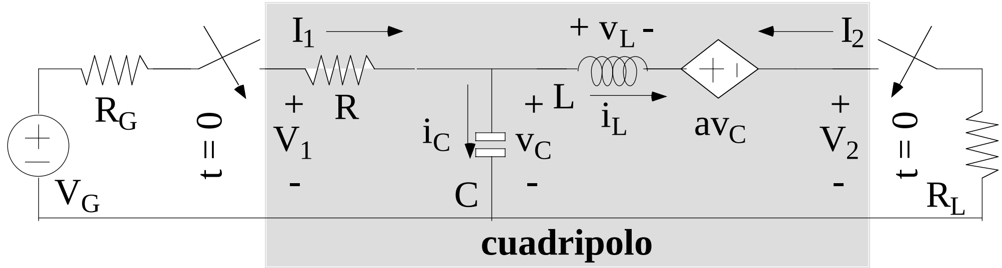
Problema 1



En el circuito de la figura la fuente independiente es continua, y son datos las características de todos los elementos. El circuito ha permanecido mucho tiempo en el mismo estado antes del cambio de posición de los interruptores; una vez producido éste, ya no experimenta más cambios.

A (0.4 puntos) Obtened los parámetros *h* del cuadripolo cuando se ha alcanzado el régimen permanente final.

B (0.3 puntos) Obtened V_2 en función de V_G, R_G, R_L y los parámetros *y* del cuadripolo (se suponen conocidos) cuando se ha alcanzado el régimen permanente final.

C (1.2 puntos) Obtened los valores de v_C, i_C, i_L y v_L, para $t = 0^-$, 0^+ e ∞.

D (0.6 puntos) Obtened las ecuaciones diferenciales que rigen el comportamiento de v_C e i_L para $t > 0\ s$.

Apartado A

El régimen permanente final es continuo ya que la fuente independiente también lo es. En esas condiciones, la capacidad es un circuito abierto ($i_C = 0\ A$) y la inductancia es un cortocircuito ($v_L = 0\ V$), y en el cuadripolo se cumplen las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned} I_1 + I_2 &= i_C \\ V_1 &= RI_1 + v_C \\ V_1 &= RI_1 + v_L + av_C + V_2 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} V_1 &= RI_1 + \frac{V_2}{1 - a} \\ I_2 &= -I_1 \end{aligned}$$

Comparando estas expresiones con las que definen los parámetros *h*, se obtiene

$$\begin{aligned} V_1 &= RI_1 + \frac{V_2}{1 - a} \\ I_2 &= -I_1 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} V_1 &= h_{11}I_1 + h_{12}V_2 \\ I_2 &= h_{21}I_1 + h_{22}V_2 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} h_{11} &= R \qquad & h_{12} &= \frac{1}{1 - a} \\ h_{21} &= -1 \qquad & h_{22} &= 0\ S \end{aligned}$$

Apartado B

En el circuito se verifican las relaciones

$$I_1 = y_{11}V_1 + y_{12}V_2 \qquad V_G = R_G I_1 + V_1$$

$$I_2 = y_{12}V_1 + y_{22}V_2 \qquad V_2 = - R_L I_2$$

a partir de las cuales puede deducirse

$$I_2 = - \frac{V_2}{R_L} \qquad V_1 = y_{12} - \frac{y_{11}}{y_{21}}\left(y_{22} + \frac{1}{R_L}\right) \qquad I_1 = \left[y_{12} - \frac{y_{11}}{y_{21}}\left(y_{22} + \frac{1}{R_L}\right)\right]V_2$$

$$V_2 = \frac{y_{21}V_G}{y_{12}y_{21}R_G - (1 + y_{11}R_G)(y_{22} + 1/R_L)}$$

Apartado C

En régimen permanente continuo
la capacidad es un circuito abierto
y la inductancia es un cortocircuito.

$$i_C(0^-) = 0 \text{ A},\ v_L(0^-) = 0 \text{ V}$$

Para *t < 0 s*, los elementos reactivos
están desconectados de la excitación.

$$v_C(0^-) = 0 \text{ V},\ i_L(0^-) = 0 \text{ A}$$

La tensión en la capacidad
y la corriente en la inductancia
no pueden variar bruscamente.

$$v_C(0^+) = v_C(0^-) = 0 \text{ V},\ i_L(0^+) = i_L(0^-) = 0 \text{ A}$$

Ecuaciones de malla

$$V_G = (R_G + R)[i_C(0^+) + i_L(0^+)] + v_C(0^+) \Rightarrow i_C(0^+) = \frac{V_G}{R_G + R}$$

$$v_C(0^+) = v_L(0^+) + av_C(0^+) + R_L i_L(0^+) \Rightarrow v_L(0^+) = 0 \text{ V}$$

En régimen permanente continuo
la capacidad es un circuito abierto
y la inductancia es un cortocircuito.

$$i_C(\infty) = 0 \text{ A},\ v_L(\infty) = 0 \text{ V}$$

Ecuaciones
de malla

$$V_G = (R_G + R)[i_C(\infty) + i_L(\infty)] + v_C(\infty)$$

$$v_C(\infty) = v_L(\infty) + av_C(\infty) + R_L i_L(\infty)$$

$$\Rightarrow \quad v_C(\infty) = \frac{R_L V_G}{(R_G + R)(1 - a) + R_L} \qquad i_L(\infty) = \frac{(1 - a)V_G}{(R_G + R)(1 - a) + R_L}$$

Apartado D

Para $t > 0\ s$ en el circuito se verifican las siguientes ecuaciones (en las que se han utilizado las relaciones funcionales que definen los elementos reactivos):

Ecuación de nudo
$$\frac{V_G - v_C}{R_G + R} = i_C + i_L \Rightarrow i_L = \frac{V_G}{R_G + R} - \frac{v_C}{R_G + R} - C\frac{dv_C}{dt}$$

Ecuación de malla
$$v_C = v_L + av_C + R_L i_L \Rightarrow v_C = \frac{L}{1 - a}\frac{di_L}{dt} + \frac{R_L i_L}{1 - a}$$

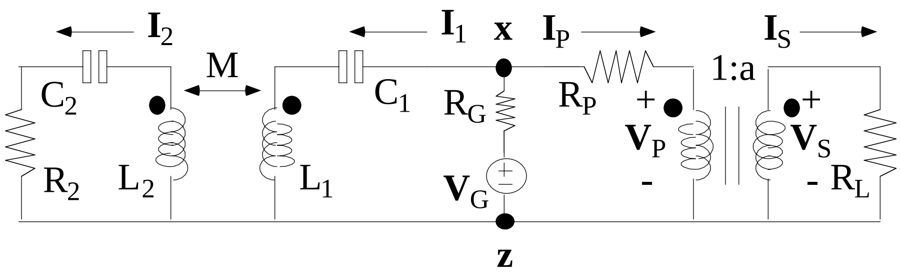
Combinando estas ecuaciones se obtienen las ecuaciones diferenciales buscadas:

$$LC\frac{d^2v_C}{dt^2} + \left(R_L C + \frac{L}{R_G + R}\right)\frac{dv_C}{dt} + \left(1 - a + \frac{R_L}{R_G + R}\right)v_C = \frac{R_L V_G}{R_G + R}$$

$$LC\frac{d^2i_L}{dt^2} + \left(R_L C + \frac{L}{R_G + R}\right)\frac{di_L}{dt} + \left(1 - a + \frac{R_L}{R_G + R}\right)i_L = \frac{(1 - a)V_G}{R_G + R}$$

Problema 2

Para los
Apartados A y B

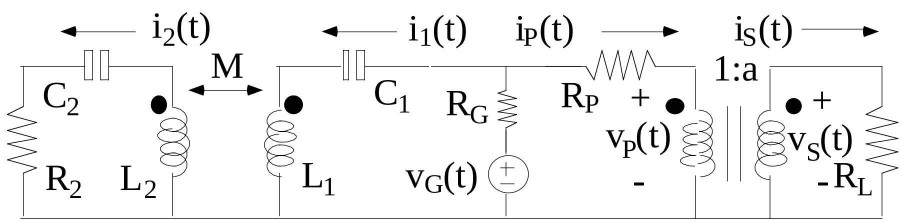


El circuito de la figura, en cuya representación se ha utilizado notación fasorial, funciona en régimen sinusoidal permanente a una frecuencia angular ω fija y conocida. Son datos las características de todos los elementos.

A (1.2 puntos) Escribid un sistema algebraico de seis ecuaciones independientes a partir del cual sea posible obtener los valores de $\boldsymbol{I_1}$, $\boldsymbol{I_2}$, $\boldsymbol{I_P}$, $\boldsymbol{I_S}$, $\boldsymbol{V_P}$ y $\boldsymbol{V_S}$.

B (0.6 puntos) Obtened el circuito equivalente de Thèvenin entre **x** y **z**.

Para el
Apartado C



$$v_G(t) = V_D + V_A\cos(\omega t)$$

$$\omega M = R_2 = R_G = R_P = \frac{R_L}{a^2} = R,\ \frac{1}{\sqrt{L_1C_1}} = \omega = \frac{1}{\sqrt{L_2C_2}}$$

C (0.7 puntos) En las condiciones indicadas en la figura, obtened la expresión temporal de la potencia instantánea en R_P.

Apartado A

$$0 = -\mathbf{I}_1 j\omega M + \mathbf{I}_2\left(R_2 + \frac{1}{j\omega C_2} + j\omega L_2\right)$$

Ecuaciones de malla

$$\mathbf{V}_G = \mathbf{I}_1\left(j\omega L_1 + \frac{1}{j\omega C_1} + R_G\right) - \mathbf{I}_2 j\omega M + \mathbf{I}_P R_G$$

$$\mathbf{V}_G = \mathbf{I}_1 R_G + \mathbf{I}_P(R_G + R_P) + \mathbf{V}_P$$

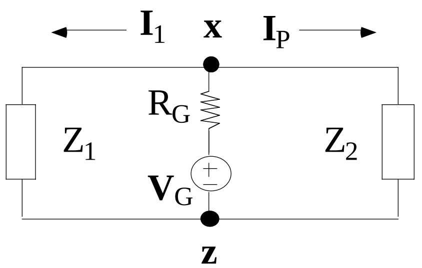
$$\mathbf{V}_S = \mathbf{I}_S R_L$$

Ecuaciones del transformador ideal

$$\mathbf{V}_S = a\mathbf{V}_P,\ \mathbf{I}_P = a\mathbf{I}_S$$

Apartado B

El generador de Thèvenin ha de calcularse con el circuito como está. El circuito puede representarse como se indica en la figura siguiente, en la que se han utilizado las propiedades de reflexión de impedancias en los transformadores.



$$Z_1 = \frac{(\omega M)^2}{R_2 + \dfrac{1}{j\omega C_2} + j\omega L_2} + j\omega L_1 + \frac{1}{j\omega C_1}$$

$$Z_2 = R_P + \frac{R_L}{a^2}$$

$$Z_{12} = Z_1 \,//\, Z_2$$

En el circuito se verifica:

$$\mathbf{V}_{Th} = \mathbf{V}_{xz} = \frac{Z_{12}}{R_G + Z_{12}}\mathbf{V}_G$$

Para calcular la impedancia equivalente, dado que el circuito no contiene fuentes dependientes, puede desactivarse el generador de tensión (se sustituye por un cortocircuito) y obtener la impedancia total entre **x** y **z**. Ésta está constituida por tres impedancias en paralelo, con lo que

$$Z_{Th} = \left(\frac{1}{Z_1} + \frac{1}{R_G} + \frac{1}{Z_2}\right)^{-1}$$

Apartado C

En el circuito están presentes dos excitaciones, por lo que habrá que aplicar el principio de superposición.

Para la componente sinusoidal son aplicables las ecuaciones mostradas en el ***Apartado A***, con las siguientes particularidades:

-El fasor correspondiente al generador es $\boldsymbol{V}_G = V_A$ (número real).

-Los conjuntos *LC* serie están en resonancia (como se deduce de los datos), por lo que se comportan como cortocircuitos.

-Las ecuaciones del transformador ideal se reescriben de modo que se utilice la propiedad de reflexión de impedancias.

En estas condiciones, se verifican las siguientes relaciones:

$$0 = -\mathbf{I}_1 j\omega M + \mathbf{I}_2\left(R_2 + \frac{1}{j\omega C_2} + j\omega L_2\right) \Rightarrow 0 = -\mathbf{I}_1 jR + \mathbf{I}_2 R \Rightarrow \mathbf{I}_2 = j\mathbf{I}_1$$

$$\mathbf{V}_G = \mathbf{I}_1\left(j\omega L_1 + \frac{1}{j\omega C_1} + R_G\right) - \mathbf{I}_2 j\omega M + \mathbf{I}_P R_P \Rightarrow V_A = \mathbf{I}_1 R - \mathbf{I}_2 jR + \mathbf{I}_P R \Rightarrow \mathbf{I}_1 = \frac{V_A}{2R} - \frac{\mathbf{I}_P}{2}$$

$$\mathbf{V}_G = \mathbf{I}_1 R_G + \mathbf{I}_P\left(R_G + R_P + \frac{R_L}{a^2}\right) \Rightarrow V_A = 5\mathbf{I}_P R$$

$$i_{pa}(t) = \mathrm{Re}\{\mathbf{I}_P e^{j\omega t}\} = \frac{V_A}{5R}\cos(\omega t)$$

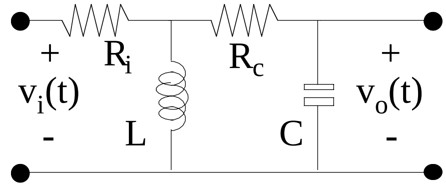
Debido a que C_1 se comporta como un circuito abierto para la componente continua, el circuito sometido a esta excitación se reduce al generador en serie con las resistencias R_G y R_P (el primario del transformador ideal es un cortocircuito), con lo que

$$V_D = I_P(R_G + R_P) \Rightarrow I_P = \frac{V_D}{2R}$$

Combinando las dos excitaciones,

$$i_P(t) = I_P + i_{pa}(t) = \frac{V_D}{2R} + \frac{V_A}{5R}\cos(\omega t) \Rightarrow p_{Rp}(t) = i_P^2(t)R$$

Problema 3



$R_i = R_c = 1\ \Omega$, L = 1 H, C = 1 F

Las condiciones iniciales en el circuito de la figura son nulas. Sean $V_i(s)$ y $V_o(s)$ las transformadas de Laplace de las señales de entrada (v_i) y salida (v_o), respectivamente.

A (0.6 puntos) Obtened la función de transferencia del circuito, definida como $H(s) = V_o(s)/V_i(s)$.

B (0.9 puntos) Obtened la expresión temporal correspondiente a la función de transferencia. Si no se ha calculado ésta en el ***Apartado A***, supóngase que es

$$H(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{0.5s}{s^2 + s + 0.5}$$

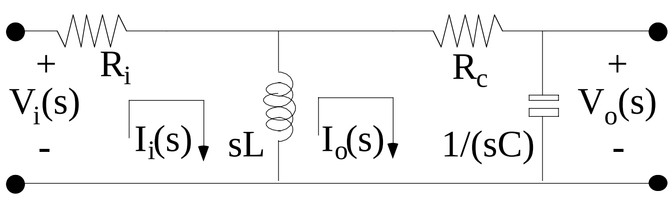
C (0.4 puntos) Suponiendo que la transformada de Laplace de la función de transferencia es la indicada en el ***Apartado B*** y que la entrada es la función escalón unitario, obtened los valores a los que tiende $v_o(t)$ para $t = 0^+$ e ∞.

D (0.6 puntos) Suponiendo que la función de transferencia es la indicada en el ***Apartado B*** y que la entrada es de la forma

$$v_i(t) = V_A\cos(\omega t + \varphi),\ V_A = \sqrt{2}\ \text{V},\ \omega = 1\ \text{rad/s},\ \varphi = 45\ °$$

obtened la expresión temporal de la salida en régimen permanente.

Apartado A



En términos de transformada de Laplace, el circuito queda como se indica en la figura adjunta (recuérdese que las condiciones iniciales son nulas), pudiendo ser analizado por mallas.

$$V_i = I_i(R_i + sL) - I_o sL$$

$$0 = -I_i sL + I_o\left(sL + R_c + \frac{1}{sC}\right)$$

$$\Rightarrow$$

$$I_i = \left(1 + \frac{R_c}{sL} + \frac{1}{s^2LC}\right)I_o$$

$$I_o = \frac{V_i}{R_i + R_c + \frac{1}{s}\left(\frac{R_iR_c}{L} + \frac{1}{C}\right) + \frac{R_i}{s^2LC}}$$

$$V_o = \frac{I_o}{sC} = \frac{sLV_i}{s^2LC(R_i + R_c) + s(R_iR_cC + L) + R_i}$$

Utilizando los datos del enunciado, se obtiene finalmente

$$H(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{0.5s}{s^2 + s + 0.5}$$

Apartado B

Las raíces del denominador de la expresión representativa de la función de transferencia son complejas, como lo demuestra el siguiente cálculo.

$$s^2 + s + 0.5 = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} s_1 &= -0.5 - j0.5\ s^{-1} = \alpha - j\beta \\ s_2 &= -0.5 + j0.5\ s^{-1} = \alpha + j\beta \end{aligned}$$

En consecuencia, la expansión en fracciones parciales de la expresión representativa de la función de transferencia es de la forma

$$H(s) = \frac{K}{s + \alpha - j\beta} + \frac{K^*}{s + \alpha + j\beta}$$

El coeficiente *K* se calcula como se indica a continuación.

$$K = \{H(s)(s + 0.5 - j0.5)\}_{s = -0.5 + j0.5} = \left\{\frac{0.5s}{s + 0.5 + j0.5}\right\}_{s = -0.5 + j0.5} = 0.25\sqrt{2}_{\angle 45\,^\circ} = |K|_{\angle\theta}$$

La transformada inversa de *H(s)*, que es la expresión temporal que se está buscando, está dada por

$$h(t) = 2|K|e^{\alpha t}\cos(\beta t + \theta) = 0.5\sqrt{2}e^{-0.5t}\cos(0.5t + 45\,^\circ)$$

Apartado C

$$v_i(t) = u(t) \Rightarrow V_i(s) = \mathcal{L}\{u(t)\} = \frac{1}{s}$$

$$V_o(s) = H(s)V_i(s) = \frac{0.5}{s^2 + s + 0.5}$$

Aplicando los teoremas de los valores inicial y final se tiene

$$\text{lím}(t \to 0^+)\ v_o(t) = \text{lím}(s \to \infty)[sV_o(s)] = 0\ \text{V}$$

$$\text{lím}(t \to \infty)\ v_o(t) = \text{lím}(s \to 0)[sV_o(s)] = 0\ \text{V}$$

Apartado D

Utilizando los datos del enunciado se tiene

$$H(s) = \frac{0.5s}{s^2 + s + 0.5} \Rightarrow H(\omega) = \frac{j0.5\omega}{(0.5 - \omega^2) + j\omega} = 0.4 - j0.2 = \sqrt{0.2}_{\angle - 26.57\,°} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |H(\omega)| = \sqrt{0.2},\ \theta(\omega) = - 26.57\ °$$

Para una entrada del tipo sinusoidal permanente (como es el caso), la salida en régimen permanente es

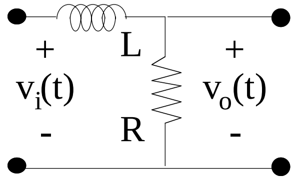
$$v_o(t) = V_A|H(j\omega)|\cos[\omega t + \varphi + \theta(\omega)] = \sqrt{0.4}\cos(t + 18.43\ °)\ \text{V, t en s}$$

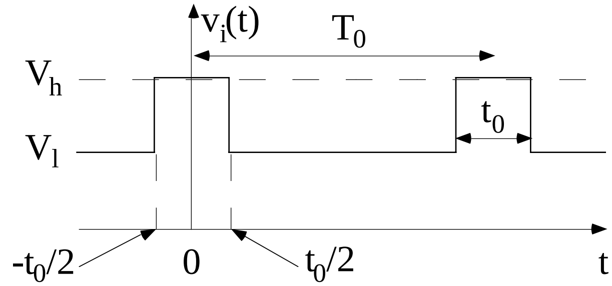
Problema 4

$R = 1\ \Omega$, $L = 38.5$ mH

$V_h = 2\pi$ V, $V_l = \pi$ V

$T_0 = 1$ s, $t_0 = 0.25$ s





A (0.5 puntos) ¿Qué tipo de respuesta presenta el filtro de la figura? Obtened la frecuencia o las frecuencias que definen su banda de paso.

B (1.2 puntos) A la entrada del filtro se aplica el tren periódico de pulsos mostrado en la figura. Obtened los espectros de amplitud y fase de la salida. Suponed que la función de transferencia del filtro es ideal y considerad únicamente las componentes de la salida correspondientes a la banda de paso del filtro. Si no se ha resuelto el apartado anterior, calcúlense cinco componentes de la salida.

C (0.8 puntos) Obtened la transformada de Fourier de la señal de entrada al filtro suponiendo que $V_l = 0\ V$ y que $T_0 = \infty$.

Apartado A

Se trata de un filtro paso bajo. Su frecuencia de corte está dada por

$$\omega_c = \frac{R}{L} = 26 \text{ rad/s}$$

Apartado B

Para obtener los espectros representaremos la señal de entrada mediante la formulación exponencial.

$$v_i(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} C_k e^{jk\omega_0 t},\ \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = 2\pi \text{ rad/s}$$

En la salida del filtro se tendrán todas las componentes que verifiquen la siguiente condición:

$$k\omega_0 < \omega_c \Rightarrow k < \frac{\omega_c}{\omega_0} = 4.19$$

Luego la salida, teniendo en cuenta que la función de transferencia del filtro es ideal (deja pasar sin atenuación todas las componentes de las frecuencias incluidas en la banda de paso y elimina completamente cualquier otra componente), será

$$v_i(t) = \sum_{-4}^{4} C_k e^{jk\omega_0 t}, \ \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = 2\pi \text{ rad/s}$$

Los coeficientes de la serie se calculan como se indica seguidamente.

$$C_k = \int_{t_0}^{t_0 + T_0} v_i(t)e^{-jk\omega_0 t}dt = \frac{1}{T_0}\int_{-t_0/2}^{t_0/2} V_h e^{-jk\omega_0 t}dt + \frac{1}{T_0}\int_{t_0/2}^{T_0 - t_0/2} V_l e^{-jk\omega_0 t}dt =$$

$$= \frac{(V_h - V_l)t_0}{T_0}\,\frac{\text{sen}(k\pi t_0/T_0)}{k\pi t_0/T_0}$$

Dada la simetría par de la función *sen(x)/x*, únicamente calcularemos los coeficientes correspondientes a valores de *k* comprendidos entre 0 y 4; los correspondientes a valores de *k* comprendidos entre - 4 y 0 coinciden con sus equivalentes en el intervalo anterior. Obsérvese, además, que todos los coeficientes son reales, con lo que el espectro de fases es nulo (fase nula para cualquier componente).

k	$\mathbf{k\pi t_0/T_0}$	$\mathbf{C_k}$
0	0	0.79 V
1	0.25π	0.71 V
2	0.5π	0.5 V
3	0.75π	0.24 V
4	π	0 V

El coeficiente correspondiente a $k = 0$ se ha obtenido aplicando la regla de l’Hôpital.

Apartado C

$$V_i(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} v_i(t)e^{-j\omega t}dt = A(\omega) + jB(\omega)$$

En las condiciones indicadas, $v_i(t)$ es un único pulso con simetría par, con lo que

$$B(\omega) = 0$$

$$A(\omega) = 2\int_{0}^{\infty} v_i(t)\cos(\omega t)dt = 2\int_{0}^{t_0/2} V_h\cos(\omega t)dt = \frac{4\pi}{\omega}\mathrm{sen}\left(\frac{\omega t_0}{2}\right)\ \mathrm{V}$$