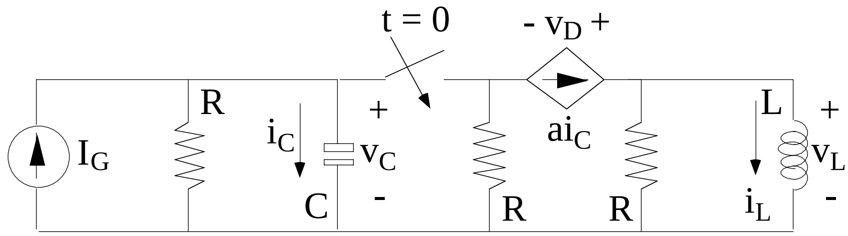
PROBLEMA 1



El circuito de la figura, en el que la fuente independiente es continua y son datos las características de todos los elementos, ha permanecido mucho tiempo sin cambios antes del cierre del interruptor; una vez producido éste, el circuito ya no experimenta más cambios. Hallad:

1 (1.2 puntos) v_C, i_C, i_L y v_L en los instantes $t = 0^-$, $t = 0^+$ y $t = \infty$.

2 (0.8 puntos) Las ecuaciones diferenciales que caracterizan la evolución de v_C e i_L para $t \geq 0$.

3 (0.5 puntos) La expresión temporal de v_D para $t \geq 0$, sabiendo que $L = 1$ H, $v_C(t\geq 0) = 0.5(1 + e^{-t})$ V, e $i_L(t\geq 0) = -0.5te^{-t}$ A (t en segundos en ambas expresiones).

A lo largo del problema utilizamos la siguiente nomenclatura:

$$i_C = C\frac{dv_C}{dt},\ v_L = L\frac{di_L}{dt}$$

1 Para $t < 0$ la inductancia es un cortocircuito y la capacidad es un circuito abierto. Por tanto,

$$i_C(0^-) = 0\ \text{A} \Rightarrow v_C(0^-) = R[I_G - i_C(0^-)] = RI_G$$

$$v_L(0^-) = 0\ \text{V} \Rightarrow i_L(0^-) = ai_C(0^-) - \frac{v_L(0^-)}{R} = 0\ \text{A}$$

La corriente en la inductancia y la tensión en la capacidad no pueden cambiar bruscamente. Por tanto,

$$v_C(0^+) = v_C(0^-) = RI_G,\ I_G = \frac{v_C(0^+)}{R} + i_C(0^+) + \frac{v_C(0^+)}{R} + ai_C(0^+) \Rightarrow i_C(0^+) = -\frac{I_G}{1 + a}$$

$$i_L(0^+) = i_L(0^-) = 0\ \text{A} \Rightarrow v_L(0^+) = ai_C(0^+)R = -\frac{aRI_G}{1 + a}$$

Para $t = \infty$ la inductancia es un cortocircuito y la capacidad es un circuito abierto. Por tanto,

$$i_C(\infty) = 0\ \text{A} \Rightarrow I_G = \frac{v_C(\infty)}{R} + i_C(\infty) + \frac{v_C(\infty)}{R} + ai_C(\infty) \Rightarrow v_C(\infty) = \frac{RI_G}{2}$$

$$v_L(\infty) = 0\ \text{V} \Rightarrow i_L(\infty) = ai_C(\infty) - \frac{v_L(\infty)}{R} = 0\ \text{A}$$

2 Para $t > 0$ se verifica

$$I_G = \frac{v_C}{R} + i_C + \frac{v_C}{R} + ai_C = \frac{2v_C}{R} + (1 + a)C\frac{dv_C}{dt} \qquad (1)$$

$$ai_C = \frac{v_L}{R} + i_L \Rightarrow aC\frac{dv_C}{dt} = \frac{Ldi_L}{Rdt} + i_L \qquad (2)$$

Sustituyendo (2) en (1) se obtiene

$$v_C = \frac{RI_G}{2} - \frac{1 + a}{2a}\left(L\frac{di_L}{dt} + Ri_L\right)$$

y, aplicando esta expresión en (2), se llega a

$$(1 + a)LC\frac{d^2i_L}{dt^2} + \left[(1 + a)RC + \frac{2L}{R}\right]\frac{di_L}{dt} + 2i_L = 0 \qquad (3)$$

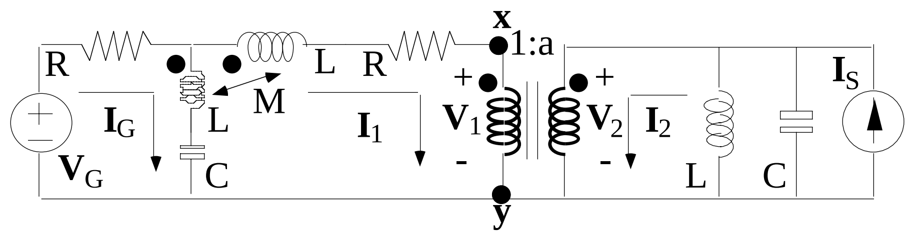
(1) y (3) son las ecuaciones diferenciales buscadas.

3 Utilizando los datos del enunciado, se tiene

$$v_D(t \geq 0) = v_L(t \geq 0) - v_C(t \geq 0) = L\frac{di_L(t \geq 0)}{dt} - v_C(t \geq 0) = -0.5 - e^{-t} + 0.5te^{-t}\ \text{V (t en s)}$$

PROBLEMA 2

El circuito de la figura, en cuya representación se ha utilizado notación fasorial, funciona en régimen sinusoidal permanente a una frecuencia angular ω.



1 (1.25 puntos) Escribid un sistema algebraico de cinco ecuaciones que permita obtener $\mathbf{I}_G$, $\mathbf{I}_1$, $\mathbf{I}_2$, $\mathbf{V}_1$ y $\mathbf{V}_2$ a partir de los elementos del circuito.

2 (0.5 puntos) Suponiendo que a = 0, obtened $\mathbf{I}_G$ e $\mathbf{I}_2$ a partir de los elementos del circuito.

3 (0.75 puntos) Suponiendo que $a \neq 0$, $M = 0$ H y $\omega L = (\omega C)^{-1}$, obtened (a partir de los elementos del circuito) la impedancia que hay que colocar entre **x** e **y** para que en ella se disipe la máxima potencia media posible.

1 Por nudos,

$$\mathbf{I}_S = \frac{\mathbf{V}_2}{j\omega L} + \mathbf{V}_2 j\omega C + \mathbf{I}_2$$

Por mallas,

$$\mathbf{V}_G = \mathbf{I}_G\left(R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}\right) - \mathbf{I}_1\left(j\omega L + \frac{1}{j\omega C}\right) + \mathbf{I}_1 j\omega M$$

$$0 = - \mathbf{I}_G\left(j\omega L + \frac{1}{j\omega C}\right) + \mathbf{I}_1\left(R + j2\omega L + \frac{1}{j\omega C}\right) + \mathbf{V}_1 + (\mathbf{I}_G - \mathbf{I}_1)j\omega M - \mathbf{I}_1 j\omega M$$

Por las propiedades del transformador ideal,

$$\mathbf{V}_2 = a\mathbf{V}_1,\ \mathbf{I}_1 = - a\mathbf{I}_2$$

2 De acuerdo con las ecuaciones del transformador ideal, la condición a = 0 significa que la bobina del primario del transformador ideal es sustituida por un circuito abierto, mientras que la del secundario lo es por un cortocircuito.

El circuito abierto del primario elimina el fenómeno de inducción mutua entre las dos bobinas del transformador lineal. Es decir, la parte izquierda del circuito queda reducida a la fuente de tensión en serie con una resistencia, una inductancia y una capacidad. En esas condiciones,

$$\mathbf{I}_G = \frac{\mathbf{V}_G}{R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}}$$

El cortocircuito del secundario del transformador ideal hace que toda la corriente de la fuente de corriente se desvíe por él. Es decir,

$$\mathbf{I}_2 = \mathbf{I}_S$$

3 Se desactivan las fuentes; la de tensión es sustituida por un cortocircuito y la de corriente por un circuito abierto.

La condición acerca del valor de M implica que no hay inducción mutua entre las bobinas del transformador lineal.

La condición acerca del valor de la frecuencia angular indica que el conjunto L-C en paralelo es un circuito abierto y que el conjunto L-C serie es un cortocircuito.

En esta situación, el secundario del transformador ideal tiene una impedancia infinita (circuito abierto), y así se refleja en el primario. A su vez, el primario queda reducido a una inductancia en serie con una resistencia (el efecto de la resistencia asociada a la fuente de corriente queda anulado por el cortocircuito que impone el conjunto L-C serie).

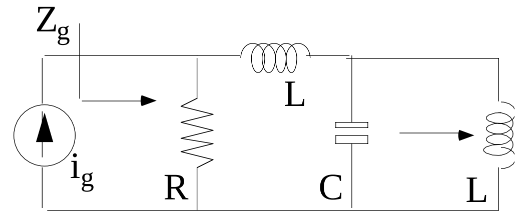
Por tanto, la impedancia equivalente de Thèvenin entre **x** e **y** es

$$Z_{Th} = (R + j\omega L) \,//\, \infty = R + j\omega L$$

y la impedancia para obtener la máxima potencia media posible es

$$Z_L = Z_{Th}^{*} = R - j\omega L$$

PROBLEMA 3



En el circuito de la figura son datos los valores de R, L, y C. Sabiendo que $i_g(t) = I_G\cos(\omega t)$, y siendo I_G dato (real),

1 (0.5 puntos) Hallad el valor de la impedancia (Z_g) que *ve* la fuente independiente para un valor de ω dado.

2 (0.5 puntos) Hallad los valores a los que tienden el módulo y la fase de la tensión en la inductancia marcada con una flecha cuando ω tiende a 0 rad/s y cuando ω tiende a ∞ rad/s.

3 (0.5 puntos) Hay una frecuencia angular positiva y finita (a la que llamaremos ω_0) para la que la impedancia que *ve* la fuente es puramente resistiva y no nula. ¿Cuánto vale esa frecuencia? ¿Cuánto vale Z_g cuando ω es igual a ω_0?

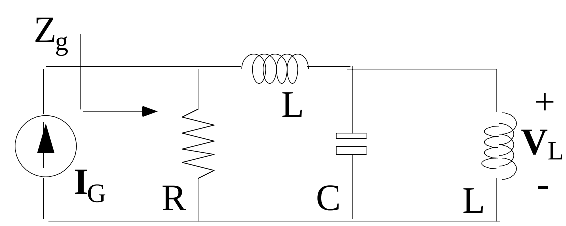
4 (0.5 puntos) Plantead la condición para hallar la frecuencia angular a la que la tensión en la fuente tiene una fase de 45 ° (no es necesario calcular esa frecuencia).

Sabiendo que $i_g(t) = I_D + I_A\cos(\omega_0 t)$, siendo I_D e I_A datos (reales), y teniendo ω_0 el valor calculado en el apartado **3**,

5 (1 punto) Hallad la potencia instantánea en la resistencia (supóngase Z_g = R si no se ha obtenido previamente este dato).

---

1 Dado que el circuito funciona en régimen sinusoidal permanente, utilizamos la nomenclatura mostrada en la figura adjunta, con $\mathbf{I}_G = I_G$.



Agrupando impedancias se tiene

$$Z_{LC} = \frac{1}{j\omega C} \,//\, j\omega L,\ Z = j\omega L + Z_{LC},\ Z_g = R \,//\, Z$$

2 Para frecuencias muy bajas las inductancias se comportan aproximadamente como cortocircuitos, anulando la influencia de los otros elementos pasivos. En consecuencia, toda la corriente proporcionada por la fuente circulará por aquéllas, con lo que

$$\mathbf{V}_L = \mathbf{I}_G\, j\omega L \Rightarrow |\mathbf{V}_L| \to I_G \omega L,\ \angle \mathbf{V}_L \to 90^{\circ}$$

Para frecuencias muy altas las inductancias se comportan aproximadamente como circuitos abiertos, con lo que la corriente proporcionada por la fuente circula sólo por la resistencia. Se tiene así un divisor de tensión, con lo que

$$\mathbf{V}_L = \frac{R\mathbf{I}_G \frac{1}{j\omega C}}{j\omega L + \frac{1}{j\omega C}} \approx -\frac{R\mathbf{I}_G}{\omega^2 LC} \Rightarrow |\mathbf{V}_L| \to \frac{RI_G}{\omega^2 LC}, \angle\mathbf{V}_L \to 180^{\circ}$$

3 Para que la impedancia que *ve* la fuente sea puramente resistiva han de cancelarse los efectos inductivos y capacitivos. Ello puede lograrse de diversas maneras:

$$\omega = 0, \infty \text{ rad/s} \Rightarrow Z = 0\ \Omega \Rightarrow Z_g = 0\ \Omega \text{ (no vale, por el enunciado)}$$

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} \Rightarrow Z = \infty\ \Omega \Rightarrow Z_g = R$$

4 La tensión en la fuente es

$$\mathbf{V}_G = \mathbf{I}_G Z_g$$

con lo que

$$45^{\circ} = \angle\mathbf{V}_G = \angle\mathbf{I}_G + \angle Z_g = \angle Z_g \Rightarrow 0\ \Omega < \mathrm{Re}\{Z_g\} = \mathrm{Im}\{Z_g\} \geq 0\ \Omega$$

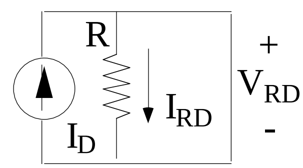
La condición acerca de los signos es para evitar que se tenga una fase de 225 º si las partes real e imaginaria de la impedancia son ambas negativas.

5 Como hay dos excitaciones debemos aplicar el principio de superposición.

Continua

Las inductancias son cortocircuitos y la capacidad es un circuito abierto.

$$V_{RD} = 0\ \text{V},\ I_{RD} = 0\ \text{A}$$



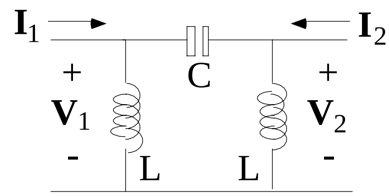
Régimen sinusoidal permanente

$$\omega_0 = +\frac{1}{\sqrt{LC}} \Rightarrow Z_g = R \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{V}_{RA} = Z_g\mathbf{I}_A \Rightarrow v_{RA}(t) = \mathrm{Re}\{\mathbf{V}_{RA}e^{j\omega_0 t}\} = RI_A\cos(\omega_0 t) \\ \mathbf{I}_{RA} = \frac{\mathbf{V}_A}{R} \Rightarrow i_{RA}(t) = \mathrm{Re}\{\mathbf{I}_{RA}e^{j\omega_0 t}\} = I_A\cos(\omega_0 t) \end{array} \right\}$$

Respuesta total

$$i_R(t) = I_{RD} + i_{RA}(t),\ v_R(t) = V_{RD} + v_{RA}(t),\ p_R(t) = v_R(t)\, i_R(t)$$

PROBLEMA 4



El cuadripolo de la figura, en cuya representación se ha utilizado notación fasorial, funciona en régimen sinusoidal permanente a una frecuencia angular ω.

1 (0.5 puntos) Obtened los parámetros híbridos (h) del cuadripolo.

2 (1 punto) Se conectan en cascada dos cuadripolos como el del apartado **1**. Obtened los parámetros de transmisión del cuadripolo resultante. Supóngase $\omega L = 1/(\omega C)$.

3 (0.5 puntos) El cuadripolo resultante de la agrupación indicada en el apartado **2** se inserta entre una fuente de tensión (caracterizada por el fasor $\mathbf{V}_G$; lleva asociada una impedancia en serie Z_G) y una impedancia Z_L. Obtened la potencia media en la impedancia Z_L (si no se ha resuelto el apartado anterior, supóngase que los parámetros B y C de la agrupación son nulos).

1 Los parámetros híbridos (h) están definidos por las relaciones

$$\mathbf{V}_1 = \mathbf{I}_1 h_{11} + \mathbf{V}_2 h_{12},\ \mathbf{I}_2 = \mathbf{I}_1 h_{21} + \mathbf{V}_2 z_{22}$$

A partir de ellas se deduce

$$h_{11} = \left(\frac{\mathbf{V}_1}{\mathbf{I}_1}\right)_{\mathbf{V}_2 = 0\ \mathrm{V}} = j\omega L \mathbin{//} \frac{1}{j\omega C} = \frac{j\omega L}{1 - \omega^2 LC},\ h_{12} = \left(\frac{\mathbf{V}_1}{\mathbf{V}_2}\right)_{\mathbf{I}_1 = 0\ \mathrm{A}} = \frac{j\omega L}{j\omega L + \frac{1}{j\omega C}} = -\frac{\omega^2 LC}{1 - \omega^2 LC}$$

$$h_{21} = \left(\frac{\mathbf{I}_2}{\mathbf{I}_1}\right)_{\mathbf{V}_2 = 0\ \mathrm{V}} = -\frac{j\omega C}{j\omega C + \frac{1}{j\omega L}} = \frac{\omega^2 LC}{1 - \omega^2 LC}$$

$$h_{22} = \left(\frac{\mathbf{I}_2}{\mathbf{V}_2}\right)_{\mathbf{I}_1 = 0\ \mathrm{A}} = \frac{1}{j\omega L} + \frac{1}{j\omega L + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{1}{j\omega L} + \frac{j\omega C}{1 - \omega^2 LC}$$

2 Llamando $\mathbf{I}_3$ a la corriente de malla que circula por todos los elementos (opuesta a $\mathbf{I}_1$ en la rama en la que cae $\mathbf{V}_1$), en el circuito se verifican las ecuaciones

$$\mathbf{V}_1 = (\mathbf{I}_1 - \mathbf{I}_3) j\omega L,\ 0 = -\mathbf{I}_1 j\omega L + \mathbf{I}_3\left(j2\omega L + \frac{1}{j\omega C}\right) + \mathbf{I}_2 j\omega L,\ \mathbf{V}_2 = (\mathbf{I}_2 + \mathbf{I}_3) j\omega L$$

Imponiendo la condición indicada en el enunciado y reordenando términos, las ecuaciones anteriores quedan reducidas a

$$\mathbf{V}_1 = \mathbf{I}_2 j\omega L,\ \mathbf{I}_3 = \mathbf{I}_1 - \mathbf{I}_2,\ \mathbf{V}_2 = \mathbf{I}_1 j\omega L$$

Comparando estos resultados con las ecuaciones que definen los parámetros de transmisión,

$$\mathbf{V}_1 = a\mathbf{V}_2 - b\mathbf{I}_2,\ \mathbf{I}_1 = c\mathbf{V}_2 - d\mathbf{I}_2$$

se obtienen los parámetros de transmisión del cuadripolo del enunciado:

$$a = 0 = d,\ b = -j\omega L,\ c = \frac{1}{j\omega L}$$

En la agrupación en cascada los parámetros del cuadripolo resultante de la agrupación se obtienen de la siguiente forma:

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^2 + bc & b(a + d) \\ c(a + d) & bc + d^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

3 En las condiciones indicadas el circuito resultante queda caracterizado por las ecuaciones

$$\mathbf{V}_G = \mathbf{I}_1 Z_G + \mathbf{V}_1,\ \mathbf{V}_2 = -\mathbf{I}_2 Z_L;\ \mathbf{V}_1 = A\mathbf{V}_2,\ \mathbf{I}_1 = -D\mathbf{I}_2;\ A = -1,\ D = -1$$

A partir de ellas, se puede deducir que

$$\mathbf{V}_G = \mathbf{I}_1 Z_G + \mathbf{V}_1 = -DZ_G\mathbf{I}_2 + A\mathbf{V}_2 = -(DZ_G + AZ_L)\mathbf{I}_2$$

$$S_L = -\frac{\mathbf{V}_2\mathbf{I}_2^*}{2} = \frac{|\mathbf{I}_2|^2 Z_L}{2} = \left|\frac{\mathbf{V}_G}{DZ_G + AZ_L}\right|^2 \frac{Z_L}{2} = \left|\frac{\mathbf{V}_G}{Z_G + Z_L}\right|^2 \frac{Z_L}{2},\ P_L = \mathrm{Re}\{S_L\}$$