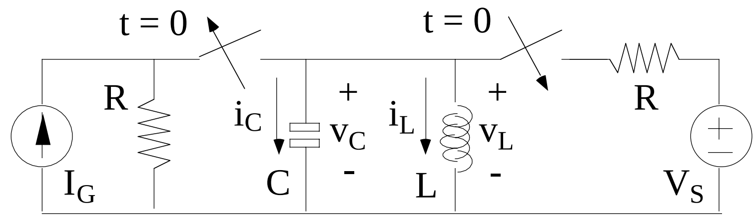
# Problema 1

En el circuito de la figura
las fuentes son continuas,
y son datos las características
de todos los elementos.




El circuito ha permanecido mucho tiempo en el mismo estado antes del cambio de posición de los interruptores. Una vez producido éste, ya no experimenta más cambios.

**A (1.8 puntos)** Obtened los valores de $i_C$, $v_C$, $i_L$ y $v_L$ en los instantes $t = 0^-$, $t = 0^+$ y $t = \infty$.

**B (1.2 puntos)** Obtened las ecuaciones diferenciales que caracterizan la evolución de $v_C$ e $i_L$ para $t > 0$.

---

***Apartado A***

En régimen permanente continuo
la capacidad es un circuito abierto
y la inductancia es un cortocircuito

$$i_C(0^-) = 0 \text{ A}$$

$$v_L(0^-) = 0 \text{ V}$$

Elementos en paralelo

$$v_C(0^-) = v_L(0^-) = 0 \text{ V}$$

Ecuación de nudo

$$I_G = \frac{v_C(0^-)}{R} + i_C(0^-) + i_L(0^-) \Rightarrow i_L(0^-) = I_G$$

La tensión en la capacidad
y la corriente en la inductancia
no pueden variar bruscamente

$$v_C(0^+) = v_C(0^-) = 0 \text{ V}$$

$$i_L(0^+) = i_L(0^-) = I_G$$

Elementos en paralelo

$$v_L(0^+) = v_C(0^+) = 0 \text{ V}$$

Ecuación de nudo

$$\frac{V_S - v_C(0^+)}{R} = i_L(0^+) + i_C(0^+) \Rightarrow i_C(0^+) = \frac{V_S}{R} - I_G$$

En régimen permanente continuo
la capacidad es un circuito abierto
y la inductancia es un cortocircuito

$$i_C(\infty) = 0 \text{ A}$$

$$v_L(\infty) = 0 \text{ V}$$

Elementos en paralelo

$$v_C(\infty) = v_L(\infty) = 0 \text{ V}$$

Ecuación de nudo

$$\frac{V_S - v_C(\infty)}{R} = i_L(\infty) + i_C(\infty) \Rightarrow i_L(\infty) = \frac{V_S}{R}$$

***Apartado B***

Para t > 0 se tiene

Ecuación de nudo $$\frac{V_S - v_C}{R} = i_L + i_C = i_L + C\frac{dv_C}{dt} \tag{1}$$

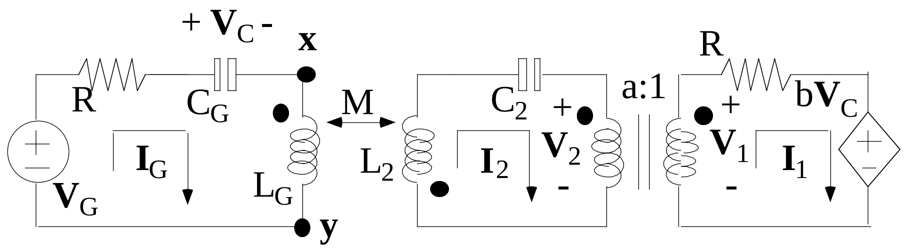
Elementos en paralelo $$v_C = v_L = L\frac{di_L}{dt} \tag{2}$$

Sustituyendo (1) en (2) $$LC\frac{d^2v_C}{dt^2} + \frac{L}{R}\frac{dv_C}{dt} + v_C = 0 \tag{3}$$

Sustituyendo (2) en (1) $$LC\frac{d^2i_L}{dt^2} + \frac{L}{R}\frac{di_L}{dt} + i_L = \frac{V_S}{R} \tag{4}$$

(3) y (4) son las ecuaciones diferenciales buscadas.

## Problema 2




El circuito de la figura, en cuya representación se ha utilizado notación fasorial, funciona en régimen sinusoidal permanente a una frecuencia angular $\omega$.

**A (1.5 puntos)** Formulad un sistema algebraico de seis ecuaciones a partir del cual sea posible obtener los valores de $\mathbf{I}_G$, $\mathbf{I}_1$, $\mathbf{I}_2$, $\mathbf{V}_1$, $\mathbf{V}_2$ y $\mathbf{V}_C$.

**B (0.75 puntos)** Suponiendo conocidas las características de todos los elementos, el valor de la frecuencia angular, y los valores de las corrientes de malla, formulad las expresiones algebraicas para obtener las potencias compleja, media y reactiva en $L_G$.

**C (0.75 puntos)** Suponiendo conocidas las características de todos los elementos (en particular, b = 0) y el valor de la frecuencia angular, formulad las expresiones algebraicas para determinar la impedancia que ha de colocarse entre **x** e **y** para que en ella se disipe la máxima potencia media posible.

---

### *Apartado A*

Ecuaciones de malla

$$\mathbf{V}_G = \mathbf{I}_G\left(R + \frac{1}{j\omega C_G} + j\omega L_G\right) + \mathbf{I}_2 j\omega M$$

$$0 = \mathbf{I}_G j\omega M + \mathbf{I}_2\left(j\omega L_2 + \frac{1}{j\omega C_2}\right) + \mathbf{V}_2$$

$$\mathbf{V}_1 = \mathbf{I}_1 R + b\mathbf{V}_C$$

Ecuación de la fuente dependiente

$$\mathbf{V}_C = \frac{\mathbf{I}_G}{j\omega C_G}$$

Ecuaciones del transformador ideal

$$\mathbf{V}_2 = a\mathbf{V}_1,\ \mathbf{I}_1 = a\mathbf{I}_2$$

### *Apartado B*

$$\mathbf{V}_{xy} = \mathbf{I}_G j\omega L_G + \mathbf{I}_2 j\omega M$$

$$S_{LG} = \frac{\mathbf{V}_{xy}\mathbf{I}_G^*}{2}$$

$$P_{LG} = \mathrm{Re}\{S_{LG}\},\ Q_{LG} = \mathrm{Im}\{S_{LG}\}$$

### *Apartado C*

El dato b = 0 significa que la fuente dependiente es sustituida por un cortocircuito.

En esa situación, desactivando la fuente independiente (sustituyéndola por un cortocircuito) y reflejando impedancias en los transformadores, se tiene

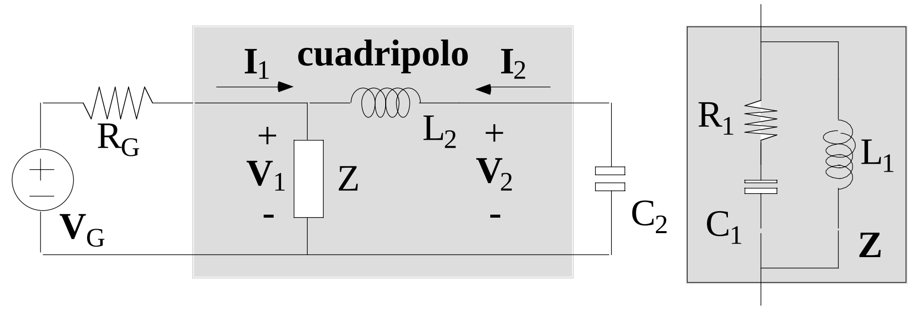
$$Z_{Th} = Z_{xy} = \left(R + \frac{1}{j\omega C_G}\right) // \left[j\omega L_G + \frac{(\omega M)^2}{j\omega L_2 + \dfrac{1}{j\omega C_2} + a^2 R}\right]$$

con lo que la impedancia buscada es

$$Z_L = Z^*_{Th}$$

# Problema 3

El circuito de la figura, en cuya representación se ha utilizado notación fasorial, funciona en régimen sinusoidal permanente a una frecuencia angular $\omega$. La impedancia Z está compuesta por los elementos mostrados a la derecha.




$\mathbf{V}_G = V_{G\angle 0^\circ}$ ($V_G$ es real y positivo)

**A (0.5 puntos)** Obtened los parámetros de impedancia del cuadripolo, expresándolos en función de Z.

**B (0.5 puntos)** Obtened el valor de la frecuencia de resonancia (al menos uno, si hay varios) del circuito completo.

**C (0.5 puntos)** Obtened los valores a los que tienden el módulo y la fase de $\mathbf{V}_2$ para frecuencias angulares muy bajas.

**D (0.5 puntos)** Obtened los valores a los que tienden el módulo y la fase de $\mathbf{V}_2$ cuando las inductancias y las capacidades tienen valores muy elevados.

Para resolver los apartados C y D se recomienda utilizar aproximaciones razonables antes que cálculos exactos.

---

### *Apartado A*

En el cuadripolo se verifican las relaciones (ecuaciones de malla)

$$\mathbf{V}_1 = \mathbf{I}_1 Z + \mathbf{I}_2 Z$$
$$\mathbf{V}_2 = \mathbf{I}_1 Z + \mathbf{I}_2 (Z + j\omega L_2) \qquad (1)$$

Los parámetros de impedancia satisfacen las relaciones

$$\mathbf{V}_1 = \mathbf{I}_1 z_{11} + \mathbf{I}_2 z_{12}$$
$$\mathbf{V}_2 = \mathbf{I}_1 z_{21} + \mathbf{I}_2 z_{22} \qquad (2)$$

Comparando (1) y (2)

$$z_{11} = z_{12} = z_{21} = Z$$
$$z_{22} = Z + j\omega L_2$$

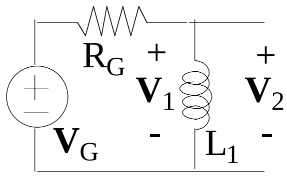
### *Apartado B*

Puede observarse que, si la agrupación $L_2$-$C_2$ está en cortocircuito, este cortocircuito cancela el efecto de Z y la fuente *ve* una impedancia puramente resistiva ($R_G$ en serie con el citado cortocircuito).

En consecuencia, la frecuencia de resonancia del circuito completo es la que provoca el cortocircuito en la agrupación indicada. Es decir,

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L_2 C_2}}$$

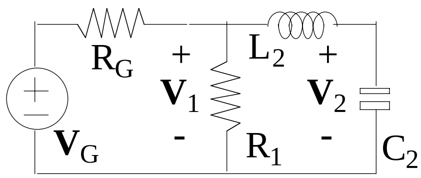
*Apartado C*




Para frecuencias muy bajas, las inductancias y las capacidades tienden a comportarse como cortocircuitos y circuitos abiertos, respectivamente. En consecuencia, el circuito queda en la forma indicada en la figura adjunta, de la que puede deducirse

$$\mathbf{V}_2 \approx \mathbf{V}_1 \approx \frac{\mathbf{V}_G}{R_G} j\omega L_1 \Rightarrow |\mathbf{V}_2| \to \frac{V_G \omega L_1}{R_G} \approx 0 \text{ V}, \angle \mathbf{V}_2 \to 90\ °$$

*Apartado D*



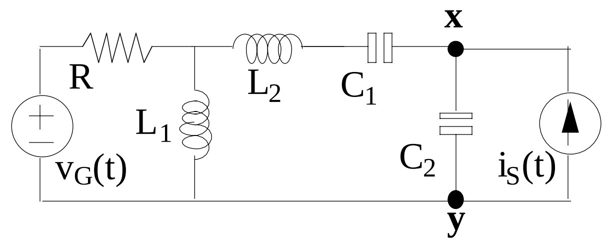

Las inductancias de valores elevados tienden a comportarse como circuitos abiertos, y las capacidades de valores elevados tienden a comportarse como cortocircuitos. En consecuencia, el circuito queda en la forma indicada en la figura adjunta.

Teniendo en cuenta que prácticamente toda la corriente proporcionada por la fuente se va por $R_1$ (debido al circuito abierto que representa $L_2$), se deduce

$$\mathbf{V}_2 \approx - \frac{\mathbf{I}_2}{j\omega C_2} \approx - \left( - \frac{\mathbf{V}_1}{j\omega L_2} \right) \frac{1}{j\omega C_2} \approx - \left( - \frac{R_1}{R_G + R_1} \mathbf{V}_G \right) \left( \frac{1}{j\omega L_2} \right) \frac{1}{j\omega C_2} = - \frac{R_1 \mathbf{V}_G}{(R_G + R_1)\omega^2 L_2 C_2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |\mathbf{V}_2| \to \frac{R_1 V_G}{(R_G + R_1)\omega^2 L_2 C_2} \approx 0 \text{ V}, \angle \mathbf{V}_2 \to 180\ °$$

# Problema 4




$v_G(t) = V_G\cos(\omega_G t)$, $V_G = 1$ V, $\omega_G = 1$ Mrad/s

$i_S(t) = I_S\cos(\omega_S t)$, $I_S = 100$ µA, $\omega_S = 100$ rad/s

$R = 1\ \Omega$

$L_1 = 1$ mH, $L_2 = 1$ µH

$C_1 = 1$ µF, $C_2 = 1$ µF

**A (0.75 puntos)** Obtened el fasor de la tensión entre **x** e **y** cuando sólo está aplicada la fuente de tensión (fuente de corriente desactivada).

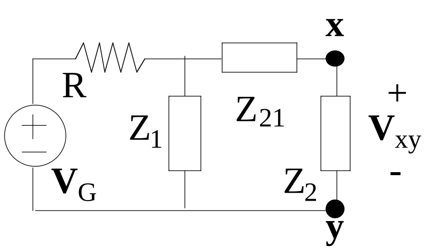
**B (0.75 puntos)** Obtened el fasor de la tensión entre **x** e **y** cuando sólo está aplicada la fuente de corriente (fuente de tensión desactivada).

**C (0.5 puntos)** Obtened la tensión instántanea entre **x** e **y** cuando están aplicadas ambas fuentes.

Se recomienda utilizar aproximaciones razonables antes que cálculos exactos.

---

### *Apartado A*




En las condiciones indicadas, el circuito queda como se muestra en la figura adjunta (se ha desactivado la fuente de corriente, sustituyéndola por un circuito abierto), en la que

$$\mathbf{V}_G = 1\ \text{V}$$

$$Z_1 = j\omega_G L_1 = j10^3\ \Omega$$

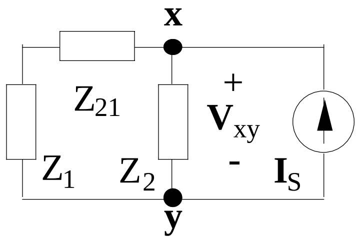
$$Z_{21} = j\omega_G L_2 + \frac{1}{j\omega_G C_1} = j0\ \Omega$$

$$Z_2 = \frac{1}{j\omega_G C_2} = -j\ \Omega$$

Es decir, $Z_{21}$ es un cortocircuito, y $Z_1$ es prácticamente un circuito abierto, ya que es una impedancia de un valor mucho más elevado que los correspondientes a las restantes impedancias presentes en el circuito. En consecuencia,

$$\mathbf{V}_{xy} \approx \frac{Z_2}{R + Z_2} = 0.5 - j0.5\ \text{V}$$

***Apartado B***




En las condiciones indicadas, el circuito queda como se muestra en la figura adjunta (se ha desactivado la fuente de tensión, sustituyéndola por un cortocircuito), en la que

$$\mathbf{I}_S = 100\ \mu\text{A}$$
$$Z_1 = \frac{Rj\omega_S L_1}{R + j\omega_S L_1} \approx j0.1\ \Omega$$
$$Z_{21} = j\omega_S L_2 + \frac{1}{j\omega_S C_1} \approx -\ j10^4\ \Omega$$
$$Z_2 = \frac{1}{j\omega_S C_2} = -\ j10^4\ \Omega$$

La impedancia $Z_{21}$ es mucho mayor que la impedancia $Z_1$, con lo que ésta puede ser considerada despreciable frente a aquélla. Es decir, los elementos pasivos del circuito se reducen a dos impedancias en paralelo del mismo valor. En consecuencia, la corriente proporcionada por la fuente se repartirá de forma igual entre ellas. Así,

$$\mathbf{V}_{xy} = \frac{\mathbf{I}_S}{2} Z_2 = -\ j0.5\ \text{V}$$

***Apartado C***

Se aplica el principio de superposición, con lo que

$$\mathbf{V}_{xy}(\omega_G) = 0.5 - j0.5\ \text{V} \Rightarrow v_{xy}(\omega_G) = \text{Re}\left\{\mathbf{V}_{xy}e^{j\omega_G t}\right\} = 0.5\sqrt{2}\cos(\omega_G t - 45\ °)\ \text{V},\ \omega_G = 1\ \text{Mrad/s}$$
$$\mathbf{V}_{xy}(\omega_S) = -\ j0.5\ \text{V} \Rightarrow v_{xy}(\omega_S) = \text{Re}\left\{\mathbf{V}_{xy}e^{j\omega_S t}\right\} = 0.5\cos(\omega_S t - 90\ °)\ \text{V},\ \omega_S = 100\ \text{rad/s}$$
$$v_{xy}(t) = v_{xy}(\omega_G) + v_{xy}(\omega_S)$$