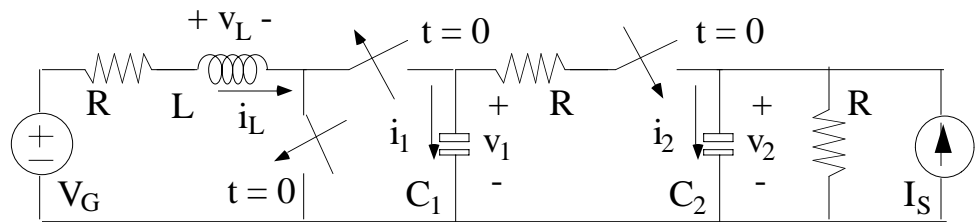


Problema 1

En el circuito de la figura las fuentes son continuas, y son datos las características de todos los elementos.



El circuito ha permanecido mucho tiempo sin cambios antes del cambio de posición de los interruptores. Producido éste, el circuito ya no sufre más cambios. Se pide:

A (1.2 puntos) Hallar v_L , i_L , v_1 y v_2 en los instantes $t = 0^-$, $t = 0^+$ y $t = \infty$.

B (0.9 puntos) Hallar las ecuaciones diferenciales que caracterizan la evolución de i_L , v_1 y v_2 para $t \geq 0$.

C (0.4 puntos) Suponiendo que una de las ecuaciones diferenciales calculadas en el apartado anterior es de la forma

$$RC_1C_2 \frac{d^2v_j}{dt^2} + (2C_1 + C_2) \frac{dv_j}{dt} + \frac{v_j}{R} = K, j = 1 \text{ ó } 2$$

demostrar que la respuesta de la parte del circuito que contiene las capacidades es supercrítica para $t > 0$.

Apartado A

En régimen permanente continuo las capacidades son circuitos abiertos y la inductancia es un cortocircuito

$$i_1(0^-) = 0 \text{ A} = i_2(0^-), v_L(0^-) = 0 \text{ V}$$

Elementos en serie y ecuación de malla

$$i_L(0^-) = i_1(0^-) = 0 \text{ A}$$

$$v_1(0^-) = V_G - Ri_L(0^-) - v_L(0^-) = V_G$$

Ecuación de nudo

$$v_2(0^-) = [I_S - i_2(0^-)]R = RI_S$$

Continuidad de

corrientes en inductancias $i_L(0^+) = i_L(0^-) = 0 \text{ A}$, $v_1(0^+) = v_1(0^-) = V_G$, $v_2(0^+) = v_2(0^-) = RI_S$ y tensiones en capacidades

Ecuación de malla

$$v_L(0^+) = V_G - Ri_L(0^+) = V_G$$

En régimen permanente continuo las capacidades son circuitos abiertos y la inductancia es un cortocircuito

$$i_1(\infty) = 0 \text{ A} = i_2(\infty), v_L(\infty) = 0 \text{ V}$$

Ecuación de malla

$$i_L(\infty) = \frac{V_G - v_L(\infty)}{R} = \frac{V_G}{R}$$

Ecuaciones
de malla y de nudo

$$v_2(\infty) = [I_S - i_1(\infty) - i_2(\infty)]R = RI_S$$

$$v_1(\infty) = v_2(\infty) - Ri_1(\infty) = RI_S$$

Apartado B

Para $t > 0$ se tiene

Ecuación de malla y relación funcional

$$L \frac{di_L}{dt} + Ri_L = V_G \quad (1)$$

Ecuaciones de nudo y de malla
y relaciones funcionales

$$I_S = \frac{v_2}{R} + C_2 \frac{dv_2}{dt} + C_1 \frac{dv_1}{dt} \quad (2)$$

$$v_2 = v_1 + RC_1 \frac{dv_1}{dt} \quad (3)$$

Sustituyendo (3) en (2),

$$RC_1 C_2 \frac{d^2 v_1}{dt^2} + (2C_1 + C_2) \frac{dv_1}{dt} + \frac{v_1}{R} = I_S \quad (4)$$

Sustituyendo (2) en (3),

$$v_1 = -RI_S + 2v_2 + RC_2 \frac{dv_2}{dt} \quad (5)$$

Sustituyendo (5) en (3),

$$RC_1 C_2 \frac{d^2 v_2}{dt^2} + (2C_1 + C_2) \frac{dv_2}{dt} + \frac{v_2}{R} = I_S \quad (6)$$

(1), (4) y (6) son las ecuaciones diferenciales buscadas.

Apartado C

$$a = RC_1 C_2, \quad b = 2C_1 + C_2, \quad c = \frac{1}{R}$$

Ecuación característica

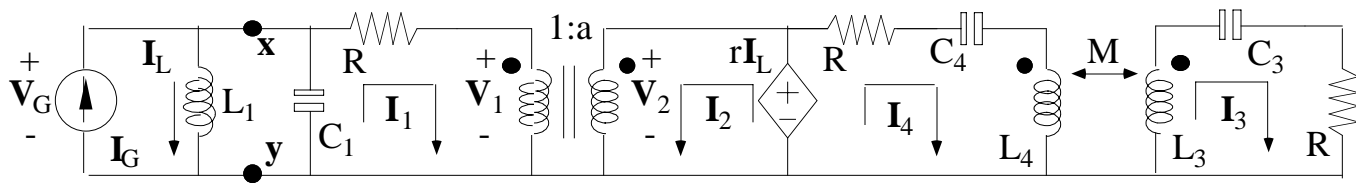
$$\alpha = \frac{b}{2a} = \frac{2C_1 + C_2}{2RC_1 C_2}, \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{c}{a}} = \frac{1}{R\sqrt{C_1 C_2}}$$

Las tres posibles relaciones entre el coeficiente de amortiguamiento y la frecuencia angular de resonancia pueden ser expresadas como

$$\alpha^2 \geq \omega_0^2 \Rightarrow 4C_1^2 + C_2^2 \geq 0$$

Evidentemente, de las tres relaciones sólo una puede verificarse, y ésta es justamente la que corresponde a la condición de respuesta supercrítica.

Problema 2



El circuito de la figura, en cuya representación se ha utilizado notación fasorial, funciona en régimen sinusoidal permanente a una frecuencia angular ω .

A (1.4 puntos) Formulad un sistema algebraico de siete ecuaciones a partir del cual sea posible obtener los valores de \mathbf{I}_1 , \mathbf{I}_2 , \mathbf{I}_3 , \mathbf{I}_4 , \mathbf{V}_1 , \mathbf{V}_2 , y \mathbf{V}_G .

Utilizando los valores $\mathbf{I}_G = 2 \text{ A}$, $\omega = 1 \text{ Mrad/s}$, $a = 2$, $r = 2 \text{ } \Omega$, $R = 1 \text{ } \Omega$, $M = 0 \text{ H}$, $L_1 = 1 \text{ } \mu\text{H}$, $L_3 = 0.1 \text{ } \mu\text{H}$, $L_4 = 0.5 \text{ } \mu\text{H}$, $C_1 = 1 \text{ } \mu\text{F}$, $C_3 = 10 \text{ } \mu\text{F}$, y $C_4 = 2 \text{ } \mu\text{F}$,

B (0.3 puntos) Obtened la tensión instantánea en la fuente dependiente.

C (0.8 puntos) Obtened la impedancia que hay que colocar entre \mathbf{x} e \mathbf{y} para que en ella se disipe la máxima potencia media posible.

Apartado A

$$\mathbf{I}_G = \mathbf{V}_G \left(j\omega C_1 + \frac{1}{j\omega L_1} \right) + \mathbf{I}_1$$

$$\mathbf{V}_G = \mathbf{I}_1 R + \mathbf{V}_1$$

Ecuaciones de malla y nudo

$$\mathbf{V}_2 = \mathbf{I}_4 \left(R + \frac{1}{j\omega C_4} + j\omega L_4 \right) - \mathbf{I}_3 j\omega M$$

$$0 = -\mathbf{I}_4 j\omega M + \mathbf{I}_3 \left(j\omega L_3 + \frac{1}{j\omega C_3} + R \right)$$

Ecuación de la fuente dependiente

$$\mathbf{V}_2 = r\mathbf{I}_L = \frac{r\mathbf{V}_G}{j\omega L_1}$$

Ecuaciones del transformador ideal

$$\mathbf{V}_2 = a\mathbf{V}_1, \mathbf{I}_1 = -a\mathbf{I}_2$$

Apartado B

Puede observarse que la agrupación L_1-C_1 está en resonancia a la frecuencia indicada, con lo que se comporta como un circuito abierto y no circula corriente por el conjunto de la agrupación. En consecuencia,

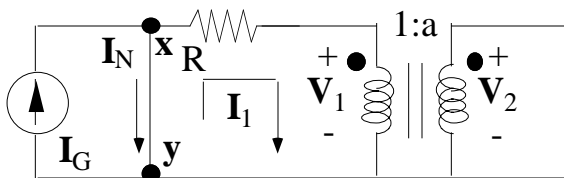
$$\mathbf{I}_1 = \mathbf{I}_G = 2 \text{ A} \Rightarrow \mathbf{V}_G = \mathbf{I}_1 \mathbf{R} + \mathbf{V}_1 = \mathbf{I}_1 \mathbf{R} + \frac{\mathbf{V}_2}{a} = \mathbf{I}_1 \mathbf{R} + \frac{r \mathbf{V}_G}{j a \omega L_1} \Rightarrow \mathbf{V}_G = 1 - j \text{ V}$$

$$\mathbf{V}_D = r \mathbf{I}_L = \frac{r \mathbf{V}_G}{j \omega L_1} = -2 - j2 \text{ V} \Rightarrow v_D(t) = \text{Re} \left\{ \mathbf{V}_D e^{j \omega t} \right\} = 2\sqrt{2} \cos(\omega t - 135^\circ) \text{ V}, \omega = 1 \text{ Mrad/s}$$

Apartado C

La tensión de circuito abierto se calcula con el circuito en las condiciones del apartado anterior. En consecuencia,

$$\mathbf{V}_{\text{Th}} = \mathbf{V}_{xy} = \mathbf{V}_G = 1 - j \text{ V}$$



Para calcular la corriente de cortocircuito, se considera la situación mostrada en la figura adjunta.

El cortocircuito cancela la agrupación L_1-C_1 , con lo que la corriente en dicha inductancia es nula. En consecuencia, la fuente dependiente se comporta como un cortocircuito, que cancela todos los elementos que tiene a su derecha.

$$\mathbf{I}_N = \mathbf{I}_G - \mathbf{I}_1 = \mathbf{I}_G - \left(-\frac{\mathbf{V}_1}{\mathbf{R}} \right) = \mathbf{I}_G - \left(-\frac{\mathbf{V}_2}{a \mathbf{R}} \right) = \mathbf{I}_G = 2 \text{ A}$$

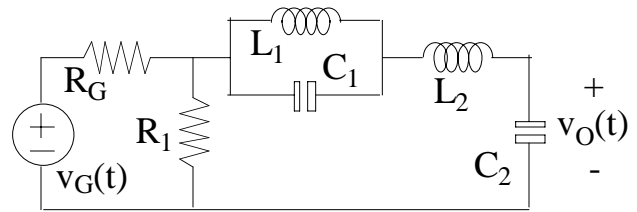
$$\mathbf{Z}_{\text{Th}} = \frac{\mathbf{V}_{\text{Th}}}{\mathbf{I}_N} = 0.5 - j0.5 \Omega$$

La impedancia buscada es

$$\mathbf{Z}_{xy} = \mathbf{Z}_{\text{Th}}^* = 0.5 + j0.5 \Omega$$

Problema 3

En el circuito de la figura se suponen conocidos los valores de los elementos pasivos.



Suponiendo que $v_G(t) = V_G \cos(\omega t)$, siendo V_G dato (real y positivo),

A (0.5 puntos) Obtened al menos un valor de la frecuencia de resonancia (suponiendo que haya más de uno) del circuito, que debe ser finito, no nulo y positivo.

B (0.5 puntos) Obtened los valores a los que tienden el módulo y la fase del fasor representativo de la tensión v_O cuando la frecuencia angular toma valores muy elevados.

C (0.5 puntos) Obtened los valores a los que tienden el módulo y la fase del fasor representativo de v_O cuando las inductancias y las capacidades tienen valores muy bajos.

Suponiendo que $v_G(t) = V_1 \cos(\omega_1 t) + V_2 \cos(\omega_2 t)$, $V_1 = V_2 = 1$ V, $\omega_1 = 1$ Mrad/s, $\omega_2 = 1$ krad/s, $R_G = R_1 = 1$ Ω , $L_1 = 1$ μ H, $L_2 = 1$ mH, $C_1 = 1$ μ F, y $C_2 = 1$ mF,

D (0.5 puntos) Obtened la tensión $v_O(t)$ cuando sólo está aplicada la excitación de frecuencia angular ω_1 .

E (0.5 puntos) Obtened la tensión $v_O(t)$ cuando sólo está aplicada la excitación de frecuencia angular ω_2 .

F (0.5 puntos) Obtened la tensión $v_O(t)$ cuando están aplicadas simultáneamente ambas excitaciones.

Se recomienda utilizar aproximaciones razonables antes que cálculos exactos.

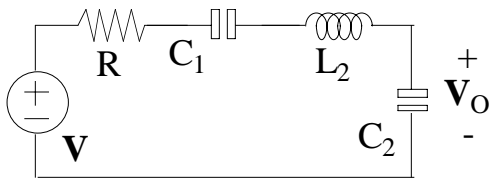
Apartado A

Puede observarse que, si la agrupación L_1 - C_1 está en circuito abierto, éste impide el paso de corriente hacia L_2 y C_2 , con lo que la fuente ve una impedancia puramente resistiva (R_G en serie con R_1).

En consecuencia, una posible frecuencia de resonancia del circuito es la que provoca el circuito abierto en la agrupación indicada. Es decir,

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L_1 C_1}}$$

Apartado B

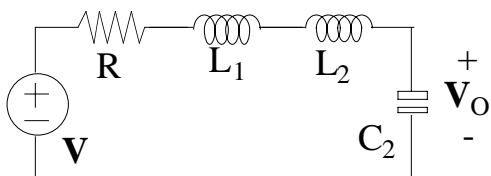


Para frecuencias muy elevadas, las inductancias y las capacidades tienden a comportarse como circuitos abiertos y cortocircuitos, respectivamente. En consecuencia, el circuito queda en la forma indicada en la figura adjunta, en la que se ha utilizado notación fasorial y se ha hecho una doble transformación de fuentes.

$$\mathbf{V} = \frac{R_1}{R_G + R_1} \mathbf{V}_G, \quad R = \frac{R_G R_1}{R_G + R_1}$$

$$\mathbf{V}_O \approx \frac{\frac{1}{j\omega C_2}}{R + \frac{1}{j\omega C_1} + j\omega L_2 + \frac{1}{j\omega C_2}} \mathbf{V} \approx -\frac{\mathbf{V}}{\omega^2 L_2 C_2} \Rightarrow |\mathbf{V}_O| \rightarrow 0 \text{ V}, \quad \angle \mathbf{V}_O \rightarrow 180^\circ$$

Apartado C



Las inductancias de valores bajos tienden a comportarse como cortocircuitos, en tanto que las capacidades de valores bajos tienden a comportarse como circuitos abiertos. En consecuencia, el circuito queda en la forma indicada en la figura adjunta, en la que se ha utilizado notación fasorial y se ha hecho una doble transformación de fuentes.

$$\mathbf{V} = \frac{R_1}{R_G + R_1} \mathbf{V}_G, \quad R = \frac{R_G R_1}{R_G + R_1}$$

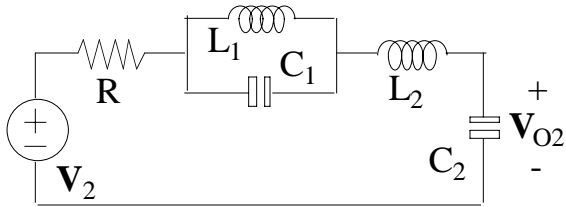
$$\mathbf{V}_O \approx \frac{\frac{1}{j\omega C_2}}{R + j\omega L_1 + j\omega L_2 + \frac{1}{j\omega C_2}} \mathbf{V} \approx \mathbf{V} \Rightarrow |\mathbf{V}_O| \rightarrow |\mathbf{V}|, \quad \angle \mathbf{V}_O \rightarrow 0^\circ$$

Apartado D

A la frecuencia ω_1 , L_1 y C_1 están en resonancia, constituyendo un circuito abierto e impidiendo, por tanto, el paso de corriente hacia L_2 y C_2 . Por tanto,

$$\mathbf{V}_{O1} = 0 \text{ V} \Rightarrow v_{O1}(t) = \text{Re}\left\{\mathbf{V}_{O1} e^{j\omega_1 t}\right\} = 0 \text{ V}$$

Apartado E



$$\mathbf{V}_2 = \frac{R_1}{R_G + R_1} \mathbf{V}_2 = 0.5 \text{ V}, R = \frac{R_G R_1}{R_G + R_1} = 0.5 \Omega$$

A la frecuencia ω_2 , L_2 y C_2 están en resonancia, constituyendo un cortocircuito, con lo que el circuito queda en la forma indicada en la figura adjunta, en la que se ha utilizado notación fasorial y de la que puede deducirse lo que se expone seguidamente.

$$\left| \frac{1}{j\omega_2 C_1} \right| = \left| -j10^3 \right| \Omega \gg R = 0.5 \Omega \gg |j\omega_2 L_1| = \left| j10^{-3} \right| \Omega$$

$$\mathbf{V}_{O2} \approx \frac{\frac{1}{j\omega_2 C_2}}{R + j\omega_2 L_2 + \frac{1}{j\omega_2 C_2}} \mathbf{V}_2 = -\frac{j\mathbf{V}_2}{\omega_2 R C_2} = -j \text{ V} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v_{O2}(t) = \text{Re} \left\{ \mathbf{V}_{O2} e^{j\omega_2 t} \right\} = \cos(\omega_2 t - 90^\circ) \text{ V}, \omega_2 = 1 \text{ krad/s}$$

Apartado F

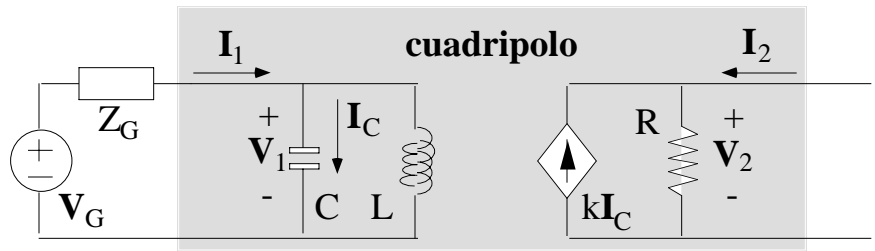
Se aplica el principio de superposición, con lo que

$$v_O(t) = v_{O1}(t) + v_{O2}(t)$$

teniendo $v_{O1}(t)$ y $v_{O2}(t)$ las expresiones indicadas en los apartados D y E, respectivamente.

Problema 4

El circuito de la figura, en cuya representación se ha utilizado notación fasorial, funciona en régimen sinusoidal permanente a una frecuencia angular ω .



- A (0.75 puntos)** Obtened los parámetros de admitancia del cuadripolo.
B (0.75 puntos) Obtened los parámetros de transmisión (abcd) del cuadripolo.
C (0.5 puntos) Obtened el valor de V_2 en el circuito completo en función de los parámetros de impedancia del cuadripolo cuando la salida de éste está en circuito abierto.

Apartado A

En el circuito se verifican las relaciones (ecuaciones de nudo)

$$I_1 = V_1 \left(j\omega C + \frac{1}{j\omega L} \right) \quad (1)$$

$$I_2 = -kI_C + \frac{V_2}{R} = -kV_1 j\omega C + \frac{V_2}{R} \quad (2)$$

Los parámetros de admitancia satisfacen las relaciones

$$I_1 = V_1 y_{11} + V_2 y_{12} \quad (3)$$

$$I_2 = V_1 y_{21} + V_2 y_{22} \quad (4)$$

Comparando (1-2) y (3-4)

$$y_{11} = j\omega C + \frac{1}{j\omega L}, y_{12} = 0 \text{ S}$$

$$y_{21} = -kj\omega C, y_{22} = \frac{1}{R}$$

Apartado B

Reordenando (2) y sustituyendo el resultado en (1)

$$V_1 = \frac{V_2}{kj\omega RC} - \frac{I_2}{kj\omega C} \quad (5)$$

$$I_1 = \frac{V_2}{kR} \left(1 - \frac{1}{\omega^2 LC} \right) - \frac{I_2}{k} \left(1 - \frac{1}{\omega^2 LC} \right) \quad (6)$$

Los parámetros de transmisión (abcd) satisfacen las relaciones

$$V_1 = V_2 a - I_2 b \quad (7)$$

$$I_1 = V_2 c - I_2 d \quad (8)$$

Comparando (5-6) y (7-8)

$$a = \frac{1}{kj\omega RC}, b = \frac{1}{kj\omega C}$$

$$c = \frac{1}{kR} \left(1 - \frac{1}{\omega^2 LC} \right), d = \frac{1}{k} \left(1 - \frac{1}{\omega^2 LC} \right)$$

Apartado C

En el circuito se verifican las relaciones

$$\mathbf{V}_G = \mathbf{I}_1 \mathbf{Z}_G + \mathbf{V}_1 \quad (9)$$

$$\mathbf{V}_1 = \mathbf{I}_1 \mathbf{z}_{11} + \mathbf{I}_2 \mathbf{z}_{12} \quad (10)$$

$$\mathbf{V}_2 = \mathbf{I}_1 \mathbf{z}_{21} + \mathbf{I}_2 \mathbf{z}_{22} \quad (11)$$

$$\mathbf{I}_2 = 0 \text{ A} \quad (12)$$

Sustituyendo (12) en (11)

$$\mathbf{I}_1 = \frac{\mathbf{V}_2}{\mathbf{z}_{21}} \quad (13)$$

Sustituyendo (12-13) en (10)

$$\mathbf{V}_1 = \frac{\mathbf{z}_{11}}{\mathbf{z}_{21}} \mathbf{V}_2 \quad (14)$$

Sustituyendo (13-14) en (9)

$$\mathbf{V}_2 = \frac{\mathbf{z}_{21}}{\mathbf{Z}_G + \mathbf{z}_{11}} \mathbf{V}_G$$