Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Telecomunicación
Universidad de Vigo

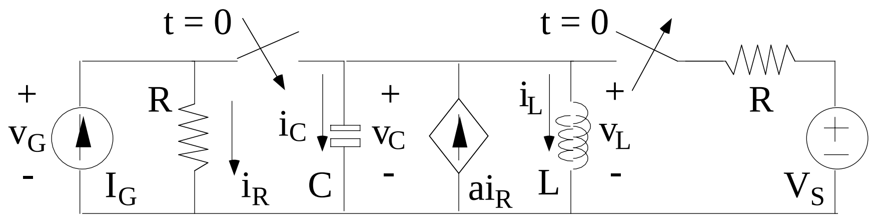
Análisis de circuitos

(titulaciones:
Ingeniero Técnico de Telecomunicación,
especialidad en Sistemas de Telecomunicación;
Ingeniero Técnico de Telecomunicación,
especialidad en Sonido e Imagen)

Examen final de septiembre de 2005

(sólo la parte de *Análisis de redes*)

Problema 1



En el circuito de la figura las fuentes independientes son continuas, y son datos las características de todos los elementos.

El circuito ha permanecido mucho tiempo en el mismo estado antes del cambio de posición de los interruptores. Una vez producido éste, ya no experimenta más cambios.

A (1.8 puntos) Obtened los valores de i_C, v_C, i_L y v_L en los instantes $t = 0^-$, $t = 0^+$ y $t = \infty$.

B (1.2 puntos) Obtened las ecuaciones diferenciales que caracterizan la evolución de v_C e i_L para $t > 0$.

Apartado A

En régimen permanente continuo la capacidad es un circuito abierto y la inductancia es un cortocircuito

$$i_C(0^-) = 0 \text{ A}, \; v_L(0^-) = 0 \text{ V}$$

Elementos en paralelo

$$v_C(0^-) = v_L(0^-) = 0 \text{ V}$$

Ecuación de malla

$$i_R(0^-) = I_G$$

Ecuación de nudo

$$ai_R(0^-) + \frac{V_S - v_L(0^-)}{R} = i_C(0^-) + i_L(0^-) \Rightarrow i_L(0^-) = aI_G + \frac{V_S}{R}$$

La tensión en la capacidad y la corriente en la inductancia no pueden variar bruscamente

$$v_C(0^+) = v_C(0^-) = 0 \text{ V}, \; i_L(0^+) = i_L(0^-) = aI_G + \frac{V_S}{R}$$

Elementos en paralelo

$$v_L(0^+) = v_C(0^+) = 0 \text{ V} = v_G(0^+)$$

Ecuación de la fuente dependiente

$$i_R(0^+) = \frac{v_G(0^+)}{R} = 0 \text{ A}$$

Ecuación de nudo

$$I_G + ai_R(0^+) = i_C(0^+) + i_R(0^+) + i_L(0^+) \Rightarrow i_C(0^+) = (1 - a)I_G - \frac{V_S}{R}$$

En régimen permanente continuo
la capacidad es un circuito abierto
y la inductancia es un cortocircuito

$$i_C(\infty) = 0 \text{ A}, \; v_L(\infty) = 0 \text{ V}$$

Elementos en paralelo

$$v_C(\infty) = v_L(\infty) = 0 \text{ V} = v_G(\infty)$$

Ecuación de la fuente dependiente

$$i_R(\infty) = \frac{v_G(\infty)}{R} = 0 \text{ A}$$

Ecuación de nudo

$$I_G + ai_R(\infty) = i_C(\infty) + i_R(\infty) + i_L(\infty) \Rightarrow i_L(\infty) = I_G$$

Apartado B

Para $t > 0$ se tiene

Elementos en paralelo
y relación funcional

$$v_C = v_L = L\frac{di_L}{dt} \qquad (1)$$

Elementos en paralelo
y fuente dependiente

$$i_R = \frac{v_G}{R} = \frac{v_C}{R} = \frac{v_L}{R}$$

Ecuación de nudo
y relaciones funcionales

$$I_G + ai_R = i_C + i_R + i_L \Rightarrow I_G = C\frac{dv_C}{dt} + (1 - a)\frac{L}{R}\frac{di_L}{dt} + i_L \qquad (2)$$

Sustituyendo (1) en (2)

$$LC\frac{d^2i_L}{dt^2} + (1 - a)\frac{L}{R}\frac{di_L}{dt} + i_L = I_G \qquad (3)$$

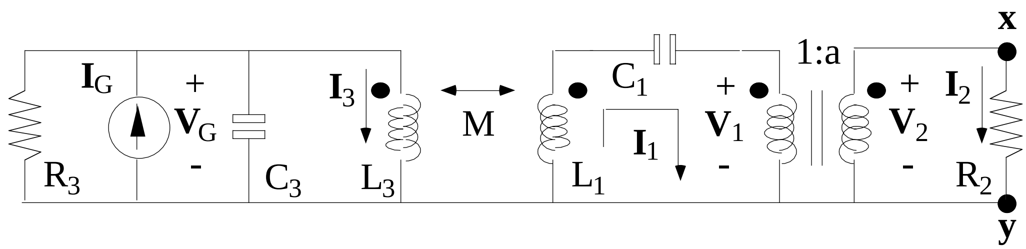
$$i_L = I_G - \frac{(1 - a)v_C}{R} - C\frac{dv_C}{dt} \qquad (4)$$

Sustituyendo (4) en (1)

$$LC\frac{d^2v_C}{dt^2} + (1 - a)\frac{L}{R}\frac{dv_C}{dt} + v_C = 0 \text{ V} \qquad (5)$$

(3) y (5) son las ecuaciones diferenciales buscadas.

Problema 2



El circuito de la figura, en cuya representación se ha utilizado notación fasorial, funciona en régimen sinusoidal permanente a una frecuencia angular ω conocida y finita. Todos los elementos del circuito tienen valores (conocidos) finitos no nulos, y *a* es un número real.

A (1.5 puntos) Formulad un sistema algebraico de seis ecuaciones a partir del cual sea posible obtener los valores de $\mathbf{V}_G$, $\mathbf{I}_1$, $\mathbf{I}_2$, $\mathbf{I}_3$ (corriente de rama), $\mathbf{V}_1$, y $\mathbf{V}_2$.

B (0.75 puntos) Suponiendo que $\mathbf{I}_G$ es real, que M = 0 H y que $\omega L_3 = 1/(\omega C_3)$, obtened las potencias compleja, media y reactiva en C_3.

C (0.75 puntos) Obtened el valor de la impedancia que hay que colocar entre **x** e **y** para que en ella se disipe la máxima potencia media posible.

Apartado A

Ecuaciones de malla, de nudo y de rama (reflejando impedancias en los transformadores)

$$\mathbf{I}_G = \mathbf{V}_G\left(\frac{1}{R_3} + j\omega C_3\right) + \mathbf{I}_3$$

$$0 = -\mathbf{I}_3 j\omega M + \mathbf{I}_1\left(j\omega L_1 + \frac{1}{j\omega C_1}\right) + \mathbf{V}_1$$

$$\mathbf{V}_2 = \mathbf{I}_2 R_2$$

$$\mathbf{I}_3 = \frac{\mathbf{V}_G}{j\omega L_3 + \dfrac{(\omega M)^2}{j\omega L_1 + \dfrac{1}{j\omega C_1} + \dfrac{R_2}{a^2}}}$$

Ecuaciones del transformador ideal

$$\mathbf{V}_2 = a\mathbf{V}_1,\ \mathbf{I}_1 = a\mathbf{I}_2$$

Apartado B

El conjunto L_3-C_3 está en resonancia, y por tanto se comporta como un circuito abierto. Por otro lado, al ser nulo el coeficiente de inducción mutua, no hay influencia del secundario del transformado lineal en el primario. En consecuencia,

$$\mathbf{V}_{C3} = \mathbf{V}_G = \mathbf{I}_G R, \text{ real} \Rightarrow \mathbf{I}_{C3} = \mathbf{V}_{C3} j\omega C_3, \text{ imaginaria pura}$$

Potencia compleja
$$S_{C3} = \frac{\mathbf{V}_{C3}\mathbf{I}_{C3}^*}{2} = -j\frac{|\mathbf{I}_G|^2 \omega R_3^2 C_3}{2}$$

Potencia media
$$P_{C3} = \mathrm{Re}\{S_{C3}\} = 0 \text{ W, ya que } S_{C3} \text{ es imaginaria pura}$$

Potencia reactiva
$$Q_{C3} = \mathrm{Im}\{S_{C3}\} = -\frac{|\mathbf{I}_G|^2 \omega R_3^2 C_3}{2}$$

Apartado C

La impedancia a colocar tendrá un valor igual al complejo conjugado de la impedancia equivalente de Thèvenin.

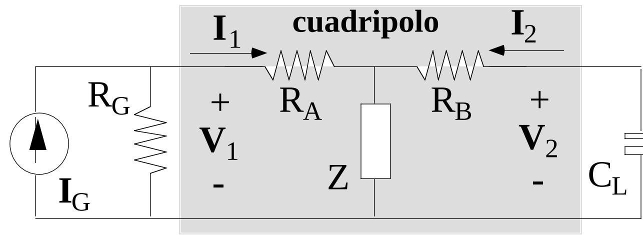
Para obtener la impedancia equivalente se tiene en cuenta que el circuito carece de fuentes dependientes, por lo que se desactiva la independiente (se sustituye por un circuito abierto), se reflejan impedancias en ambos transformadores (obsérvese que en el ideal la reflexión se efectúa desde el primario hacia el secundario) y se calcula la impedancia total.

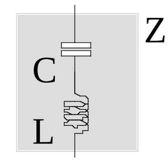
En consecuencia,

$$Z_{xy} = Z_{Th}^* = \left\{ R_2 \,//\, a^2 \left\{ j\omega L_1 + \frac{1}{j\omega C_1} + \frac{(\omega M)^2}{j\omega L_3 + \left[\left(\frac{1}{j\omega C_3} \right) // R_3 \right]} \right\} \right\}^*$$

Problema 3

El circuito de la figura, en cuya representación se ha utilizado notación fasorial, funciona en régimen sinusoidal permanente a una frecuencia angular ω.





$\mathbf{I}_G = I_{G\angle 0^\circ}$ (I_G es real y positivo)

A (0.5 puntos) Obtened las condiciones para que el cuadripolo sea simétrico en función de Z.

B (0.5 puntos) Suponiendo conocidos los parámetros *abcd* del cuadripolo, obtened la tensión $\mathbf{V}_2$.

Suponiendo que Z tiene la forma indicada en el recuadro de la derecha,

C (0.5 puntos) Obtened el valor de la frecuencia de resonancia (al menos uno, si hay varios) del circuito completo, que debe ser finito, no nulo y positivo.

D (0.5 puntos) Obtened los valores a los que tienden el módulo y la fase de $\mathbf{V}_2$ cuando la frecuencia angular toma valores muy elevados.

Apartado A

En el cuadripolo se verifican las relaciones	Las relaciones que definen los parámetros *z* son	Comparando
$\mathbf{V}_1 = \mathbf{I}_1(R_A + Z) + \mathbf{I}_2 Z$	$\mathbf{V}_1 = \mathbf{I}_1 z_{11} + \mathbf{I}_2 z_{12}$	$z_{11} = R_A + Z$, $z_{12} = Z$
$\mathbf{V}_2 = \mathbf{I}_1 Z + \mathbf{I}_2(R_B + Z)$	$\mathbf{V}_2 = \mathbf{I}_1 z_{21} + \mathbf{I}_2 z_{22}$	$z_{21} = Z$, $z_{22} = R_B + Z$

Las condiciones de simetría en función de los parámetros *z* son

$$\text{recíproco} \Rightarrow z_{12} = z_{21} \Rightarrow \text{se cumple siempre}$$

$$\text{simetría} \Rightarrow z_{11} = z_{22} \Rightarrow R_A = R_B$$

Apartado B

En el circuito se verifican las relaciones

$$\mathbf{V}_1 = \mathbf{V}_2 a - \mathbf{I}_2 b$$
$$\mathbf{I}_1 = \mathbf{V}_2 c - \mathbf{I}_2 d$$
$$\mathbf{I}_G = \frac{\mathbf{V}_1}{R_G} + \mathbf{I}_1$$
$$\mathbf{V}_2 = - \frac{\mathbf{I}_2}{j\omega C_L}$$

Combinando las relaciones

$$\mathbf{I}_G = \mathbf{V}_2\left(\frac{a}{R_G} + c\right) - \mathbf{I}_2\left(\frac{b}{R_G} + d\right)$$
$$\mathbf{I}_2 = - \mathbf{V}_2 j\omega C_L$$

Tensión $\mathbf{V}_2$

$$\mathbf{V}_2 = \frac{\mathbf{I}_G R_G}{a + cR_G + j(b + dR_G)\omega C_L}$$

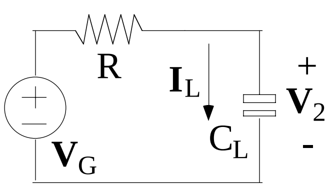
Apartado C

Puede observarse que, si la agrupación L-C está en cortocircuito, éste anula los efectos de R_B y C_L con lo que la fuente *ve* una impedancia puramente resistiva (R_G en paralelo con R_A).

En consecuencia, una posible frecuencia de resonancia del circuito completo es la que provoca el cortocircuito indicado. Es decir,

$$\omega_0 = + \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Apartado D

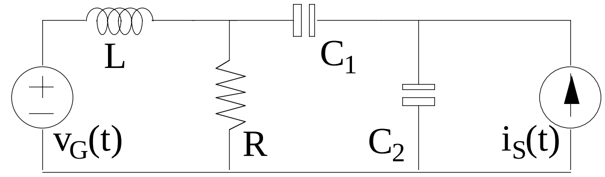


$\mathbf{V}_G = \mathbf{I}_G R_G = I_G R_{G\angle 0^\circ}$
$R = R_G + R_A + R_B$

Para frecuencias muy elevadas, las inductancias y las capacidades tienden a comportarse como circuitos abiertos y cortocircuitos, respectivamente. En consecuencia, el circuito queda en la forma indicada en la figura adjunta (en la que se han hecho una transformación de fuentes y una agrupación de resistencias), de la que puede deducirse

$$\mathbf{V}_2 = \frac{\mathbf{I}_L}{j\omega C_L} \approx \left(\frac{\mathbf{V}_G}{R}\right)\frac{1}{j\omega C_L} \Rightarrow |\mathbf{V}_2| \to \frac{I_G R_G}{(R_G + R_A + R_B)\omega C_L} \approx 0 \text{ V}, \ \angle\mathbf{V}_2 \to -90^\circ$$

Problema 4

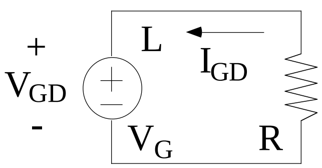


$$R = 1\ \Omega,\ L = 1\ \text{nH},\ C_1 = 1\ \text{nF} = C_2$$
$$v_G(t) = V_G,\ V_G = 1\ \text{V}$$
$$i_S(t) = I_S\cos(\omega t + \varphi)$$
$$I_S = 1\ \text{A},\ \omega = 1\ \text{Grad/s},\ \varphi = 90\ °$$

A (2 puntos) Obtened la expresión de la potencia instantánea en la fuente de tensión.

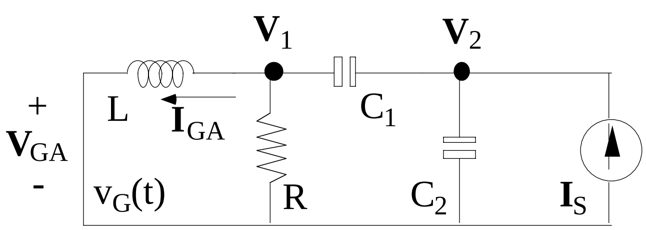
Apartado A

Puesto que en el circuito existen dos excitaciones de naturaleza diferente, habrá que aplicar el principio de superposición.



Para la excitación continua las inductancias y las capacidades son cortocircuitos y circuitos abiertos, respectivamente. En consecuencia, el circuito queda en la forma indicada en la figura adjunta, a partir de la cual puede deducirse

$$I_{GD} = -\frac{V_G}{R} = -1\ \text{A},\ V_{GD} = V_G = 1\ \text{V}$$



Para la excitación sinusoidal la fuente continua de tensión se comporta como un cortocircuito. En consecuencia, el circuito queda en la forma indicada en la figura adjunta, en la que se ha utilizado notación fasorial, y a partir de la cual puede deducirse

$$\mathbf{I}_S = I_{S\angle\varphi} = j\ \text{A}$$

$$\mathbf{V}_{GA} = 0\ \text{V}$$

$$\left.\begin{array}{l} \mathbf{I}_S = \mathbf{V}_2(j\omega C_2 + j\omega C_1) - \mathbf{V}_1 j\omega C_1 \\ 0 = \mathbf{V}_1\left(\frac{1}{j\omega L} + \frac{1}{R} + j\omega C_1\right) - \mathbf{V}_2 j\omega C_1 \end{array}\right| \Rightarrow \left|\begin{array}{l} \mathbf{V}_1 = -0.2 + j0.4\ \text{V} \\ \mathbf{V}_2 = 0.4 + j0.2\ \text{V} \end{array}\right| \Rightarrow \left|\ \mathbf{I}_{GA} = \frac{\mathbf{V}_1}{j\omega L} = 0.4 + j0.2\ \text{A}\right.$$

Por consiguiente, la expresión buscada será

$$p_{C2}(t) = \left[I_{GD} + \text{Re}\left\{\mathbf{I}_{GA}e^{j\omega t}\right\}\right]\left[V_{GD} + \text{Re}\left\{\mathbf{V}_{GA}e^{j\omega t}\right\}\right] = -1 + \frac{\cos(\omega t + \varphi_p)}{\sqrt{5}}\ \text{W},\ \varphi_p = \tan^{-1}(0.5)$$