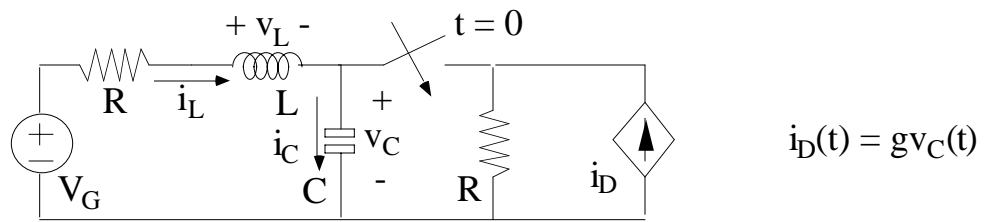


Problema 1



En el circuito de la figura, la fuente independiente es continua y son datos las características de todos los elementos. El circuito ha permanecido sin cambios durante mucho tiempo antes del cierre del interruptor. Una vez producido éste, ya no ocurren más cambios.

Datos (sólo para el apartado C):

$$V_G = 1 \text{ V}, g = -2 \text{ S}, R = 1 \text{ } \Omega, L = 1 \text{ } \mu\text{H}, C = 1 \text{ } \mu\text{F}$$

Apartado A (1.2 puntos). Obtener los valores de $i_L(t)$, $v_L(t)$, $v_C(t)$, e $i_C(t)$ en los instantes $t = 0^-$, $t = 0^+$ y $t = \infty$ segundos.

Apartado B (0.5 puntos). Obtener las ecuaciones diferenciales que caracterizan la evolución de $i_L(t)$ y $v_C(t)$ para $t > 0$ segundos.

Apartado C (0.8 puntos). Obtener las expresiones temporales de $i_L(t)$ y $v_C(t)$ para $t > 0$ segundos.

Apartado A

En régimen permanente continuo la inductancia es un cortocircuito y la capacidad, un circuito abierto.

$$v_L(0^-) = 0 \text{ V}, i_C(0^-) = 0 \text{ A}$$

Ecuaciones de malla.

$$i_L(0^-) = i_C(0^-) = 0 \text{ A}$$

$$V_G = Ri_L(0^-) + v_L(0^-) + v_C(0^-) \Rightarrow v_C(0^-) = V_G$$

La capacidad y la inductancia no admiten cambios bruscos de tensión y corriente, respectivamente.

$$v_C(0^+) = v_C(0^-) = V_G, i_L(0^+) = i_L(0^-) = 0 \text{ A}$$

Ecuación de malla.

$$V_G = Ri_L(0^+) + v_L(0^+) + v_C(0^+) \Rightarrow v_L(0^+) = 0 \text{ V}$$

Ecuación de nudo y relación funcional de la fuente dependiente.

$$i_L(0^+) + i_D(0^+) = i_C(0^+) + \frac{v_C(0^+)}{R} \Rightarrow \\ \Rightarrow i_L(0^+) + gv_C(0^+) = i_C(0^+) + \frac{v_C(0^+)}{R} \Rightarrow i_C(0^+) = \left(g - \frac{1}{R}\right)V_G$$

En régimen permanente continuo la inductancia es un cortocircuito y la capacidad, un circuito abierto.

$$v_L(\infty) = 0 \text{ V}, i_C(\infty) = 0 \text{ A}$$

Ecuación de nudo y relación funcional de la fuente dependiente.

$$\begin{array}{l} i_L(\infty) + i_D(\infty) = \frac{v_C(\infty)}{R} + i_C(\infty) \Rightarrow \\ \Rightarrow i_L(\infty) + gv_C(\infty) = \frac{v_C(\infty)}{R} + i_C(\infty) \end{array} \quad \left| \quad \begin{array}{l} v_C(\infty) = \frac{V_G}{2 - gR} \\ i_L(\infty) = \frac{(1 - gR)V_G}{(2 - gR)R} \end{array} \right. \Rightarrow$$

Ecuación de malla.

$$V_G = Ri_L(\infty) + v_L(\infty) + v_C(\infty)$$

Apartado B

Ecuaciones de nudo y de malla,
y relaciones funcionales
de la fuente dependiente
y los elementos reactivos.

$$i_L(t) + i_D(t) = \frac{v_C(t)}{R} + i_C(t) \Rightarrow \quad (1)$$

$$i_L(t) = \left(\frac{1}{R} - g \right) v_C(t) + C \frac{dv_C(t)}{dt} \quad (2)$$

$$V_G = R i_L(t) + v_L(t) + v_C(t) \Rightarrow \quad (3)$$

$$\Rightarrow v_C(t) = V_G - R i_L(t) - L \frac{di_L(t)}{dt} \quad (4)$$

Sustituyendo
(2) en (4),

$$LC \frac{d^2 v_C(t)}{dt^2} + \left[\frac{L(1 - gR)}{R} + RC \right] \frac{dv_C(t)}{dt} + (2 - gR) v_C(t) = V_G \quad (5)$$

Sustituyendo
(4) en (2),

$$LC \frac{d^2 i_L(t)}{dt^2} + \left[\frac{L(1 - gR)}{R} + RC \right] \frac{di_L(t)}{dt} + (2 - gR) i_L(t) = \frac{(1 - gR) V_G}{R} \quad (6)$$

Apartado C

Sustituyendo los
datos del enunciado
en (5-6) se obtienen
los coeficientes de
la ecuación
característica.

$$a = LC = 10^{-12} \text{ s}^2, \quad b = \frac{L(1 - gR)}{R} + RC = 4 \times 10^6 \text{ s}^{-1}, \quad c = 2 - gR = 4$$

$$\alpha = \frac{b}{2a} = 2 \times 10^6 \text{ s}^{-1}, \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{c}{a}} = 2 \times 10^6 \text{ rad/s}$$

$$\alpha^2 = \omega_0^2 \Rightarrow \text{respuesta crítica}$$

Expresión temporal
de $i_L(t)$.

$$i_L(t) = i_{Lf} + Ate^{-\alpha t} + Be^{-\alpha t} \quad (7)$$

Sustituyendo (7) en (4),

$$v_C(t) = V_G - R i_{Lf} + A(\alpha L - R)te^{-\alpha t} + [B(\alpha L - R) - LA]e^{-\alpha t} \quad (8)$$

Por el circuito

Por (7-8)

0 A	$i_L(0)$	$i_{Lf} + B$	\Rightarrow	$i_{Lf} = 0.75 \text{ A}$
$0.75 \text{ A} = \frac{(1 - gR)V_G}{(2 - gR)R}$	$i_L(\infty)$	i_{Lf}		$A = -1.5 \times 10^6 \text{ A/s}$
$1 \text{ V} = V_G$	$v_C(0)$	$V_G - R i_{Lf} + [B(\alpha L - R) - LA]$		$B = -0.75 \text{ A}$

$$i_L(t) = 0.75 - 1.5 \times 10^6 t e^{-2 \times 10^6 t} - 0.75 e^{-2 \times 10^6 t} \text{ A (t en s)} =$$

$$= 0.75 - 1.5 t e^{-2t} - 0.75 e^{-2t} \text{ A (t en } \mu\text{s)}$$

Sustituyendo
estos resultados
en (7-8),

$$v_C(t) = 0.25 - 1.5 \times 10^6 t e^{-2 \times 10^6 t} + 0.75 e^{-2 \times 10^6 t} \text{ V (t en s)} =$$

$$= 0.25 - 1.5 t e^{-2t} + 0.75 e^{-2t} \text{ V (t en } \mu\text{s)}$$