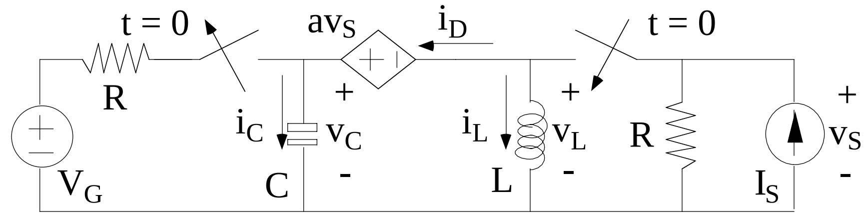
Problema 1



En el circuito de la figura las fuentes independientes son continuas, y son datos las características de todos los elementos.

El circuito ha permanecido mucho tiempo sin cambios antes del cambio de posición de los interruptores. Producido éste, el circuito ya no sufre más cambios.

A (1.2 puntos) Hallad v_C, i_C, v_L e i_L en los instantes $t = 0^-$, $t = 0^+$ y $t = \infty$.

Suponiendo que $a = 1$, $R = 1/3\ \Omega$, $i_L(0) = 0$ A, $i_L(\infty) = 1$ A, $v_C(0) = 1$ V, $v_C(\infty) = 0$ V; que la variación de energía en la inductancia entre los instantes $t = 0$ y $t = \infty$ es 1/2 J, y que la ecuación diferencial que caracteriza la evolución de i_L para $t \geq 0$ es

$$2\frac{d^2 i_L}{dt^2} + 3\frac{di_L}{dt} + i_L = 1\ \text{A}$$

B (0.5 puntos) Hallad el valor de L.

C (0.8 puntos) Hallad las expresiones temporales que caracterizan la evolución de v_C e i_L para $t \geq 0$ (si no se ha resuelto el apartado anterior, supóngase L = 1 H).

Apartado A

En régimen permanente continuo la inductancia es un cortocircuito y la capacidad es un circuito abierto

$$v_L(0^-) = 0\ \text{V},\ i_C(0^-) = 0\ \text{A}$$

Ecuación de malla y elementos en serie

$$v_S(0^-) = I_S R;\ i_D(0^-) = i_L(0^-)$$

Ecuaciones de malla y de nudo

$$v_C(0^-) = av_S(0^-) + v_L(0^-) = aI_S R$$

$$\frac{V_G - v_C(0^-)}{R} = i_C(0^-) - i_D(0^-) = i_C(0^-) + i_L(0^-) \Rightarrow i_L(0^-) = \frac{V_G}{R} - aI_S$$

Continuidad de corrientes en inductancias y tensiones en capacidades

$$i_L(0^+) = i_L(0^-) = \frac{V_G}{R} - aI_S,\ v_C(0^+) = v_C(0^-) = aI_S R$$

Elementos en serie y en paralelo

$$i_D(0^+) = i_C(0^+);\ v_S(0^+) = v_L(0^+)$$

Ecuaciones de malla y de nudo

$$v_C(0^+) = av_S(0^+) + v_L(0^+) = (a+1)v_L(0^+) \Rightarrow v_L(0^+) = \frac{aI_S R}{a+1}$$

$$I_S = \frac{v_L(0^+)}{R} + i_L(0^+) + i_C(0^+) \Rightarrow i_C(0^+) = \frac{a^2 + a + 1}{a+1} I_S - \frac{V_G}{R}$$

En régimen permanente continuo
la inductancia es un cortocircuito
y la capacidad es un circuito abierto

$$v_L(\infty) = 0 \text{ V},\ i_C(\infty) = 0 \text{ A}$$

Elementos en serie y en paralelo

$$i_D(0^+) = i_C(0^+) = 0 \text{ A};\ v_S(0^+) = v_L(0^+) = 0 \text{ V}$$

Ecuaciones de malla y de nudo

$$v_C(\infty) = av_S(\infty) + v_L(\infty) = 0 \text{ V}$$
$$I_S = \frac{v_L(\infty)}{R} + i_L(\infty) + i_C(\infty) \Rightarrow i_L(\infty) = I_S$$

Apartado B

Para $t \geq 0$ se cumple, teniendo en cuenta la relación funcional de la inductancia,

$$p_L(t) = i_L(t)v_L(t)$$
$$\frac{1}{2} \text{ J} = w_L = \int_0^\infty p_L(t)dt = L\int_0^\infty i_L\frac{di_L}{dt}dt = \frac{L}{2}[i_L^2]_0^\infty \Rightarrow L = 1 \text{ H}$$

Apartado C

Para $t > 0$ se tiene

Ecuación característica

$$a = 2 \text{ s}^2,\ b = 3 \text{ s},\ c = 1$$
$$\alpha = \frac{b}{2a} = \frac{3}{4} \text{ s}^{-1},\ \omega_0 = \sqrt{\frac{c}{a}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ rad/s}$$

Tipo de respuesta

$$\alpha^2 > \omega_0^2 \Rightarrow \text{respuesta supercrítica}$$

Expresión temporal de i_L

$$i_L = i_{Lf} + Ae^{s_1 t} + Be^{s_2 t} \qquad (1a)$$
$$s_{1,2} = \frac{- b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Rightarrow s_1 = - 1 \text{ s}^{-1},\ s_2 = - 0.5 \text{ s}^{-1} \qquad (1b)$$

Elementos en paralelo,
ecuación de malla
y relación funcional

$$v_S = v_L,\ v_C = av_S + v_L = (a + 1)L\frac{di_L}{dt} \qquad (2)$$

Sustituyendo (1) en (2)

$$v_C = - 2Ae^{s_1 t} - Be^{s_2 t} \qquad (3)$$

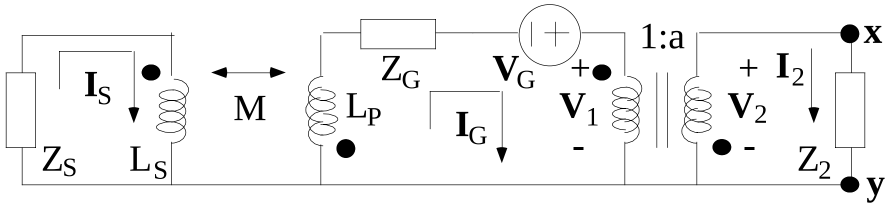
Condiciones iniciales y finales:

$$\left.\begin{array}{c} 0\ A = i_L(0) = i_{Lf} + A + B \\ 1\ A = i_L(\infty) = i_{Lf} \\ 1\ V = v_C(0) = -\ 2A - B \end{array}\right| \Rightarrow \left|\begin{array}{c} i_{Lf} = 1\ A \\ A = 0\ A \\ B = -\ 1\ A \end{array}\right. \qquad (4)$$

Sustituyendo (4) en (1) y (3), se obtienen las expresiones temporales buscadas

$$i_L(t) = 1 - e^{-0.5t}\ A\ (t\ en\ s)$$
$$v_C(t) = e^{-0.5t}\ V\ (t\ en\ s)$$

Problema 2



El circuito de la figura, en cuya representación se ha utilizado notación fasorial, funciona en régimen sinusoidal permanente a una frecuencia angular ω conocida y finita. Todos los elementos del circuito tienen valores finitos no nulos, y *a* es un número real.

A (1 punto) Formulad un sistema algebraico de cinco ecuaciones a partir del cual sea posible obtener los valores de $\mathbf{I}_S$, $\mathbf{I}_G$, $\mathbf{I}_2$, $\mathbf{V}_1$, y $\mathbf{V}_2$.

B (0.5 puntos) Obtened el valor de Z_S que anula la tensión $\mathbf{V}_2$. ¿Con qué elemento de circuito habrá de realizarse esa impedancia? ¿Cuánto valdrá dicho elemento?

C (0.5 puntos) Obtened el valor que ha de tener Z_2 para que en ella se disipe la máxima potencia media posible.

D (0.5 puntos) Suponiendo conocido el valor de $\mathbf{I}_S$, obtened las potencias compleja, media y reactiva en L_S.

Apartado A

Ecuaciones de malla

$$0 = \mathbf{I}_S(Z_S + j\omega L_S) + \mathbf{I}_G j\omega M$$

$$\mathbf{V}_G = \mathbf{I}_S j\omega M + \mathbf{I}_G(j\omega L_P + Z_G) + \mathbf{V}_1$$

$$\mathbf{V}_2 = \mathbf{I}_2 Z_2$$

Ecuaciones del transformador ideal

$$\mathbf{V}_2 = -a\mathbf{V}_1,\ \mathbf{I}_G = -a\mathbf{I}_2$$

Apartado B

$$\mathbf{V}_2 = 0\text{ V} \Rightarrow \mathbf{V}_1 = -\frac{\mathbf{V}_2}{a} = 0\text{ V},\ \mathbf{I}_2 = \frac{\mathbf{V}_2}{Z_2} = 0\text{ A} \Rightarrow \mathbf{I}_G = -a\mathbf{I}_2 = 0\text{ A}$$

Reflejando impedancias,

$$0\text{ A} = \mathbf{I}_G = \frac{\mathbf{V}_G - \mathbf{V}_1}{Z_G + j\omega L_P + \dfrac{(\omega M)^2}{Z_S + j\omega L_S}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{(puesto que } \omega,\ M,\ L_P \text{ y } Z_G \text{ son finitas) } Z_S + j\omega L_S = 0\ \Omega \Rightarrow Z_S = -j\omega L_S$$

Puesto que la impedancia resultante es una reactancia pura negativa, habrá de ser implementada mediante una capacidad, con lo que

$$Z_S = \frac{1}{j\omega C_S} = -j\omega L_S \Rightarrow C_S = \frac{1}{\omega^2 L_S}$$

Apartado C

Es necesario calcular el valor de la impedancia equivalente de Thèvenin entre **x** e **y**. El cálculo ha de hacerse sin tener en cuenta la presencia de Z_2, ya que es el elemento a determinar.

Puesto que el circuito carece de fuentes dependientes, se desactiva la independiente (se sustituye por un cortocircuito), y se calcula la impedancia total entre **x** e **y**. Reflejando impedancias (obsérvese que en el transformador ideal la reflexión se hace de primario a secundario), se tiene

$$Z_2 = Z_{Th}^* = a^2\left[\frac{(\omega M)^2}{Z_S + j\omega L_S} + j\omega L_P + Z_G\right]^*, \text{ ya que a es real}$$

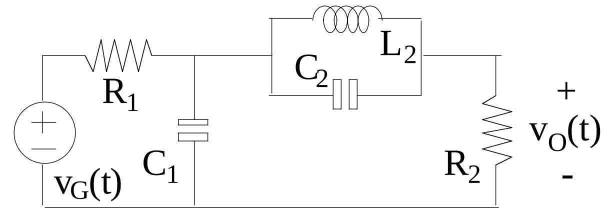
Apartado D

Siendo $\mathbf{V}_S$ la tensión en la inductancia L_S (positiva en el punto), se tiene

$$S_S = \frac{\mathbf{V}_S\mathbf{I}_S^*}{2} = \frac{-(\mathbf{I}_S Z_S)\mathbf{I}_S^*}{2} = -\frac{|\mathbf{I}_S|^2 Z_S}{2}$$

$$P_S = \mathrm{Re}\{S_S\} = -\frac{|\mathbf{I}_S|^2}{2}\mathrm{Re}\{Z_S\},\ Q_S = \mathrm{Im}\{S_S\} = -\frac{|\mathbf{I}_S|^2}{2}\mathrm{Im}\{Z_S\}$$

Problema 3



En el circuito de la figura son datos los valores de todos los elementos pasivos.

Suponiendo que $v_G(t) = V_G\cos(\omega t + \varphi)$ y siendo V_G (real y positivo) y φ datos, hallad (para resolver los apartados **B** y **C** se recomienda utilizar aproximaciones razonables antes que cálculos exactos)

A (0.5 puntos) El valor de la frecuencia angular (finito, no nulo, y positivo) para el que la potencia media disipada en R_2 es el mínimo posible.

B (0.5 puntos) Los valores a los que tienden el módulo y la fase del fasor representativo de $v_O(t)$ cuando la frecuencia angular toma valores muy bajos.

C (0.5 puntos) Los valores a los que tienden el módulo y la fase del fasor representativo de $v_O(t)$ cuando la frecuencia angular toma valores muy elevados.

Suponiendo que $v_G(t) = V_D + V_A\cos(\omega t + \varphi)$, siendo $V_D = 1$ V, $V_A = 1.41$ V, $\omega = 1$ Mrad/s, $\varphi = -45$ º, $L_2 = 1$ µH, $C_1 = 1$ µF $= C_2$, $R_1 = 1\ \Omega = R_2$,

D (1.5 puntos) Obtened la expresión temporal de la potencia en C_1.

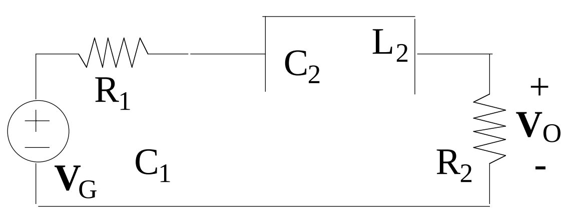
Apartado A

Puede observarse que, si la agrupación L_2-C_2 está en circuito abierto, no circula corriente hacia R_2, con lo que la potencia media en ella será nula.

En consecuencia, la frecuencia buscada es la que provoca el circuito abierto en la agrupación indicada. Es decir,

$$\omega_{min} = +\frac{1}{\sqrt{L_2C_2}}$$

Apartado B

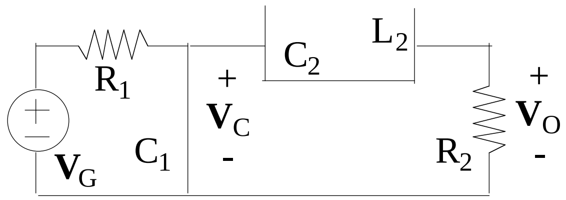


$$\mathbf{V}_G = V_{G\angle\varphi}$$

Para frecuencias muy bajas, las inductancias y las capacidades tienden a comportarse como cortocircuitos y circuitos abiertos, respectivamente. En consecuencia, el circuito queda en la forma indicada en la figura adjunta, en la que se ha utilizado notación fasorial.

$$\mathbf{V}_O = \frac{R_2}{R_1 + R_2}\mathbf{V}_G \Rightarrow |\mathbf{V}_O| \to \frac{R_2}{R_1 + R_2}V_G,\ \angle\mathbf{V}_O \to \varphi$$

Apartado C



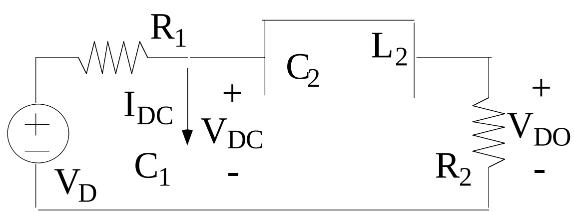
$$\mathbf{V}_G = V_{G\angle\varphi}$$

Para frecuencias muy altas, las inductancias y las capacidades tienden a comportarse como circuitos abiertos y cortocircuitos, respectivamente. En consecuencia, el circuito queda en la forma indicada en la figura adjunta, en la que se ha utilizado notación fasorial.

$$\mathbf{V}_O \approx \mathbf{V}_C \approx \frac{\mathbf{V}_G}{R_1}\frac{1}{j\omega C_1} \Rightarrow |\mathbf{V}_O| \to 0 \text{ V}, \angle\mathbf{V}_O \to \varphi - 90\ °$$

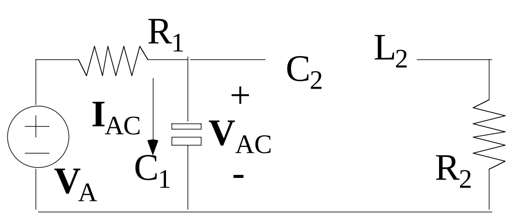
Apartado D

Puesto que la fuente contiene dos excitaciones de distinta naturaleza, habrá que aplicar el principio de superposición.



En continua, las inductancias son cortocircuitos y las capacidades son circuitos abiertos. En consecuencia, el circuito queda en la forma indicada en la figura adjunta, a partir de la cual puede deducirse

$$I_{DC} = 0 \text{ A}, V_{DC} = V_{DO} = \frac{R_2}{R_1 + R_2}V_D = 0.5 \text{ V}$$



$$\mathbf{V}_A = V_{A\angle\varphi} = 1.41_{\angle -45\,°} \text{ V} = 1 - j \text{ V}$$

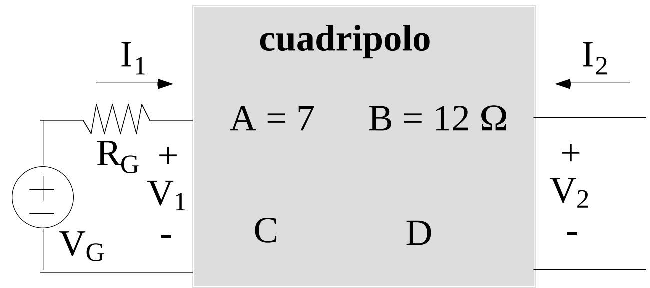
Para la componente sinusoidal de la excitación se tiene la situación mostrada en la figura adjunta, en la que se ha utilizado notación fasorial. Puede observarse que, con los datos del enunciado, la agrupación L_2-C_2 es un circuito abierto.

$$\mathbf{I}_{AC} = \frac{\mathbf{V}_A}{R_1 + \frac{1}{j\omega C_1}} = 1 \text{ A}, \mathbf{V}_{AC} = \frac{\mathbf{I}_{AC}}{j\omega C_1} = -j \text{ V}$$

$$p_C(t) = \left[I_{DC} + \mathrm{Re}\left\{\mathbf{I}_{AC}e^{j\omega t}\right\}\right]\left[V_{DC} + \mathrm{Re}\left\{\mathbf{V}_{AC}e^{j\omega t}\right\}\right] = \cos(\omega t)\left[0.5 + \cos(\omega t - 90\ °)\right] \text{ W}$$

Problema 4

En el circuito de la figura la fuente es continua.



A (0.5 puntos) Sabiendo que el cuadripolo de la figura es simétrico, hallad los valores de los parámetros de transmisión C y D.
B (0.75 puntos) Sabiendo que el cuadripolo de la figura es el resultado de la conexión en cascada de dos cuadripolos idénticos, cuyos parámetros de transmisión son enteros y positivos, hallad los parámetros de transmisión de cada uno de los cuadripolos individuales (si no se ha resuelto el apartado anterior, supóngase que C = 4 S y D = 7).
C (0.75 puntos) El cuadripolo de la figura es sustituido por otro cuya composición interna es desconocida. Sabiendo que dicho cuadripolo es simétrico, y que $V_G = 9$ V, $I_1 = 3$ A, $V_2 = 3$ V, $R_G = 1\ \Omega$, hallad los parámetros *z* de tal cuadripolo.

Apartado A

Las condiciones para que un cuadripolo sea simétrico son, en función de los parámetros de transmisión,

$$\text{reciprocidad: } AD - BC = 1$$
$$\text{simetría: } A = D$$

Sustituyendo en estas expresiones los valores de A y B indicados en la figura, se obtiene

$$C = 4\ \text{S},\ D = 7$$

Apartado B

En la agrupación en cascada, la matriz de parámetros de transmisión del cuadripolo resultante es igual al producto de las matrices de transmisión de los cuadripolos individuales, con lo que (teniendo en cuenta los datos y las condiciones del enunciado) se llega a

$$\begin{bmatrix} 7 & 12\ \Omega \\ 1\ \text{S} & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^2 + bc & b(a+d) \\ c(a+d) & bc + d^2 \end{bmatrix} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow a = 2,\ b = 3\ \Omega,\ c = 1\ \text{S},\ d = 2$$

Apartado C

Las condiciones para que un cuadripolo sea simétrico son, en función de los parámetros *z*,

$$\text{reciprocidad: } z_{12} = z_{21}$$
$$\text{simetría: } z_{11} = z_{22}$$

Por otro lado, $I_2 = 0$ A, ya que la salida del circuito está en circuito abierto.

Teniendo en cuenta todo lo anterior, en el circuito completo se verifican las relaciones

$$\left.\begin{aligned} V_G &= V_1 + I_1 R_G \\ V_1 &= I_1 z_{11} \\ V_2 &= I_1 z_{21} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad \begin{aligned} z_{12} &= 1\ \Omega = z_{21} \\ z_{11} &= 2\ \Omega = z_{22} \end{aligned}$$