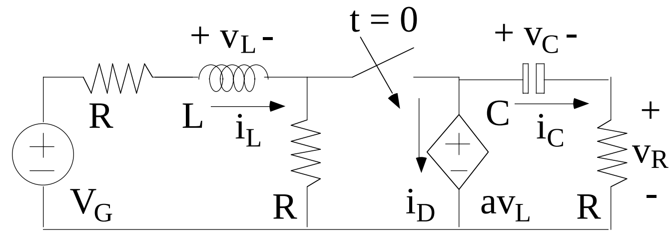
PROBLEMA 1



La fuente independiente es continua y son datos las características de todos los elementos.

El circuito de la figura ha permanecido mucho tiempo sin cambios antes del cierre del interruptor; una vez producido éste, el circuito ya no experimenta más cambios.

1 (1.2 puntos) Hallad i_L, v_C, i_D y v_R en los instantes $t = 0^-$, $t = 0^+$ y $t = \infty$.

2 (0.8 puntos) Hallad las ecuaciones diferenciales que caracterizan la evolución de v_C e i_L para $t \geq 0$.

3 (0.5 puntos) Sabiendo que $a = 1$, $R = 1\ \Omega$, $C = 1$ F, $L = 1$ H y que, para $t \geq 0$, $i_L = 1 - 0.5e^{-0.5t}$ A e $i_D = 1 - 0.5e^{-t} - 0.5e^{-0.5t}$ A (t en segundos en ambas expresiones), hallad la expresión temporal de v_C para dicho intervalo de tiempo.

A lo largo del problema utilizamos la siguiente nomenclatura:

$$i_C = C\frac{dv_C}{dt},\ v_L = L\frac{di_L}{dt}$$

1 Para $t < 0$ la inductancia es un cortocircuito y la capacidad es un circuito abierto. Por tanto,

$$v_L(0^-) = 0\text{ V},\ V_G = i_L(0^-)(R + R) + v_L(0^-) \Rightarrow i_L(0^-) = \frac{V_G}{2R}$$

$$i_C(0^-) = 0\text{ A} \Rightarrow v_R(0^-) = Ri_C(0^-) = 0\text{ V},\ i_D(0^-) = -i_C(0^-) = 0\text{ A},\ v_C(0^-) = av_L(0^-) - v_R(0^-) = 0\text{ V}$$

La corriente en la inductancia y la tensión en la capacidad no pueden cambiar bruscamente. Por tanto,

$$i_L(0^+) = i_L(0^-) = \frac{V_G}{2R},\ V_G = Ri_L(0^+) + v_L(0^+) + av_L(0^+) \Rightarrow v_L(0^+) = \frac{V_G}{2(1 + a)}$$

$$v_C(0^+) = v_C(0^-) = 0\text{ V},\ a\,v_L(0^+) = v_C(0^+) + Ri_C(0^+) \Rightarrow i_C(0^+) = \frac{aV_G}{2(1 + a)R}$$

$$v_R(0^+) = Ri_C(0^+) = \frac{aV_G}{2(1 + a)},\ i_L(0^+) = \frac{av_L(0^+)}{R} + i_D(0^+) + i_C(0^+) \Rightarrow i_D(0^+) = \left(\frac{1 - a}{1 + a}\right)\frac{V_G}{2R}$$

Para $t = \infty$ la inductancia es un cortocircuito y la capacidad es un circuito abierto. Por tanto,

$$v_L(\infty) = 0\text{ V},\ V_G = Ri_L(\infty) + v_L(\infty) + av_L(\infty) \Rightarrow i_L(\infty) = \frac{V_G}{R}$$

$$i_C(\infty) = 0\text{ A},\ i_L(\infty) = \frac{av_L(\infty)}{R} + i_D(\infty) + i_C(\infty) \Rightarrow i_D(\infty) = \frac{V_G}{R},\ v_R(\infty) = Ri_C(\infty) = 0\text{ V}$$

$$av_L(\infty) = v_C(\infty) + Ri_C(\infty) \Rightarrow v_C(\infty) = 0\text{ V}$$

2 Para $t > 0$ se verifica

$$V_G = Ri_L + v_L + av_L = Ri_L + (1 + a)L\frac{di_L}{dt} \qquad (1)$$

$$av_L = v_C + Ri_C \Rightarrow aL\frac{di_L}{dt} = v_C + RC\frac{dv_C}{dt} \qquad (2)$$

Sustituyendo (2) en (1) se obtiene

$$i_L = \frac{V_G}{R} - \frac{(1 + a)}{a}\left(\frac{v_C}{R} + C\frac{dv_C}{dt}\right)$$

y, aplicando esta expresión en (1), se llega a

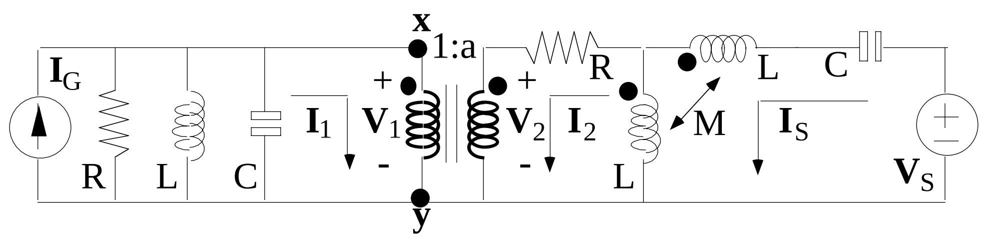
$$(1 + a)LC\frac{d^2v_C}{dt} + \left[\frac{(1 + a)L}{R} + RC\right]\frac{dv_C}{dt} + v_C = 0 \qquad (3)$$

(1) y (3) son las ecuaciones diferenciales buscadas.

3 Para $t \geq 0$ se tiene

$$v_C = av_L - Ri_C = 2aL\frac{di_L}{dt} + R(i_D - i_L) = 0.5e^{-0.5t} - 0.5e^{-t} \text{ V (t en s)}$$

PROBLEMA 2



El circuito de la figura, en cuya representación se ha utilizado notación fasorial, funciona en régimen sinusoidal permanente a una frecuencia angular ω.

1 (1.25 puntos) Escribid un sistema algebraico de cinco ecuaciones que permita obtener $\mathbf{I}_1$, $\mathbf{I}_2$, $\mathbf{I}_S$, $\mathbf{V}_1$ y $\mathbf{V}_2$ a partir de los elementos del circuito.

2 (0.5 puntos) Suponiendo que $a = \infty$, obtened $\mathbf{I}_1$ e $\mathbf{I}_S$ a partir de los elementos del circuito.

3 (0.75 puntos) Suponiendo que a tiene un valor finito no nulo, $M = 0$ H y $\omega L = (\omega C)^{-1}$, obtened (a partir de los elementos del circuito) la impedancia que hay que colocar entre **x** e **y** para que en ella se disipe la máxima potencia media posible.

---

1 Por nudos,

$$\mathbf{I}_G = \frac{\mathbf{V}_1}{j\omega L} + \mathbf{V}_1 j\omega C + \frac{\mathbf{V}_1}{R} + \mathbf{I}_1$$

Por mallas,

$$0 = - \mathbf{I}_S j\omega L + \mathbf{I}_2(j\omega L + R) + \mathbf{V}_2 + \mathbf{I}_S j\omega M$$

$$\mathbf{V}_S = \mathbf{I}_S\left(j2\omega L + \frac{1}{j\omega C}\right) - \mathbf{I}_2 j\omega L - (\mathbf{I}_S - \mathbf{I}_2)j\omega M - \mathbf{I}_S j\omega M$$

Por las propiedades del transformador ideal,

$$\mathbf{V}_1 = \frac{\mathbf{V}_2}{a},\ \mathbf{I}_2 = - \frac{\mathbf{I}_1}{a}$$

2 De acuerdo con las ecuaciones del transformador ideal, la condición $a = \infty$ significa que la bobina del primario del transformador ideal es sustituida por un cortocircuito, mientras que la del secundario lo es por un circuito abierto.

El cortocircuito del primario del transformador ideal hace que toda la corriente de la fuente de corriente se desvíe por él. Es decir,

$$\mathbf{I}_1 = \mathbf{I}_G$$

El circuito abierto del secundario hace que la parte derecha del circuito queda reducida a la fuente de tensión en serie con dos inductancias y una capacidad. En esas condiciones,

$$\mathbf{I}_S = \frac{\mathbf{V}_S}{j2\omega L - j2\omega M + \frac{1}{j\omega C}}$$

3 Se desactivan las fuentes; la de tensión es sustituida por un cortocircuito y la de corriente por un circuito abierto.

La condición acerca del valor de M implica que no hay inducción mutua entre las bobinas del transformador lineal.

La condición acerca del valor de la frecuencia angular indica que el conjunto L-C en paralelo es un circuito abierto y que el conjunto L-C serie es un cortocircuito.

En esta situación, el secundario del transformador lineal queda reducido a la resistencia, que se refleja en el primario. El primario también queda reducido a una resistencia.

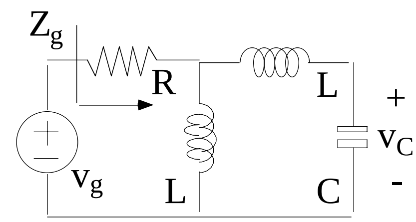
Por tanto, la impedancia equivalente de Thèvenin entre **x** e **y** es

$$Z_{Th} = R\ //\ \frac{R}{a^2}$$

y la impedancia para obtener la máxima potencia media posible es

$$Z_L = Z_{Th}^{*} = Z_{Th}$$

PROBLEMA 3



En el circuito de la figura son datos los valores de R, L, y C.

Sabiendo que $v_g(t) = V_G\cos(\omega t)$, y siendo V_G dato (real),

1 (0.5 puntos) Hallad el valor de la impedancia (Z_g) que *ve* la fuente independiente para un valor de ω dado.

2 (0.5 puntos) Hallad los valores a los que tienden el módulo y la fase de la tensión en la capacidad cuando ω tiende a 0 rad/s y cuando ω tiende a ∞ rad/s.

3 (0.5 puntos) Hallad el valor (ω_0) de la frecuencia angular, distinto de 0 rad/s, para el que la impedancia que *ve* la fuente es puramente resistiva. ¿Cuánto vale Z_g cuando ω es igual a ω_0?

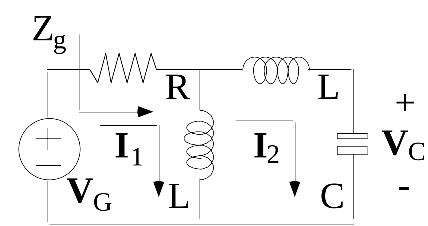
4 (0.5 puntos) Suponiendo que L = 0 H, obtened la expresión temporal de la corriente en la resistencia para cualquier valor de ω.

Sabiendo que $v_g(t) = V_D + V_A\cos(\omega_0 t)$, siendo V_D y V_A datos (reales), teniendo ω_0 el valor calculado en el apartado **3** y teniendo L un valor finito no nulo,

5 (1 punto) Hallad la potencia instantánea en la resistencia (supóngase Z_g = R si no se ha obtenido previamente este dato).

---

1 Dado que el circuito funciona en régimen sinusoidal permanente, utilizamos la nomenclatura mostrada en la figura adjunta, con $\mathbf{V}_G = V_G$.



$$Z_g = R + Z_{eq},\ Z_{eq} = (j\omega L)//\left(j\omega L + \frac{1}{j\omega C}\right) = j\frac{\omega L - \omega^3 L^2 C}{1 - 2\omega^2 LC}$$

2 Para frecuencias muy bajas las inductancias y las capacidades tienden a comportarse como cortocircuitos y circuitos abiertos, respectivamente. Luego toda la corriente proporcionada por la fuente se irá por la inductancia más próxima a ella, siendo la tensión en la capacidad igual a la tensión en tal inductancia. En consecuencia,

$$\omega \to 0 \text{ rad/s} \Rightarrow \mathbf{V}_C \to \frac{\mathbf{V}_G j\omega L}{R};\ \text{módulo de } \mathbf{V}_C \to 0 \text{ V, fase de } \mathbf{V}_C \to 90\ °$$

Para frecuencias muy altas, las inductancias y las capacidades tienden a comportarse como circuitos abiertos y cortocircuitos, respectivamente. Por tanto, la corriente proporcionada por la fuente se reparte igualmente entre las dos ramas que contienen las inductancias. En consecuencia,

$$\omega \to \infty \text{ rad/s} \Rightarrow \mathbf{V}_C \to \frac{\mathbf{V}_G}{\frac{j\omega L}{2}}\left(\frac{1}{j\omega C}\right) = -\frac{2\mathbf{V}_G}{\omega^2 LC}; \text{ módulo de } \mathbf{V}_C \to 0 \text{ V, fase de } \mathbf{V}_C \to 180\ °$$

3 Para hallar el valor pedido efectuamos el siguiente razonamiento:

$$Z_g \text{ resistiva } (= R) \Rightarrow \mathrm{Im}\{Z_g\} = 0 \Rightarrow \omega_0 L = \omega_0^3 L^2 C \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \omega_0 = 0 \text{ rad/s} \\ \omega_0 = \pm\dfrac{1}{\sqrt{LC}} \end{array}\right.$$

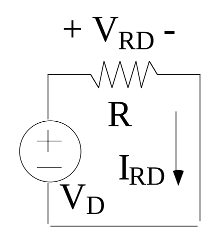
4 En las condiciones indicadas, las inductancias son cortocircuitos, con lo que toda la corriente se desvía por la que conecta el nudo esencial con tierra. Por tanto,

$$\mathbf{I}_R = \frac{\mathbf{V}_G}{R} \Rightarrow i_R(t) = \mathrm{Re}\left\{\frac{\mathbf{V}_G}{R}e^{j\omega t}\right\} = \frac{V_G}{R}\cos(\omega t)$$

5 Dado que hay dos excitaciones diferentes debemos aplicar el principio de superposición.

Continua

Las inductancias son cortocircuitos y la capacidad es un circuito abierto.



$$V_{RD} = V_D,\ I_{RD} = \frac{V_D}{R}$$

Régimen sinusoidal permanente

Utilizamos el circuito considerado en el primer apartado. De acuerdo con lo indicado en apartados anteriores, se tiene

$$\omega_0 = +\frac{1}{\sqrt{LC}} \Rightarrow Z_g = R$$

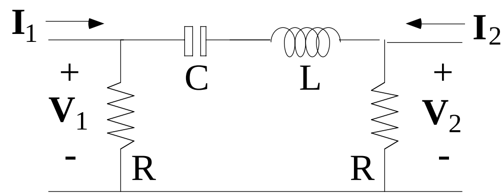
$$\mathbf{I}_1 = \frac{\mathbf{V}_A}{R} = \mathbf{I}_{RA} \Rightarrow i_{RA}(t) = \mathrm{Re}\left\{\frac{\mathbf{V}_A}{R}e^{j\omega_0 t}\right\} = \frac{V_A}{R}\cos(\omega_0 t)$$

$$\mathbf{V}_{RA} = R\mathbf{I}_{RA} = \mathbf{V}_A \Rightarrow v_{RA}(t) = \mathrm{Re}\{\mathbf{V}_A e^{j\omega_0 t}\} = V_A\cos(\omega_0 t)$$

Respuesta total

$$i_R(t) = I_{RD} + i_{RA}(t),\ \ v_R(t) = V_{RD} + v_{RA}(t),\ \ p_R(t) = v_R(t)\, i_R(t)$$

PROBLEMA 4



El cuadripolo de la figura, en cuya representación se ha utilizado notación fasorial, funciona en régimen sinusoidal permanente a una frecuencia angular ω.

1 (0.5 puntos) Obtened los parámetros de admitancia del cuadripolo.

2 (1 punto) Se conectan en serie dos cuadripolos como el del apartado **1**. Obtened los parámetros de impedancia del cuadripolo resultante. Supóngase $\omega L = 1/(\omega C)$.

3 (0.5 puntos) El cuadripolo resultante de la agrupación indicada en el apartado **2** se conecta a una fuente de tensión (caracterizada por el fasor $\mathbf{V}_G$; lleva asociada una impedancia en serie Z_G). Obtened la corriente de entrada al cuadripolo cuando la salida está en circuito abierto.

---

1 En el cuadripolo se verifican las siguientes ecuaciones de nudos:

$$Z = j\omega L + \frac{1}{j\omega C},\ \mathbf{I}_1 = \frac{\mathbf{V}_1}{R} + \frac{\mathbf{V}_1 - \mathbf{V}_2}{Z},\ \mathbf{I}_2 = \frac{\mathbf{V}_2}{R} + \frac{\mathbf{V}_2 - \mathbf{V}_1}{Z}$$

Comparando estas ecuaciones con las correspondientes a la definición de los parámetros y,

$$\mathbf{I}_1 = \mathbf{V}_1 y_{11} + \mathbf{V}_2 y_{12},\ \mathbf{I}_2 = \mathbf{V}_1 y_{21} + \mathbf{V}_2 y_{22}$$

se tiene

$$y_{11} = \frac{1}{R} + \frac{1}{Z} = y_{22},\ y_{12} = -\frac{1}{Z} = y_{21}$$

2 En las condiciones indicadas el conjunto LC es un cortocircuito, y el cuadripolo del enunciado se reduce a una resistencia paralelo de valor R/2, con lo que

$$\mathbf{V}_1 = \frac{(\mathbf{I}_1 + \mathbf{I}_2)R}{2} = \mathbf{V}_2$$

Comparando estas ecuaciones con las correspondientes a la definición de los parámetros de impedancia,

$$\mathbf{V}_1 = \mathbf{I}_1 z_{11} + \mathbf{I}_2 z_{12},\ \mathbf{V}_2 = \mathbf{I}_1 z_{21} + \mathbf{I}_2 z_{22}$$

se tiene

$$z_{11} = z_{12} = z_{21} = z_{22} = \frac{R}{2}$$

En la agrupación en serie los parámetros de impedancia del cuadripolo resultante se obtienen de la siguiente forma:

$$\begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2z_{11} & 2z_{12} \\ 2z_{21} & 2z_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R & R \\ R & R \end{bmatrix}$$

3 El circuito resultante queda caracterizado por las ecuaciones

$$\mathbf{V}_G = \mathbf{I}_1 Z_G + \mathbf{V}_1,\ \mathbf{V}_1 = \mathbf{I}_1 Z_{11} + \mathbf{V}_2 Z_{12},\ \mathbf{I}_2 = 0$$

A partir de ellas, y teniendo en cuenta los resultados del apartado anterior, se puede deducir que

$$\mathbf{I}_1 = \frac{\mathbf{V}_G - \mathbf{V}_1}{Z_G} = \frac{\mathbf{V}_G - \mathbf{I}_1 Z_{11} - \mathbf{I}_2 Z_{12}}{Z_G} \Rightarrow \mathbf{I}_1 = \frac{\mathbf{V}_G}{R + Z_G}$$