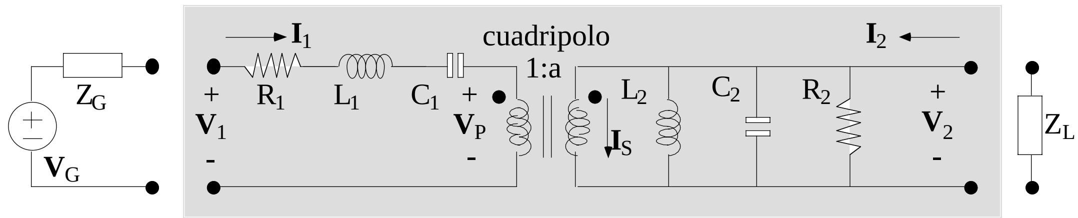
Problema 4



El circuito de la figura, en cuya representación se ha utilizado notación fasorial, funciona en régimen sinusoidal permanente a una frecuencia angular ω.

Apartado A (0.8 puntos). Obtened los parámetros *z* del cuadripolo en función de las características de sus elementos.

Apartado B (0.4 puntos). Suponiendo $\omega L_1 = (\omega C_1)^{-1}$ y $\omega L_2 = (\omega C_2)^{-1}$, hallad el valor de *a* para que el cuadripolo sea simétrico.

Apartado C (0.8 puntos). En función de los parámetros *z* del cuadripolo, hallad la ganancia de tensión $\mathbf{V}_2/\mathbf{V}_G$ con el cuadripolo en circuito abierto ($Z_L = \infty\ \Omega$) y la ganancia de corriente $\mathbf{I}_2/\mathbf{I}_1$ con el cuadripolo en cortocircuito ($Z_L = 0\ \Omega$).

Apartado A

Para simplificar el tratamiento matemático se utiliza la siguiente nomenclatura:

$$Z_1 = R_1 + j\omega L_1 + \frac{1}{j\omega C_1} \tag{1}$$

$$Y_2 = \frac{1}{R_2} + j\omega C_2 + \frac{1}{j\omega L_2} \tag{2}$$

Ecuaciones de malla.

Ecuaciones del transformador ideal.

$$\mathbf{V}_1 = \mathbf{I}_1 Z_1 + \mathbf{V}_P$$

$$\mathbf{I}_2 = \mathbf{V}_2 Y + \mathbf{I}_S$$

$$\mathbf{I}_1 = -a\mathbf{I}_S$$

$$\mathbf{V}_2 = a\mathbf{V}_P$$

$$\Rightarrow$$

$$\mathbf{V}_1 = \mathbf{I}_1\left(Z_1 + \frac{1}{a^2 Y_2}\right) + \frac{\mathbf{I}_2}{aY_2} \tag{3}$$

$$\mathbf{V}_2 = \frac{\mathbf{I}_1}{aY_2} + \frac{\mathbf{I}_2}{Y_2} \tag{4}$$

Los parámetros *z* se definen mediante las expresiones

$$\mathbf{V}_1 = \mathbf{I}_1 z_{11} + \mathbf{I}_2 z_{12} \tag{5}$$

$$\mathbf{V}_2 = \mathbf{I}_1 z_{21} + \mathbf{I}_2 z_{22} \tag{6}$$

Comparando (3-4) con (5-6), se obtiene

$$z_{11} = Z_1 + \frac{1}{a^2 Y_2},\ z_{12} = \frac{1}{aY_2},\ z_{21} = \frac{1}{aY_2},\ z_{22} = \frac{1}{Y_2} \tag{7}$$

Apartado B

El cuadripolo es recíproco, ya que, como se desprende de (7), la condición $z_{12} = z_{21}$ se cumple siempre. Para que sea simétrico, ha de verificarse además que $z_{11} = z_{22}$.

En las condiciones del enunciado, $Z_1 = R_1$ e $Y_2 = 1/R_2$.

Teniendo en cuenta lo anterior,

$$z_{11} = z_{22} \Rightarrow R_1 + \frac{R_2}{a^2} = R_2 \Rightarrow a = \sqrt{\frac{R_2}{R_1 - R_2}}$$

Apartado C

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{V}_G &= \mathbf{I}_1 Z_G + \mathbf{V}_1 \\ \mathbf{V}_1 &= \mathbf{V}_2 a - \mathbf{I}_2 b \\ \mathbf{I}_1 &= \mathbf{V}_2 c - \mathbf{I}_2 d \\ \mathbf{I}_2 &= 0\ \text{A} \end{aligned}\right| \Rightarrow \frac{\mathbf{V}_2}{\mathbf{V}_G} = \frac{z_{21}}{Z_G + z_{11}}$$

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{V}_G &= \mathbf{I}_1 Z_G + \mathbf{V}_1 \\ \mathbf{V}_1 &= \mathbf{V}_2 a - \mathbf{I}_2 b \\ \mathbf{I}_1 &= \mathbf{V}_2 c - \mathbf{I}_2 d \\ \mathbf{V}_2 &= 0\ \text{V} \end{aligned}\right| \Rightarrow \frac{\mathbf{I}_2}{\mathbf{I}_1} = -\frac{z_{21}}{z_{22}}$$