Hallad los valores a los que tienden el módulo y la fase de la tensión en la fuente dependiente cuando ω tiende a 0 rad/s y cuando ω tiende a ∞ rad/s (supóngase a < 1).

3 (0.75 puntos) Hallad el valor (ω_0) de la frecuencia angular para el que la impedancia que **ve** la fuente es puramente resistiva. ¿Qué condición han de cumplir los parámetros R, L, C y a para que exista dicha frecuencia angular?

4 (0.5 puntos) Suponiendo que C = ∞ F y L = ∞ H, hallad $i_C(t)$.

5 (0.75 puntos) Sabiendo que $i_g(t) = I_D + I_G\cos(\omega_0 t)$, siendo I_D e I_G datos reales, teniendo ω_0 el valor calculado en el apartado **3**, y teniendo C y L valores finitos, hallad la potencia en bornas de la inductancia.



1 Dado que el circuito funciona en régimen sinusoidal permanente, utilizamos la nomenclatura mostrada en la figura adjunta, con $\mathbf{I}_G = I_G$.

$$\mathbf{I}_G + a\mathbf{I}_L = \frac{\mathbf{V}_G}{R} + \frac{\mathbf{V}_G}{R + \frac{1}{j\omega C}} + \mathbf{I}_L,\ \mathbf{I}_L = \frac{\mathbf{V}_G}{j\omega L} \rightarrow \mathbf{I}_G = \mathbf{V}_G Y = \frac{\mathbf{V}_G}{Z}$$

$$Y = \frac{1}{R} + \frac{j\omega C}{j\omega RC + 1} + \frac{1 - a}{j\omega L},\ Z = \frac{1}{Y}$$

2 La tensión en la fuente dependiente coincide con la tensión en la fuente independiente ya que ambos elementos están en paralelo; es decir, la tensión buscada es $\mathbf{V}_G$.

$$\omega \rightarrow 0 \text{ rad/s} \Rightarrow Y \rightarrow \frac{1 - a}{j\omega L} \Rightarrow \mathbf{V}_G = \frac{\mathbf{I}_G}{Y} \rightarrow \frac{\mathbf{I}_G j\omega L}{1 - a}$$

$$\left(\text{módulo de } \mathbf{V}_G \rightarrow \frac{I_G \omega L}{1 - a} \approx 0 \text{ V, fase de } \mathbf{V}_G \rightarrow 90\ °\right)$$

$$\omega \rightarrow \infty \text{ rad/s} \Rightarrow Y \rightarrow \frac{2}{R} \Rightarrow \mathbf{V}_G = \frac{\mathbf{I}_G}{Y} \rightarrow \frac{\mathbf{I}_G R}{2}$$

$$\left(\text{módulo de } \mathbf{V}_G \rightarrow \frac{I_G R}{2}, \text{ fase de } \mathbf{V}_G \rightarrow 0\ °\right)$$

3 Para hallar el valor pedido efectuamos el siguiente razonamiento:

$$\text{Z resistiva} \rightarrow \mathrm{Im}\{Y\} = 0 \rightarrow \frac{\omega_0 C}{1 + (\omega_0 RC)^2} - \frac{1 - a}{\omega_0 L} = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow \omega_0 = + \sqrt{\frac{1 - a}{LC + (a - 1)(RC)^2}}$$

Para que exista ω_0 el radical de la última expresión ha de ser > 0.

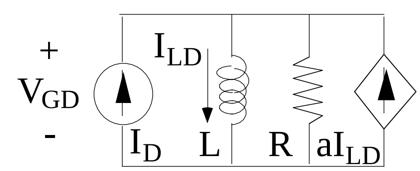
4 En las condiciones indicadas la inductancia es un circuito abierto (con lo que también lo es la fuente dependiente) y la capacidad es un cortocircuito. En consecuencia, la corriente de la fuente independiente se reparte por igual entre las dos ramas que contienen las resistencias; es decir,

$$i_C(t) = \frac{i_g(t)}{2}$$

5 Dado que hay dos excitaciones diferentes debemos aplicar el principio de superposición.

Continua

La inductancia es un cortocircuito y la capacidad es un circuito abierto.



$$V_{GD} = 0 \text{ V} \rightarrow I_D + aI_{LD} = I_{LD} \rightarrow I_{LD} = \frac{I_D}{1 - a}$$

Régimen sinusoidal permanente

Utilizamos el circuito considerado en el primer apartado.

$$Y(\omega_0) = \frac{1 + 2(\omega_0 RC)^2}{R\left[1 + (\omega_0 RC)^2\right]} \text{ (real)}$$

$$\mathbf{V}_G = \frac{\mathbf{I}_G}{Y(\omega_0)} \rightarrow v_{GA}(t) = \mathrm{Re}\{\mathbf{V}_G e^{j\omega_0 t}\} = \frac{I_G}{Y(\omega_0)}\cos(\omega_0 t)$$

$$\mathbf{I}_L = \frac{\mathbf{V}_G}{j\omega_0 L} = \frac{\mathbf{I}_G}{jY(\omega_0)\omega_0 L} \rightarrow$$

$$\rightarrow i_{LA}(t) = \mathrm{Re}\{\mathbf{I}_L e^{j\omega_0 t}\} = \frac{I_G}{Y(\omega_0)\omega_0 L}\cos(\omega_0 t - 90\,°)$$

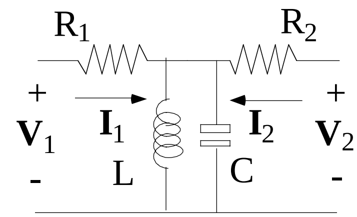
Respuesta total

$$i_L(t) = I_{LD} + i_{LA}(t), \quad v_L(t) = V_{GD} + v_{GA}(t)$$

$$p_L(t) = v_L(t)\, i_L(t) = \left[\frac{I_D}{1 - a} + \frac{I_G}{Y(\omega_0)\omega_0 L}\cos(\omega_0 t - 90\,°)\right]\frac{I_G}{Y(\omega_0)}\cos(\omega_0 t)$$

PROBLEMA 4

El cuadripolo de la figura, en cuya representación se ha utilizado notación fasorial, funciona en régimen sinusoidal permanente a una frecuencia angular ω.



1 (0.5 puntos) ¿Qué condiciones han de cumplirse para que sea simétrico?

2 (1 punto) Se conectan en serie-paralelo dos cuadripolos como el del apartado **1**. Obtened los parámetros híbridos (h) del cuadripolo resultante. Supóngase $R_1 = R/2 = R_2$ y $\omega L = 1/(\omega C)$.

3 (0.5 puntos) El cuadripolo resultante de la agrupación indicada en el apartado **2** se inserta entre una fuente de tensión (caracterizada por el fasor $\mathbf{V}_G$; lleva asociada una impedancia en serie Z_G) y una impedancia Z_L. Obtened la impedancia de entrada ($Z_i = \mathbf{V}_1/\mathbf{I}_1$) del cuadripolo.

1 En el cuadripolo se tienen las siguientes ecuaciones de mallas:

$$\mathbf{V}_1 = \mathbf{I}_1(R_1 + Z) + \mathbf{I}_2 Z,\ \mathbf{V}_2 = \mathbf{I}_1 Z + \mathbf{I}_2(R_2 + Z),\ Z = \left(j\omega C + \frac{1}{j\omega L}\right)^{-1}$$

Comparando estas ecuaciones con las correspondientes a la definición de los parámetros z,

$$\mathbf{V}_1 = \mathbf{I}_1 z_{11} + \mathbf{I}_2 z_{12},\ \mathbf{V}_2 = \mathbf{I}_1 z_{21} + \mathbf{I}_2 z_{22}$$

se tiene

$$z_{11} = R_1 + Z,\ z_{12} = Z = z_{21},\ z_{22} = R_2 + Z$$

Para que el cuadripolo sea simétrico han de cumplirse las condiciones

$$z_{12} = z_{21}\text{, se cumple siempre; }\ z_{11} = z_{22} \rightarrow R_1 = R_2$$

2 En las condiciones indicadas Z es un circuito abierto, con lo que, a efectos de cálculo, el circuito total se reduce a una resistencia serie igual a la suma de las dos originales (es decir, de valor R), con lo que

$$\mathbf{V}_1 = \mathbf{I}_1 R + \mathbf{V}_2,\ \mathbf{I}_2 = -\mathbf{I}_1$$

Comparando estas ecuaciones con las correspondientes a la definición de los parámetros híbridos (h),

$$\mathbf{V}_1 = \mathbf{I}_1 h_{11} + \mathbf{V}_2 h_{12},\ \mathbf{I}_2 = \mathbf{I}_1 h_{21} + \mathbf{V}_2 h_{22}$$

se tiene

$$h_{11} = R,\ h_{12} = 1,\ h_{21} = -1,\ h_{22} = 0\ \mathrm{S}$$

En la agrupación en serie-paralelo los parámetros híbridos (h) del cuadripolo resultante se obtienen de la siguiente forma:

$$\begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2h_{11} & 2h_{12} \\ 2h_{21} & 2h_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2R & 2 \\ -2 & 0\ \mathrm{S} \end{bmatrix} \qquad (1)$$

3 El circuito resultante queda caracterizado por las ecuaciones

$$\mathbf{V}_G = \mathbf{I}_1 Z_G + \mathbf{V}_1,\ \mathbf{V}_2 = -\mathbf{I}_2 Z_L;\ \mathbf{V}_1 = \mathbf{I}_1 H_{11} + \mathbf{V}_2 H_{12},\ \mathbf{I}_2 = \mathbf{I}_1 H_{21} + \mathbf{V}_2 H_{22}$$

A partir de ellas, y teniendo en cuenta (1), se puede deducir que

$$\mathbf{V}_1 = 2\mathbf{I}_1 R + 2\mathbf{V}_2 = 2\mathbf{I}_1 R - 2\mathbf{I}_2 Z_L = 2\mathbf{I}_1 R + 4\mathbf{I}_1 Z_L \rightarrow Z_i = \frac{\mathbf{V}_1}{\mathbf{I}_1} = 2R + 4Z_L$$