

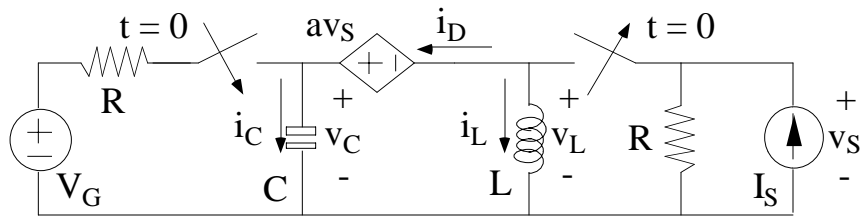
# **Análisis de redes**

(titulación: Ingeniero de Telecomunicación)

**Examen final de septiembre de 2005**

# Problema 1

En el circuito de la figura las fuentes independientes son continuas, y son datos las características de todos los elementos.



El circuito ha permanecido mucho tiempo sin cambios antes del cambio de posición de los interruptores. Producido éste, el circuito ya no sufre más cambios.

**A (1.2 puntos)** Hallad  $v_C$ ,  $i_C$ ,  $v_L$  e  $i_L$  en los instantes  $t = 0^-$ ,  $t = 0^+$  y  $t = \infty$ .

Suponiendo que  $V_G = 1 \text{ V}$ ,  $R = 1 \Omega$ ,  $i_L(0) = 1 \text{ A}$ ,  $i_L(\infty) = 0 \text{ A}$ ,  $v_C(0) = 0 \text{ V}$ ,  $v_C(\infty) = 1 \text{ V}$ ; que la variación de energía en la capacidad entre los instantes  $t = 0$  y  $t = \infty$  es  $1/3 \text{ J}$ , y que la ecuación diferencial que caracteriza la evolución de  $v_C$  para  $t \geq 0$  es

$$2 \frac{d^2 v_C}{dt^2} + 3 \frac{dv_C}{dt} + v_C = 1 \text{ V}$$

**B (0.5 puntos)** Hallad el valor de  $C$ .

**C (0.8 puntos)** Hallad las expresiones temporales que caracterizan la evolución de  $v_C$  e  $i_L$  para  $t \geq 0$  (si no se ha resuelto el apartado anterior, supóngase  $C = 2/3 \text{ F}$ ).

## Apartado A

En régimen permanente continuo la inductancia es un cortocircuito y la capacidad es un circuito abierto

$$v_L(0^-) = 0 \text{ V}, i_C(0^-) = 0 \text{ A}$$

Elementos en serie y paralelo

$$i_D(0^-) = i_C(0^-) = 0 \text{ A}; v_S(0^-) = v_L(0^-) = 0 \text{ V}$$

Ecuaciones de nudo y de malla

$$I_S = \frac{v_S(0^-)}{R} + i_L(0^-) + i_D(0^-) \Rightarrow i_L(0^-) = I_S$$

$$v_C(0^-) = av_S(0^-) + v_L(0^-) = 0 \text{ V}$$

Continuidad de corrientes en inductancias y tensiones en capacidades

$$i_L(0^+) = i_L(0^-) = I_S, v_C(0^+) = v_C(0^-) = 0 \text{ V}$$

Elementos en serie

$$i_D(0^+) = -i_L(0^+) = -I_S; v_S(0^+) = I_S R$$

Ecuaciones de nudo y de malla

$$\frac{V_G - v_C(0^+)}{R} = i_C(0^+) - i_D(0^+) \Rightarrow i_C(0^+) = \frac{V_G}{R} - I_S$$

$$v_C(0^+) = av_S(0^+) + v_L(0^+) \Rightarrow v_L(0^+) = -aI_S R$$

En régimen permanente continuo  
la inductancia es un cortocircuito  
y la capacidad es un circuito abierto

$$v_L(\infty) = 0 \text{ V}, i_C(\infty) = 0 \text{ A}$$

Elementos en serie  
y ecuación de malla

$$v_S(\infty) = I_S R$$

$$v_C(\infty) = a v_S(\infty) + v_L(\infty) = a I_S R$$

Ecuación de nudo  
y elementos en serie

$$\frac{V_G - v_C(\infty)}{R} = i_C(\infty) - i_D(\infty) \Rightarrow i_D(\infty) = a I_S - \frac{V_G}{R}$$

$$i_L(\infty) = -i_D(\infty) = \frac{V_G}{R} - a I_S$$

### ***Apartado B***

Para  $t \geq 0$  se cumple, teniendo en cuenta la relación funcional de la capacidad,

$$p_C(t) = i_C(t)v_C(t)$$

$$\frac{1}{3} \text{ J} = w_C = \int_0^{\infty} p_C(t) dt = C \int_0^{\infty} v_C \frac{dv_C}{dt} dt = \frac{C}{2} [v_C^2]_0^{\infty} \Rightarrow C = \frac{2}{3} \text{ F}$$

### ***Apartado C***

Para  $t > 0$  se tiene

Ecuación característica

$$a = 2 \text{ s}^2, b = 3 \text{ s}, c = 1$$

$$\alpha = \frac{b}{2a} = \frac{3}{4} \text{ s}^{-1}, \omega_0 = \sqrt{\frac{c}{a}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ rad/s}$$

Tipo de respuesta

$$\alpha^2 > \omega_0^2 \Rightarrow \text{respuesta supercrítica}$$

Expresión temporal de  $v_C$

$$v_C = v_{Cf} + A e^{s_1 t} + B e^{s_2 t} \quad (1a)$$

$$s_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Rightarrow s_1 = -1 \text{ s}^{-1}, s_2 = -0.5 \text{ s}^{-1} \quad (1b)$$

Ecuación de nudo  
y relación funcional

$$\frac{V_G - v_C}{R} = i_C + i_L = C \frac{dv_C}{dt} + i_L \quad (2)$$

Sustituyendo (1) en (2)

$$i_L = 1 - v_{Cf} - \frac{A e^{s_1 t}}{3} - \frac{2B e^{s_2 t}}{3} \quad (3)$$

Condiciones iniciales y finales:

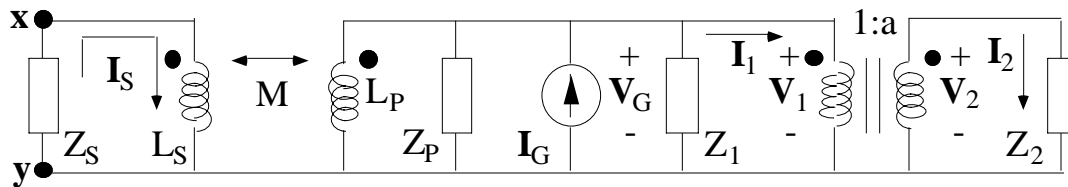
$$\begin{array}{l|l} \begin{array}{l} 0 \text{ V} = v_C(0) = v_{Cf} + A + B \\ 1 \text{ V} = v_C(\infty) = v_{Cf} \\ 1 \text{ A} = i_L(0) = 1 - v_{Cf} - \frac{A}{3} - \frac{2B}{3} \end{array} & \Rightarrow & \begin{array}{l} v_{Cf} = 1 \text{ V} \\ A = 1 \text{ V} \\ B = -2 \text{ V} \end{array} \end{array} \quad (4)$$

Sustituyendo (4) en (1) y (3),  
se obtienen las expresiones temporales  
buscadas

$$v_C(t) = 1 + e^{-t} - 2e^{-0.5t} \text{ V (t en s)}$$

$$i_L(t) = -\frac{e^{-t}}{3} + \frac{4e^{-0.5t}}{3} \text{ A (t en s)}$$

## Problema 2



El circuito de la figura, en cuya representación se ha utilizado notación fasorial, funciona en régimen sinusoidal permanente a una frecuencia angular  $\omega$  conocida y finita. Todos los elementos del circuito tienen valores finitos no nulos, y  $a$  es un número real.

**A (1.2 puntos)** Formulad un sistema algebraico de seis ecuaciones a partir del cual sea posible obtener los valores de  $\mathbf{I}_S$ ,  $\mathbf{V}_G$ ,  $\mathbf{I}_1$ ,  $\mathbf{I}_2$ ,  $\mathbf{V}_1$ , y  $\mathbf{V}_2$ .

**B (0.8 puntos)** Obtened el valor de  $Z_S$  que anula la corriente  $\mathbf{I}_2$ . ¿Con qué elemento de circuito habrá de realizarse esa impedancia? ¿Cuánto valdrá dicho elemento?

**C (0.5 puntos)** Obtened el valor que ha de tener  $Z_S$  para que en ella se disipe la máxima potencia media posible.

### Apartado A

Ecuaciones de malla  
(reflejando impedancias  
en el transformador lineal)  
y elementos en paralelo

$$0 = \mathbf{I}_S(Z_S + j\omega L_S) + \frac{\mathbf{V}_G}{\frac{(\omega M)^2}{Z_S + j\omega L_S} + j\omega L_P} j\omega M$$

$$\mathbf{V}_2 = \mathbf{I}_2 Z_2$$

Ecuación de nudo  
(reflejando impedancias  
en el transformador lineal)

$$\mathbf{I}_G = \mathbf{V}_G \left[ \frac{1}{\frac{(\omega M)^2}{Z_S + j\omega L_S} + j\omega L_P} + \frac{1}{Z_P} + \frac{1}{Z_1} \right] + \mathbf{I}_1$$

Elementos en paralelo

$$\mathbf{V}_1 = \mathbf{V}_G$$

Ecuaciones del transformador ideal

$$\mathbf{V}_2 = a\mathbf{V}_1, \mathbf{I}_1 = a\mathbf{I}_2$$

### Apartado B

Reflejando impedancias en el transformador lineal, se tiene

$$\mathbf{I}_G = \mathbf{V}_G \left[ \frac{1}{\frac{(\omega M)^2}{Z_S + j\omega L_S} + j\omega L_P} + \frac{1}{Z_P} + \frac{1}{Z_1} \right] + \mathbf{I}_1 = \mathbf{V}_G \left( \frac{1}{Z} + \frac{1}{Z_P} + \frac{1}{Z_1} \right) + \mathbf{I}_1 \quad (1)$$

Por otro lado,

$$\mathbf{I}_2 = 0 \text{ A} \Rightarrow \mathbf{V}_2 = \mathbf{I}_2 \mathbf{Z}_2 = 0 \text{ V}, \mathbf{I}_1 = a \mathbf{I}_2 = 0 \text{ A} \Rightarrow \mathbf{V}_G = \mathbf{V}_1 = \frac{\mathbf{V}_2}{a} = 0 \text{ V}$$

Para que se verifique (1) con  $\mathbf{I}_G$  no nulo siendo  $\mathbf{V}_G$  e  $\mathbf{I}_1$  nulos, el término entre corchetes ha de tener un valor infinito. En consecuencia, y ya que  $\mathbf{Z}_P$  y  $\mathbf{Z}_1$  tienen valores finitos no nulos, ha de verificarse

$$\mathbf{Z} = 0 \ \Omega \Rightarrow \frac{(\omega M)^2}{\mathbf{Z}_S + j\omega L_S} + j\omega L_P = 0 \ \Omega \Rightarrow \mathbf{Z}_S = j \frac{\omega(M^2 - L_S L_P)}{L_P}$$

Es decir,  $\mathbf{Z}_S$  ha de ser una reactancia pura de valor negativo (ya que, por las propiedades del transformador lineal,  $M^2 < L_S L_P$ ). Por tanto, habrá de ser implementada mediante una capacidad, con lo que

$$\mathbf{Z}_S = \frac{1}{j\omega C_S} = -j\omega \frac{(L_S L_P - M^2)}{L_P} \Rightarrow C_S = \frac{L_P}{\omega^2(L_S L_P - M^2)}$$

### *Apartado C*

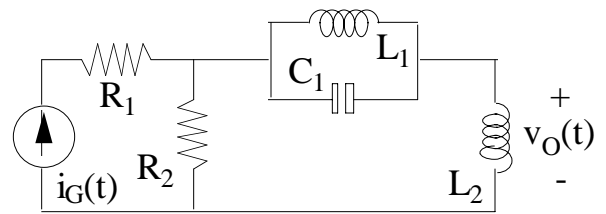
Es necesario calcular el valor de la impedancia equivalente de Thèvenin entre  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{y}$ . El cálculo ha de hacerse sin tener en cuenta la presencia de  $\mathbf{Z}_S$ , ya que es el elemento a determinar.

Puesto que el circuito carece de fuentes dependientes, se desactiva la independiente (se sustituye por un ccircuito abierto), y se calcula la impedancia total entre  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{y}$ . Reflejando impedancias en los transformadores, se tiene

$$\mathbf{Z}_S = \mathbf{Z}_{Th}^* = \left[ j\omega L_S + \frac{(\omega M)^2}{j\omega L_P + \left( \frac{1}{\mathbf{Z}_P} + \frac{1}{\mathbf{Z}_1} + \frac{a^2}{\mathbf{Z}_2} \right)^{-1}} \right]^*$$

### Problema 3

En el circuito de la figura son datos los valores de todos los elementos pasivos.



Suponiendo que  $i_G(t) = I_G \cos(\omega t + \varphi)$  y siendo  $I_G$  (real y positivo) y  $\varphi$  datos, hallad (para resolver los apartados **B** y **C** se recomienda utilizar aproximaciones razonables antes que cálculos exactos)

**A (0.5 puntos)** Un valor de la frecuencia angular de resonancia (suponiendo que haya más de uno), que debe ser finito, no nulo, y positivo.

**B (0.5 puntos)** Los valores a los que tienden el módulo y la fase del fasor representativo de  $v_O(t)$  cuando la frecuencia angular toma valores muy bajos.

**C (0.5 puntos)** Los valores a los que tienden el módulo y la fase del fasor representativo de  $v_O(t)$  cuando la frecuencia angular toma valores muy elevados.

Suponiendo que  $i_G(t) = I_D + I_A \cos(\omega t)$ , siendo  $I_D = 1 \text{ A} = I_A$ ,  $\omega = 1 \text{ Mrad/s}$ ,  $C_1 = 1 \text{ mF}$ ,  $L_1 = 1 \text{ mH} = L_2$ ,  $R_1 = 1 \text{ } \Omega = R_2$ ,

**D (1.5 puntos)** Obtened la expresión temporal de la potencia en  $L_2$  (se recomienda utilizar aproximaciones razonables antes que cálculos exactos).

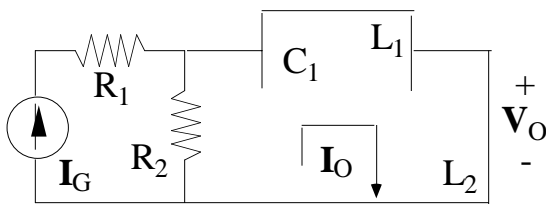
#### Apartado A

Puede observarse que, si la agrupación  $L_1$ - $C_1$  está en circuito abierto, éste cancela el efecto de  $L_2$ , y la fuente ve una impedancia puramente resistiva ( $R_1$  en serie con  $R_2$ ).

En consecuencia, una posible frecuencia de resonancia del circuito es la que provoca el circuito abierto en la agrupación indicada. Es decir,

$$\omega_0 = + \frac{1}{\sqrt{L_1 C_1}}$$

#### Apartado B

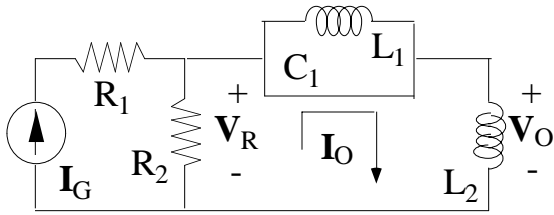


$$\mathbf{I}_G = I_G \angle \varphi$$

Para frecuencias muy bajas, las inductancias y las capacidades tienden a comportarse como cortocircuitos y circuitos abiertos, respectivamente. En consecuencia, el circuito queda en la forma indicada en la figura adjunta, en la que se ha utilizado notación fasorial.

$$\mathbf{I}_O \approx \mathbf{I}_G, \mathbf{V}_O = \mathbf{I}_O j \omega L_2 \Rightarrow |\mathbf{V}_O| \rightarrow 0 \text{ V}, \angle \mathbf{V}_O \rightarrow \varphi + 90^\circ$$

### Apartado C



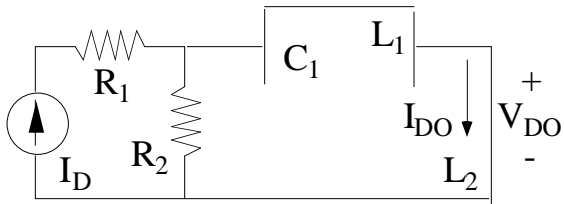
$$I_G = I_G \angle \varphi$$

$$I_O \approx 0 \text{ A} \Rightarrow V_R \approx I_G R_2 \approx V_O \Rightarrow |V_O| \rightarrow I_G R_2, \angle V_O \rightarrow \varphi$$

Para frecuencias muy altas, las inductancias y las capacidades tienden a comportarse como circuitos abiertos y cortocircuitos, respectivamente. En consecuencia, el circuito queda en la forma indicada en la figura adjunta, en la que se ha utilizado notación fasorial.

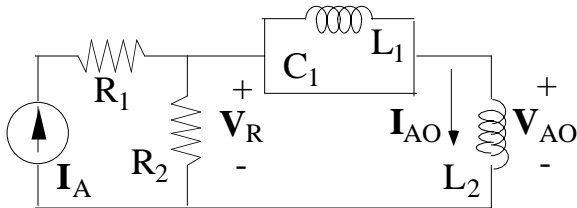
### Apartado D

Puesto que la fuente contiene dos excitaciones de distinta naturaleza, habrá que aplicar el principio de superposición.



En continua, las inductancias son cortocircuitos y las capacidades son circuitos abiertos. En consecuencia, el circuito queda en la forma indicada en la figura adjunta, a partir de la cual puede deducirse que toda la corriente proporcionada por la fuente circulará por las inductancias, con lo que

$$I_{DO} = I_D = 1 \text{ A}, V_{DO} = 0 \text{ V}$$



$$I_A = I_A = 1 \text{ A}$$

Para la componente sinusoidal de la excitación se tiene la situación mostrada en la figura adjunta, en la que se ha utilizado notación fasorial. En ella se ha tenido en cuenta que la capacidad es prácticamente un cortocircuito, ya que

$$|Z_{C1}| = \left| \frac{1}{j\omega C_1} \right| = 10^{-3} \Omega \ll 10^3 \Omega = |j\omega L_1| = |Z_{L1}|$$

Por otro lado, y dado que  $Z_{L1}$  también es mucho mayor, en módulo, que las impedancias que presentan las resistencias, puede suponerse que toda la corriente proporcionada por el generador circula por éstas, con lo que

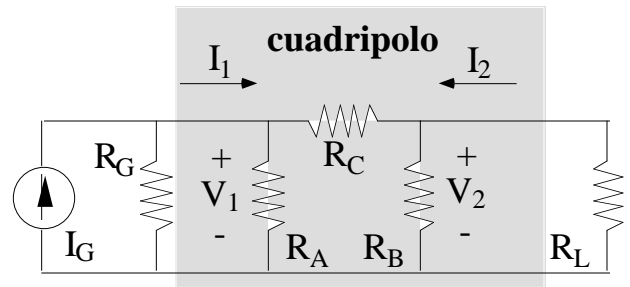
$$I_{AO} \approx 0 \text{ A}, V_{AO} \approx V_R \approx I_A R_2 = 1 \text{ V}$$

$$p_{L2}(t) = \left[ I_{DO} + \text{Re} \left\{ I_{AO} e^{j\omega t} \right\} \right] \left[ V_{DO} + \text{Re} \left\{ V_{AO} e^{j\omega t} \right\} \right] \approx \cos(\omega t) \text{ W}$$



## Problema 4

En el circuito de la figura la fuente es continua.



- A (0.5 puntos)** Hallad las condiciones para que el cuadripolo sea simétrico.  
**B (0.5 puntos)** Obtened los parámetros híbridos (g) del cuadripolo.  
**C (1 punto)** El cuadripolo de la figura es sustituido por otro cuya composición interna es desconocida. Sabiendo que dicho cuadripolo es simétrico, y que  $I_G = 8$  A,  $I_1 = 5$  A,  $I_2 = -1$  A,  $R_G = R_L = 1 \Omega$ , hallad los parámetros y del cuadripolo.

### Apartado A

En el cuadripolo se verifican las relaciones

$$I_1 = V_1 \left( \frac{1}{R_A} + \frac{1}{R_C} \right) - \frac{V_2}{R_C} \quad (1a)$$

$$I_2 = -\frac{V_1}{R_C} + V_2 \left( \frac{1}{R_B} + \frac{1}{R_C} \right) \quad (1b)$$

Comparando estas expresiones con las que definen los parámetros y

$$I_1 = V_1 y_{11} + V_2 y_{12} \quad (2a)$$

$$I_2 = V_1 y_{21} + V_2 y_{22} \quad (2b)$$

se obtiene

$$y_{11} = \frac{1}{R_A} + \frac{1}{R_C}, y_{12} = -\frac{1}{R_C}, y_{21} = -\frac{1}{R_C}, y_{22} = \frac{1}{R_B} + \frac{1}{R_C}$$

Las condiciones para que el cuadripolo sea simétrico son

$$\text{recíproco} \Rightarrow y_{12} = y_{21} \Rightarrow \text{se cumple siempre}$$

$$\text{simétrico} \Rightarrow y_{11} = y_{22} \Rightarrow R_A = R_B$$

## ***Apartado B***

La ecuación (1b) puede ser reescrita como

$$V_2 = V_1 \frac{R_B}{R_B + R_C} + I_2 \frac{R_B R_C}{R_B + R_C} \quad (3b)$$

Sustituyendo este resultado en (1a) se obtiene

$$I_1 = V_1 \left[ \frac{R_A + R_B + R_C}{R_A(R_B + R_C)} \right] - I_2 \frac{R_B}{R_B + R_C} \quad (3a)$$

Comparando estas expresiones con las que definen los parámetros g

$$I_1 = V_1 g_{11} + I_2 g_{12} \quad (4a)$$

$$V_2 = V_1 g_{21} + I_2 g_{22} \quad (4b)$$

se obtiene

$$g_{11} = \frac{R_A + R_B + R_C}{R_A(R_B + R_C)}, \quad g_{12} = -\frac{R_B}{R_B + R_C}, \quad g_{21} = \frac{R_B}{R_B + R_C}, \quad g_{22} = \frac{R_B R_C}{R_B + R_C}$$

## ***Apartado C***

En el circuito se verifican las relaciones

$$I_G = \frac{V_1}{R_G} + I_1 \Rightarrow V_1 = 3 \text{ V}$$
$$V_2 = -I_2 R_L = 1 \text{ V}$$

Teniendo en cuenta la definición de los parámetros y las condiciones de simetría indicadas en el apartado A, puede escribirse

$$\begin{array}{l} I_1 = V_1 y_{11} + V_2 y_{12} \\ I_2 = V_1 y_{12} + V_2 y_{11} \end{array} \quad \left| \Rightarrow \right| \quad \begin{array}{l} y_{11} = 2 \text{ S} = y_{22} \\ y_{12} = -1 \text{ S} = y_{21} \end{array}$$