

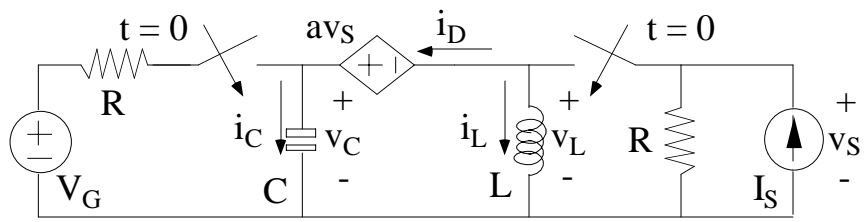
Análisis de redes

(titulación: Ingeniero de Telecomunicación)

Examen final de junio de 2005

Problema 1

En el circuito de la figura las fuentes independientes son continuas, y son datos las características de todos los elementos.



El circuito ha permanecido mucho tiempo sin cambios antes del cambio de posición de los interruptores. Producido éste, el circuito ya no sufre más cambios.

A (1.2 puntos) Hallad v_C , i_C , v_L e i_L en los instantes $t = 0^-$, $t = 0^+$ y $t = \infty$.

Suponiendo que $a = 1$, $L = 1$ H, $i_L(0) = 0$ A, $i_L(\infty) = 2$ A, $v_C(0) = 1$ V, $v_C(\infty) = 0$ V; que la variación de energía en la fuente de corriente entre los instantes $t = 0$ y $t = \infty$ es -2 J, y que la ecuación diferencial que caracteriza la evolución de i_L para $t \geq 0$ es

$$2 \frac{d^2 i_L}{dt^2} + 3 \frac{di_L}{dt} + i_L = 2 \text{ A}$$

B (0.8 puntos) Hallad las expresiones temporales que caracterizan la evolución de v_C e i_L para $t \geq 0$.

C (0.5 puntos) Hallad el valor de I_S .

Apartado A

En régimen permanente continuo la inductancia es un cortocircuito y la capacidad es un circuito abierto

$$v_L(0^-) = 0 \text{ V}, i_C(0^-) = 0 \text{ A}$$

Elementos en serie

$$i_L(0^-) = -i_C(0^-) = 0 \text{ A}$$

Ecuaciones de malla

$$v_S(0^-) = I_S R \Rightarrow v_C(0^-) = a v_S(0^-) + v_L(0^-) = a I_S R$$

Continuidad de corrientes en inductancias y tensiones en capacidades

$$i_L(0^+) = i_L(0^-) = 0 \text{ A}, v_C(0^+) = v_C(0^-) = a I_S R$$

Ecuación de malla y elementos en paralelo

$$v_C(0^+) = a v_S(0^+) + v_S(0^+) \Rightarrow v_S(0^+) = \frac{a I_S R}{a + 1} = v_L(0^+)$$

Ecuaciones de nudo

$$I_S = \frac{v_S(0^+)}{R} + i_L(0^+) + i_D(0^+) \Rightarrow i_D(0^+) = \frac{I_S}{a + 1}$$

$$\frac{V_G - v_C(0^+)}{R} = i_C(0^+) - i_D(0^+) \Rightarrow i_C(0^+) = \frac{V_G}{R} + I_S \left(\frac{1}{a + 1} - a \right)$$

En régimen permanente continuo
la inductancia es un cortocircuito
y la capacidad es un circuito abierto

$$v_L(\infty) = 0 \text{ V}, i_C(\infty) = 0 \text{ A}$$

Elementos en paralelo

$$v_S(\infty) = v_L(\infty) = 0 \text{ V}$$

Ecuación de malla

$$v_C(\infty) = av_S(\infty) + v_L(\infty) = 0 \text{ V}$$

Ecuaciones de nudo

$$\frac{V_G - v_C(\infty)}{R} = i_C(\infty) - i_D(\infty) \Rightarrow i_D(\infty) = -\frac{V_G}{R}$$

$$I_S = \frac{v_S(\infty)}{R} + i_L(\infty) + i_D(\infty) \Rightarrow i_L(\infty) = I_S + \frac{V_G}{R}$$

Apartado B

Para $t > 0$ se tiene

Ecuación característica

$$a = 2 \text{ s}^2, b = 3 \text{ s}, c = 1$$

$$\alpha = \frac{b}{2a} = \frac{3}{4} \text{ s}^{-1}, \omega_0 = \sqrt{\frac{c}{a}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ rad/s}$$

Tipo de respuesta

$$\alpha^2 > \omega_0^2 \Rightarrow \text{respuesta supercrítica}$$

Expresión temporal de i_L

$$i_L = i_{Lf} + Ae^{s_1 t} + Be^{s_2 t} \quad (1a)$$

$$s_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Rightarrow s_1 = -1 \text{ s}^{-1}, s_2 = -0.5 \text{ s}^{-1} \quad (1b)$$

Elementos en paralelo,
ecuación de malla
y relación funcional

$$v_S = v_L, v_C = av_S + v_L, v_L = L \frac{di_L}{dt} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v_C = (a + 1)L \frac{di_L}{dt} \quad (2)$$

Sustituyendo (1) en (2)

$$v_C = -2(Ae^{s_1 t} + 0.5Be^{s_2 t}) \quad (3)$$

Condiciones iniciales y finales:

$$\left. \begin{array}{l} 0 \text{ A} = i_L(0) = i_{Lf} + A + B \\ 2 \text{ A} = i_L(\infty) = i_{Lf} \\ 1 \text{ V} = v_C(0) = -2A - B \end{array} \right| \Rightarrow \left. \begin{array}{l} i_{Lf} = 2 \text{ A} \\ A = 1 \text{ A} \\ B = -3 \text{ A} \end{array} \right| \quad (4)$$

Sustituyendo (4) en (1) y (3),
se obtienen las expresiones temporales
buscadas

$$i_L(t) = 2 + e^{-t} - 3e^{-0.5t} \text{ A (t en s)}$$

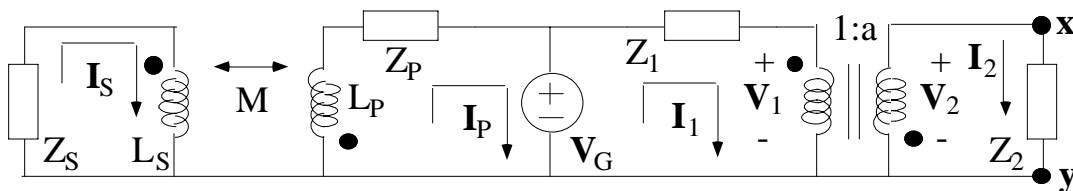
$$v_C(t) = -2e^{-t} + 3e^{-0.5t} \text{ V (t en s)}$$

Apartado C

Para $t \geq 0$ se tiene

$$p_S(t) = -I_S v_S(t) = -I_S v_L(t)$$
$$-2 \text{ J} = w_S = \int_0^{\infty} p_S(t) dt = -I_S \int_0^{\infty} L \frac{di_L}{dt} dt = -I_S L [i_L]_0^{\infty} \Rightarrow I_S = 1 \text{ A}$$

Problema 2



El circuito de la figura, en cuya representación se ha utilizado notación fasorial, funciona en régimen sinusoidal permanente a una frecuencia angular ω conocida y finita. Todos los elementos del circuito tienen valores finitos no nulos, y a es un número real.

A (1.2 puntos) Formulad un sistema algebraico de seis ecuaciones a partir del cual sea posible obtener los valores de \mathbf{I}_S , \mathbf{I}_P , \mathbf{I}_1 , \mathbf{I}_2 , \mathbf{V}_1 , y \mathbf{V}_2 .

B (0.5 puntos) Obtened el valor de Z_S que anula la corriente \mathbf{I}_P . ¿Con qué elemento de circuito habrá de realizarse esa impedancia? ¿Cuánto valdrá dicho elemento?

C (0.8 puntos) Obtened el valor que ha de tener Z_2 para que en ella se disipe la máxima potencia media posible. ¿Cuánto valdrá esa potencia?

Apartado A

Ecuaciones de malla

$$\begin{aligned} 0 &= \mathbf{I}_S(Z_S + j\omega L_S) + \mathbf{I}_P j\omega M \\ 0 &= \mathbf{I}_S j\omega M + \mathbf{I}_P(j\omega L_P + Z_P) + \mathbf{V}_G \\ \mathbf{V}_G &= \mathbf{I}_1 Z_1 + \mathbf{V}_1 \\ \mathbf{V}_2 &= \mathbf{I}_2 Z_2 \end{aligned}$$

Ecuaciones del transformador ideal

$$\mathbf{V}_2 = -a\mathbf{V}_1, \mathbf{I}_1 = -a\mathbf{I}_2$$

Apartado B

Reflejando impedancias en el transformador lineal, se tiene

$$\mathbf{V}_G = -\mathbf{I}_P \left[Z_P + j\omega L_P + \frac{(\omega M)^2}{Z_S + j\omega L_S} \right] = -\mathbf{I}_P Z \Rightarrow \mathbf{I}_P = -\frac{\mathbf{V}_G}{Z}$$

$$\mathbf{I}_P = 0 \text{ A} \Rightarrow Z = \infty \Omega \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\text{puesto que } \omega, M, L_P \text{ y } Z_P \text{ son finitas}) Z_S + j\omega L_S = 0 \Omega \Rightarrow Z_S = -j\omega L_S$$

Puesto que la impedancia resultante es una reactancia pura negativa, habrá de ser implementada mediante una capacidad, con lo que

$$Z_S = \frac{1}{j\omega C_S} = -j\omega L_S \Rightarrow C_S = \frac{1}{\omega^2 L_S}$$

Apartado C

Es necesario calcular el valor de la impedancia equivalente de Thèvenin entre **x** e **y**. El cálculo ha de hacerse sin tener en cuenta la presencia de Z_2 , ya que es el elemento a determinar.

Puesto que el circuito carece de fuentes dependientes, se desactiva la independiente (se sustituye por un cortocircuito), y se calcula la impedancia total entre **x** e **y**. El cortocircuito de la fuente desactivada elimina la influencia del transformador lineal; reflejando impedancias en el ideal (obsérvese que la reflexión se hace de primario a secundario), se tiene

$$Z_{Th} = a^2 Z_1 \Rightarrow Z_2 = Z_{Th}^* = a^2 Z_1^*, \text{ ya que } a \text{ es real}$$

Para calcular la potencia es necesario obtener previamente la tensión equivalente de Thèvenin entre **x** e **y**. Dejando estos dos puntos en circuito abierto, se tiene

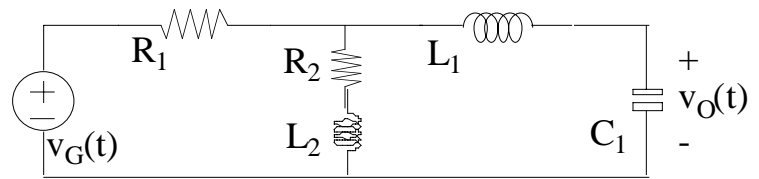
$$\mathbf{I}_2 = 0 \text{ A} \Rightarrow \mathbf{I}_1 = -a\mathbf{I}_2 = 0 \text{ A} \Rightarrow \mathbf{V}_1 = \mathbf{V}_G - \mathbf{I}_1 Z_1 = \mathbf{V}_G \Rightarrow \mathbf{V}_2 = -a\mathbf{V}_1 = -a\mathbf{V}_G = \mathbf{V}_{Th}$$

y la potencia buscada es

$$P_{\max} = \frac{|\mathbf{V}_{Th}|^2}{8\text{Re}\{Z_{Th}\}} = \frac{|\mathbf{V}_G|^2}{8\text{Re}\{Z_1\}}$$

Problema 3

En el circuito de la figura son datos los valores de todos los elementos pasivos.



Suponiendo que $v_G(t) = V_G \cos(\omega t + \varphi)$ y siendo V_G (real y positivo) y φ datos, hallad (para resolver los apartados **B** y **C** se recomienda utilizar aproximaciones razonables antes que cálculos exactos)

A (0.5 puntos) Un valor de la frecuencia angular de resonancia (suponiendo que haya más de uno), que debe ser finito, no nulo, y positivo.

B (0.5 puntos) Los valores a los que tienden el módulo y la fase del fasor representativo de $v_O(t)$ cuando la frecuencia angular toma valores muy bajos.

C (0.5 puntos) Los valores a los que tienden el módulo y la fase del fasor representativo de $v_O(t)$ cuando la frecuencia angular toma valores muy elevados.

Suponiendo que $v_G(t) = V_D + V_A \cos(\omega t)$, siendo $V_D = 1 \text{ V} = V_A$, $\omega = 1 \text{ Mrad/s}$, $C_1 = 1 \text{ }\mu\text{F}$, $L_1 = 1 \text{ }\mu\text{H} = L_2$, $R_1 = 1 \text{ }\Omega = R_2$,

D (1.5 puntos) Obtened la expresión temporal de la potencia en la capacidad.

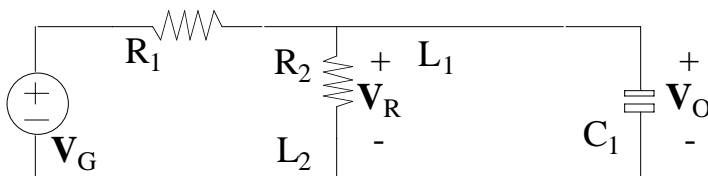
Apartado A

Puede observarse que, si la agrupación L_1-C_1 está en cortocircuito, este cortocircuito cancela el efecto de R_2 y L_2 , y la fuente ve una impedancia puramente resistiva (R_1 en serie con el citado cortocircuito).

En consecuencia, una posible frecuencia de resonancia del circuito es la que provoca el cortocircuito en la agrupación indicada. Es decir,

$$\omega_0 = + \frac{1}{\sqrt{L_1 C_1}}$$

Apartado B

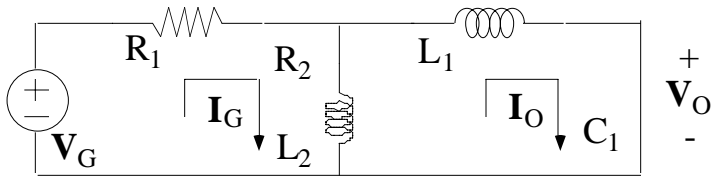


$$\mathbf{V}_G = V_G \angle \varphi$$

Para frecuencias muy bajas, las inductancias y las capacidades tienden a comportarse como cortocircuitos y circuitos abiertos, respectivamente. En consecuencia, el circuito queda en la forma indicada en la figura adjunta, en la que se ha utilizado notación fasorial.

$$\mathbf{V}_O \approx \mathbf{V}_R \approx \frac{R_2}{R_1 + R_2} \mathbf{V}_G \Rightarrow |\mathbf{V}_O| \rightarrow \frac{R_2}{R_1 + R_2} V_G, \angle \mathbf{V}_O \rightarrow \varphi$$

Apartado C



$$\mathbf{V}_G = \mathbf{V}_{G\angle\varphi}$$

$$0 \approx -\mathbf{I}_G j\omega L_2 + \mathbf{I}_O(j\omega L_2 + j\omega L_1) \Rightarrow (\mathbf{I}_G - \mathbf{I}_O)j\omega L_2 \approx \mathbf{I}_O j\omega L_1$$

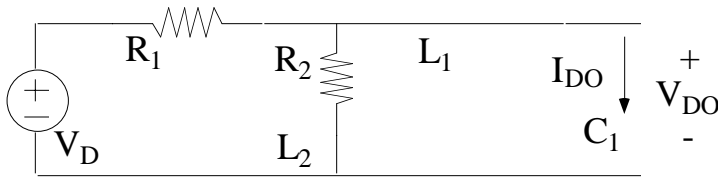
$$\mathbf{V}_G \approx \mathbf{I}_G(R_1 + j\omega L_2) - \mathbf{I}_O j\omega L_2 \approx (\mathbf{I}_G - \mathbf{I}_O)j\omega L_2 \approx \mathbf{I}_O j\omega L_1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathbf{I}_O \approx \frac{\mathbf{V}_G}{j\omega L_1} \Rightarrow \mathbf{V}_O = \frac{\mathbf{I}_O}{j\omega C_1} \approx -\frac{\mathbf{V}_G}{\omega^2 L_1 C_1} \Rightarrow |\mathbf{V}_O| \rightarrow 0 \text{ V}, \angle \mathbf{V}_O \rightarrow \varphi - 180^\circ$$

Para frecuencias muy altas, las inductancias y las capacidades tienden a comportarse como circuitos abiertos y cortocircuitos, respectivamente. En consecuencia, el circuito queda en la forma indicada en la figura adjunta, en la que se ha utilizado notación fasorial.

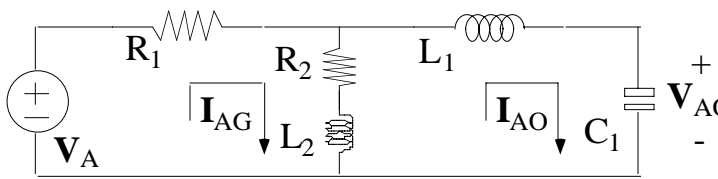
Apartado D

Puesto que la fuente contiene dos excitaciones de distinta naturaleza, habrá que aplicar el principio de superposición.



$$\mathbf{I}_{DO} = 0 \text{ A}, \mathbf{V}_{DO} = \frac{\mathbf{R}_2}{\mathbf{R}_1 + \mathbf{R}_2} \mathbf{V}_D = 0.5 \text{ V}$$

En continua, las inductancias son cortocircuitos y las capacidades son circuitos abiertos. En consecuencia, el circuito queda en la forma indicada en la figura adjunta, a partir de la cual puede deducirse



$$\mathbf{V}_A = \mathbf{V}_A = 1 \text{ V}$$

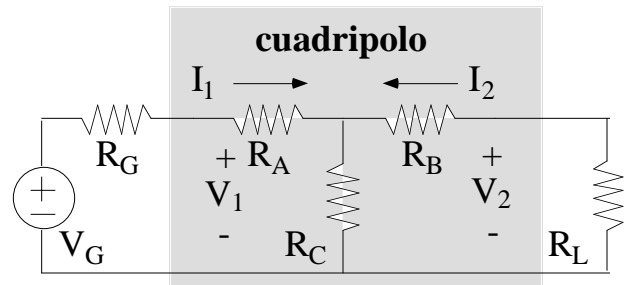
Para la componente sinusoidal de la excitación se tiene la situación mostrada en la figura adjunta, en la que se ha utilizado notación fasorial, a partir de la cual puede deducirse

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_A &= \mathbf{I}_{AG}(\mathbf{R}_1 + \mathbf{R}_2 + j\omega L_2) - \mathbf{I}_{AO}(\mathbf{R}_2 + j\omega L_2) \\ 0 &= -\mathbf{I}_{AG}(\mathbf{R}_2 + j\omega L_2) + \mathbf{I}_{AO} \left(\mathbf{R}_2 + j\omega L_2 + j\omega L_1 + \frac{1}{j\omega C_1} \right) \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} \mathbf{I}_{AO} &= 1 \text{ A} \\ \mathbf{V}_{AO} &= \frac{\mathbf{I}_{AO}}{j\omega C_1} = -j \text{ V} \end{aligned}$$

$$p_C(t) = \left[\mathbf{I}_{DO} + \text{Re} \left\{ \mathbf{I}_{AO} e^{j\omega t} \right\} \right] \left[\mathbf{V}_{DO} + \text{Re} \left\{ \mathbf{V}_{AO} e^{j\omega t} \right\} \right] = \cos(\omega t) [0.5 + \cos(\omega t - 90^\circ)] \text{ W}$$

Problema 4

En el circuito de la figura la fuente es continua.



- A (0.5 puntos)** Hallad las condiciones para que el cuadripolo sea simétrico.
B (0.5 puntos) Obtened los parámetros de transmisión del cuadripolo.
C (1 punto) El cuadripolo de la figura es sustituido por otro cuya composición interna es desconocida. Sabiendo que dicho cuadripolo es simétrico, y que $V_G = 8 \text{ V}$, $I_1 = 3 \text{ A}$, $V_2 = 1 \text{ V}$, $R_G = R_L = 1 \Omega$, hallad los parámetros z de tal cuadripolo.
-

Apartado A

En el cuadripolo se verifican las relaciones

$$V_1 = I_1(R_A + R_C) + I_2R_C \quad (1a)$$

$$V_2 = I_1R_C + I_2(R_B + R_C) \quad (1b)$$

Comparando estas expresiones con las que definen los parámetros z

$$V_1 = I_1z_{11} + I_2z_{12} \quad (2a)$$

$$V_2 = I_1z_{21} + I_2z_{22} \quad (2b)$$

se obtiene

$$z_{11} = R_A + R_C, z_{12} = R_C, z_{21} = R_C, z_{22} = R_A + R_C$$

Las condiciones para que el cuadripolo sea simétrico son

$$\text{recíproco} \Rightarrow z_{12} = z_{21} \Rightarrow \text{se cumple siempre}$$

$$\text{simétrico} \Rightarrow z_{11} = z_{22} \Rightarrow R_A = R_B$$

Apartado B

La ecuación (1b) puede ser reescrita como

$$I_1 = \frac{V_2}{R_C} - I_2 \frac{R_B + R_C}{R_C} \quad (3b)$$

Sustituyendo este resultado en (1a) se obtiene

$$V_1 = V_2 \frac{R_A + R_C}{R_C} - I_2 \frac{R_A R_B + R_A R_C + R_B R_C}{R_C} \quad (3a)$$

Comparando estas expresiones con las que definen los parámetros abcd

$$V_1 = V_2 a - I_2 b \quad (4a)$$

$$I_1 = V_2 c - I_2 d \quad (4b)$$

se obtiene

$$a = \frac{R_A + R_C}{R_C}, b = \frac{R_A R_B + R_A R_C + R_B R_C}{R_C}, c = \frac{1}{R_C}, d = \frac{R_B + R_C}{R_C}$$

Apartado C

En el circuito se verifican las relaciones

$$V_G = I_1 R_G + V_1 \Rightarrow V_1 = 5 \text{ V}$$

$$V_2 = -I_2 R_L \Rightarrow I_2 = -1 \text{ A}$$

Teniendo en cuenta la definición de los parámetros z y las condiciones de simetría indicadas en el apartado A, puede escribirse

$$\begin{array}{l} V_1 = I_1 z_{11} + I_2 z_{12} \\ V_2 = I_1 z_{12} + I_2 z_{11} \end{array} \quad \left| \Rightarrow \right| \quad \begin{array}{l} z_{11} = 2 \Omega = z_{22} \\ z_{12} = 1 \Omega = z_{21} \end{array}$$