

Análisis de circuitos

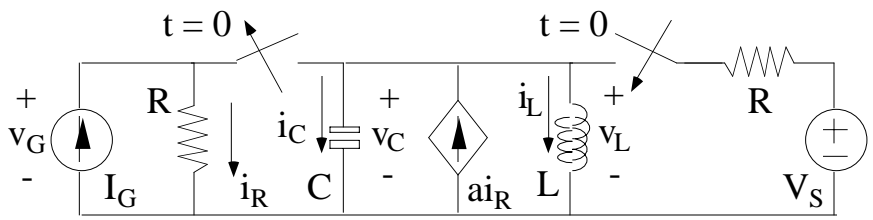
(titulaciones:

Ingeniero Técnico de Telecomunicación,
especialidad en Sistemas de Telecomunicación;
Ingeniero Técnico de Telecomunicación,
especialidad en Sonido e Imagen)

Examen final de diciembre de 2005
(sólo la parte de *Análisis de redes*)

Problema 1

En el circuito de la figura las fuentes independientes son continuas, y son datos las características de todos los elementos.



El circuito ha permanecido mucho tiempo en el mismo estado antes del cambio de posición de los interruptores. Una vez producido éste, ya no experimenta más cambios.

A (1.8 puntos) Obtened los valores de i_C , v_C , i_L y v_L en los instantes $t = 0^-$, $t = 0^+$ y $t = \infty$.

B (1.2 puntos) Obtened las ecuaciones diferenciales que caracterizan la evolución de v_C e i_L para $t > 0$.

Apartado A

En régimen permanente continuo la capacidad es un circuito abierto y la inductancia es un cortocircuito

$$i_C(0^-) = 0 \text{ A}, v_L(0^-) = 0 \text{ V}$$

Elementos en paralelo

$$v_C(0^-) = v_L(0^-) = 0 \text{ V} = v_G(0^-)$$

Ecuación de la fuente dependiente

$$i_R(0^-) = \frac{v_G(0^-)}{R} = 0 \text{ A}$$

Ecuación de nudo

$$I_G + ai_R(0^-) = i_C(0^-) + i_R(0^-) + i_L(0^-) \Rightarrow i_L(0^-) = I_G$$

La tensión en la capacidad y la corriente en la inductancia no pueden variar bruscamente

$$v_C(0^+) = v_C(0^-) = 0 \text{ V}, i_L(0^+) = i_L(0^-) = I_G$$

Elementos en paralelo

$$v_L(0^+) = v_C(0^+) = 0 \text{ V}$$

Ecuación de malla

$$i_R(0^+) = I_G$$

Ecuación de nudo

$$\frac{V_S - v_L(0^+)}{R} + ai_R(0^+) = i_C(0^+) + i_L(0^+) \Rightarrow i_C(0^+) = \frac{V_S}{R} + (a - 1)I_G$$

En régimen permanente continuo
la capacidad es un circuito abierto
y la inductancia es un cortocircuito

$$i_C(\infty) = 0 \text{ A}, v_L(\infty) = 0 \text{ V}$$

Elementos en paralelo

$$v_C(\infty) = v_L(\infty) = 0 \text{ V}$$

Ecuación de malla

$$i_R(\infty) = I_G$$

Ecuación de nudo

$$\frac{V_S - v_L(\infty)}{R} + ai_R(\infty) = i_C(\infty) + i_L(\infty) \Rightarrow i_L(\infty) = \frac{V_S}{R} + aI_G$$

Apartado B

Para $t > 0$ se tiene

Elementos en paralelo
y relación funcional

$$v_C = v_L = L \frac{di_L}{dt} \quad (1)$$

Ecuación de malla

$$i_R = I_G$$

Ecuación de nudo
y relaciones funcionales

$$\frac{V_S - v_L}{R} + ai_R = i_C + i_L \Rightarrow \frac{V_S - L \frac{di_L}{dt}}{R} + aI_G = C \frac{dv_C}{dt} + i_L \quad (2)$$

Sustituyendo (1) en (2)

$$LC \frac{d^2 i_L}{dt^2} + \frac{L}{R} \frac{di_L}{dt} + i_L = \frac{V_S}{R} + aI_G \quad (3)$$

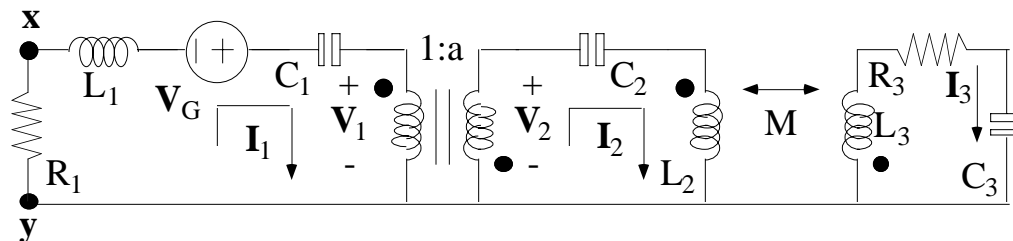
$$i_L = \frac{V_S}{R} + aI_G - \frac{v_C}{R} - C \frac{dv_C}{dt} \quad (4)$$

Sustituyendo (4) en (1)

$$LC \frac{d^2 v_C}{dt^2} + \frac{L}{R} \frac{dv_C}{dt} + v_C = 0 \text{ V} \quad (5)$$

(3) y (5) son las ecuaciones diferenciales buscadas.

Problema 2



El circuito de la figura, en cuya representación se ha utilizado notación fasorial, funciona en régimen sinusoidal permanente a una frecuencia angular ω conocida y finita. Todos los elementos del circuito tienen valores (conocidos) finitos no nulos, y a es un número real.

A (1.5 puntos) Formulad un sistema algebraico de cinco ecuaciones a partir del cual sea posible obtener los valores de \mathbf{I}_1 , \mathbf{I}_2 , \mathbf{I}_3 , \mathbf{V}_1 , y \mathbf{V}_2 .

B (0.75 puntos) Suponiendo conocido el valor de \mathbf{I}_1 (real) y que $\omega L_3 = 1/(\omega C_3)$, obtened las potencias compleja, media y reactiva en L_2 .

C (0.75 puntos) Suponiendo conocido el valor de \mathbf{I}_2 , obtened el circuito equivalente de Thèvenin entre los puntos \mathbf{x} e \mathbf{y} .

Apartado A

Ecuaciones de malla

$$\mathbf{V}_G = \mathbf{I}_1 \left(\mathbf{R}_1 + j\omega L_1 + \frac{1}{j\omega C_1} \right) + \mathbf{V}_1$$

$$\mathbf{V}_2 = \mathbf{I}_2 \left(\frac{1}{j\omega C_2} + j\omega L_2 \right) + \mathbf{I}_3 j\omega M$$

$$0 = \mathbf{I}_2 j\omega M + \mathbf{I}_3 \left(j\omega L_3 + \mathbf{R}_3 + \frac{1}{j\omega C_3} \right)$$

Ecuaciones del transformador ideal

$$\mathbf{V}_2 = -a\mathbf{V}_1, \mathbf{I}_1 = -a\mathbf{I}_2$$

Apartado B

$$\mathbf{I}_1 \text{ real} \Rightarrow \mathbf{I}_2 = -\frac{\mathbf{I}_1}{a} \text{ real}$$

Por otro lado, reflejando impedancias en el transformador lineal se obtiene

$$\mathbf{V}_{L2} = \mathbf{I}_2 \left[j\omega L_2 + \frac{(\omega M)^2}{j\omega L_3 + R_3 + \frac{1}{j\omega C_3}} \right] = -\frac{\mathbf{I}_1}{a} \left[j\omega L_2 + \frac{(\omega M)^2}{R_3} \right]$$

Potencia compleja

$$S_{L2} = \frac{\mathbf{V}_{L2} \mathbf{I}_2^*}{2} = \frac{|\mathbf{I}_1|^2 \left[j\omega L_2 + \frac{(\omega M)^2}{R_3} \right]}{2a^2}$$

Potencia media

$$P_{L2} = \text{Re}\{S_{L2}\} = \frac{|\mathbf{I}_1|^2}{2a^2} \frac{(\omega M)^2}{R_3}$$

Potencia reactiva

$$Q_{L2} = \text{Im}\{S_{L2}\} = \frac{|\mathbf{I}_1|^2 \omega L_2}{2a^2}$$

Apartado C

La tensión del generador equivalente de Thèvenin se calcula con el circuito en las condiciones indicadas en el enunciado.

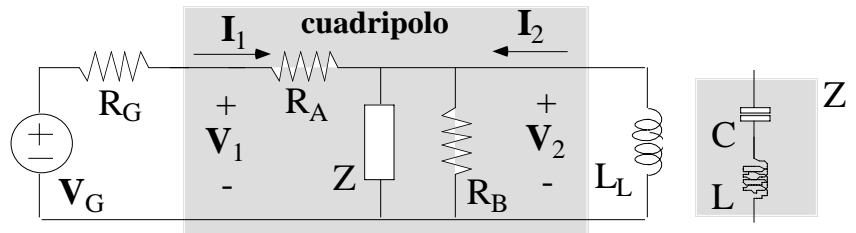
$$\mathbf{V}_{Th} = \mathbf{V}_{xy} = -\mathbf{I}_1 R_2 = a \mathbf{I}_2 R_1$$

Para obtener la impedancia equivalente se tiene en cuenta que el circuito carece de fuentes dependientes, por lo que se desactiva la independiente (se sustituye por un cortocircuito), se reflejan impedancias en ambos transformadores y se calcula la impedancia total.

$$Z_{Th} = Z_{xy} = R_1 // \left\{ j\omega L_1 + \frac{1}{j\omega C_1} + \frac{1}{a^2} \left[\frac{1}{j\omega C_2} + j\omega L_2 + \frac{(\omega M)^2}{j\omega L_3 + R_3 + \frac{1}{j\omega C_3}} \right] \right\}$$

Problema 3

El circuito de la figura, en cuya representación se ha utilizado notación fasorial, funciona en régimen sinusoidal permanente a una frecuencia angular ω .



$$\mathbf{V}_G = V_{G\angle 0^\circ} \text{ (} V_G \text{ es real y positivo)}$$

- A (0.5 puntos)** Obtened los parámetros h del cuadripolo en función de Z .
B (0.5 puntos) Suponiendo conocidos los parámetros z del cuadripolo, obtened la potencia media en R_A .

Suponiendo que Z tiene la forma indicada en el recuadro de la derecha,

- C (0.5 puntos)** Obtened el valor de la frecuencia de resonancia (al menos uno, si hay varios) del circuito completo, que debe ser finito, no nulo y positivo.
D (0.5 puntos) Obtened los valores a los que tienden el módulo y la fase de \mathbf{V}_2 cuando la frecuencia angular toma valores muy bajos.

Apartado A

En el cuadripolo se verifican las relaciones

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_1 &= \mathbf{I}_1 R_A + \mathbf{V}_2 \\ \mathbf{I}_2 &= -\mathbf{I}_1 + \mathbf{V}_2 \left(\frac{1}{R_B} + \frac{1}{Z} \right) \end{aligned}$$

Las relaciones que definen los parámetros h son

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_1 &= \mathbf{I}_1 h_{11} + \mathbf{V}_2 h_{12} \\ \mathbf{I}_2 &= \mathbf{I}_1 h_{21} + \mathbf{V}_2 h_{22} \end{aligned}$$

Comparando

$$\begin{aligned} h_{11} &= R_A, h_{12} = 1 \\ h_{21} &= -1, h_{22} = \frac{1}{R_B} + \frac{1}{Z} \end{aligned}$$

Apartado B

En el circuito se verifican las relaciones

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_G &= \mathbf{I}_1 R_G + \mathbf{V}_1 \\ \mathbf{V}_1 &= \mathbf{I}_1 z_{11} + \mathbf{I}_2 z_{12} \\ \mathbf{V}_2 &= \mathbf{I}_1 z_{21} + \mathbf{I}_2 z_{22} \\ \mathbf{V}_2 &= -\mathbf{I}_2 j\omega L_L \end{aligned}$$

Combinando las relaciones

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_2 &= -\frac{z_{21}}{j\omega L_L + z_{22}} \mathbf{I}_1 \\ \mathbf{V}_1 &= \left(R_G + z_{11} - \frac{z_{12} z_{21}}{j\omega L_L + z_{22}} \right) \mathbf{I}_1 \\ \mathbf{I}_1 &= \frac{j\omega L_L + z_{22}}{(R_G + z_{11})(j\omega L_L + z_{22}) - z_{12} z_{21}} \mathbf{V}_G \end{aligned}$$

Potencia media en R_A

$$P_{RA} = \frac{|\mathbf{I}_1|^2 R_A}{2}$$

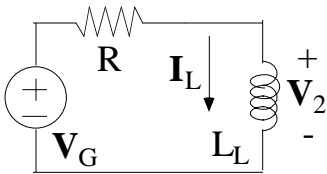
Apartado C

Puede observarse que, si la agrupación L-C está en cortocircuito, éste anula los efectos de R_B y L_L con lo que la fuente ve una impedancia puramente resistiva (R_G en serie con R_A).

En consecuencia, una posible frecuencia de resonancia del circuito completo es la que provoca el cortocircuito indicado. Es decir,

$$\omega_0 = + \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Apartado D



$$R = R_G + R_A$$

Para frecuencias muy bajas, las inductancias y las capacidades tienden a comportarse como cortocircuitos y circuitos abiertos, respectivamente. En consecuencia, el circuito queda en la forma indicada en la figura adjunta (en la que se ha hecho una agrupación de resistencias), de la que puede deducirse

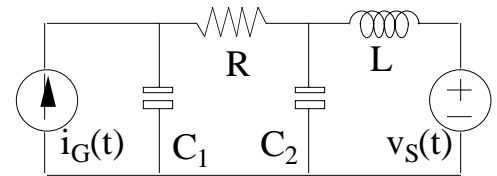
$$V_2 = I_L j\omega L_L \approx \left(\frac{V_G}{R} \right) j\omega L_L \Rightarrow |V_2| \rightarrow \frac{V_G \omega L_L}{R_G + R_A} \approx 0 \text{ V}, \angle V_2 \rightarrow 90^\circ$$

Problema 4

$$R = 1 \Omega, L = 1 \text{ mH}, C_1 = 1 \text{ mF} = C_2$$

$$i_G(t) = I_G, I_G = 1 \text{ A}$$

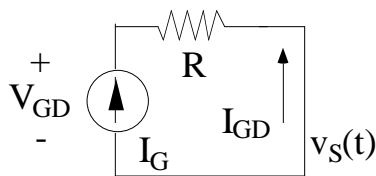
$$v_S(t) = V_S \cos(\omega t), V_S = 1 \text{ V}, \omega = 1 \text{ krad/s}$$



A (2 puntos) Obtened la expresión de la potencia instantánea en la fuente de corriente.

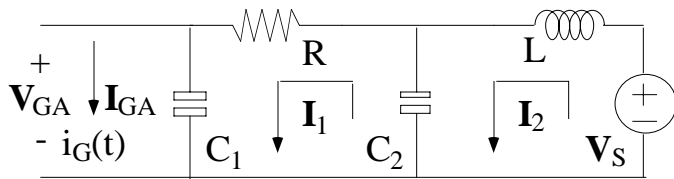
Apartado A

Puesto que en el circuito existen dos excitaciones de naturaleza diferente, habrá que aplicar el principio de superposición.



Para la excitación continua las inductancias y las capacidades son cortocircuitos y circuitos abiertos, respectivamente. En consecuencia, el circuito queda en la forma indicada en la figura adjunta, a partir de la cual puede deducirse

$$I_{GD} = -I_G = -1 \text{ A}, V_{GD} = -I_{GD}R = 1 \text{ V}$$



Para la excitación sinusoidal la fuente continua de corriente se comporta como un circuito abierto. En consecuencia, el circuito queda en la forma indicada en la figura adjunta, en la que se ha utilizado notación fasorial, y a partir de la cual puede deducirse

$$V_S = V_{S\angle 0^\circ} = 1 \text{ V}$$

$$I_{GA} = 0 \text{ A}$$

$$V_S = I_2 \left(j\omega L + \frac{1}{j\omega C_2} \right) - \frac{I_1}{j\omega C_2}$$

$$0 = -\frac{I_2}{j\omega C_2} + I_1 \left(\frac{1}{j\omega C_2} + R + \frac{1}{j\omega C_1} \right)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} I_1 = -j \text{ A} \\ I_2 = 1 - j2 \text{ A} \end{cases} \Rightarrow V_{GA} = \frac{I_1}{j\omega C_1} = -1 \text{ V}$$

Por consiguiente, la expresión buscada será

$$p_G(t) = \left[I_{GD} + \text{Re} \left\{ I_{GA} e^{j\omega t} \right\} \right] \left[V_{GD} + \text{Re} \left\{ V_{GA} e^{j\omega t} \right\} \right] = -[1 + \cos(\omega t + 180^\circ)] \text{ W}$$