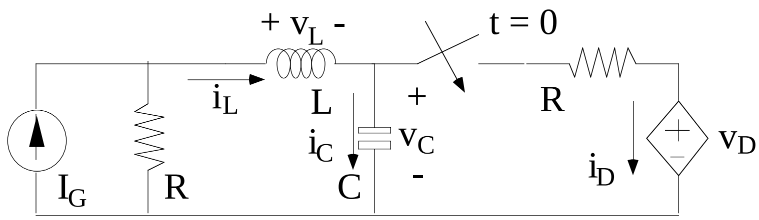
Problema 1



$v_D(t) = ri_L(t)$

En el circuito de la figura, la fuente independiente es continua y son datos las características de todos los elementos. El circuito ha permanecido sin cambios durante mucho tiempo antes del cierre del interruptor. Una vez producido éste, ya no ocurren más cambios.

Datos (**sólo para el apartado C**):

I_G = 1 A, r = - 1 Ω, R = 1 Ω, L = 1 μH, C = 1 μF

Apartado A (1.2 puntos). Obtened los valores de $i_L(t)$, $v_L(t)$, $v_C(t)$, e $i_C(t)$ en los instantes $t = 0^-$, $t = 0^+$ y $t = \infty$ segundos.

Apartado B (0.5 puntos). Obtened las ecuaciones diferenciales que caracterizan la evolución de $i_L(t)$ y $v_C(t)$ para $t > 0$ segundos.

Apartado C (0.8 puntos). Obtened las expresiones temporales de $i_L(t)$ y $v_C(t)$ para $t > 0$ segundos.

Apartado A

En régimen permanente continuo, la inductancia es un cortocircuito y la capacidad, un circuito abierto.

$$v_L(0^-) = 0 \text{ V},\ i_C(0^-) = 0 \text{ A}$$

Ecuaciones de malla.

$$i_L(0^-) = i_C(0^-) = 0 \text{ A}$$

$$R[I_G - i_L(0^-)] = v_L(0^-) + v_C(0^-) \Rightarrow v_C(0^-) = RI_G$$

La capacidad y la inductancia no admiten cambios bruscos de tensión y corriente, respectivamente.

$$v_C(0^+) = v_C(0^-) = RI_G,\ i_L(0^+) = i_L(0^-) = 0 \text{ A}$$

Ecuaciones de malla y de nudo, y relación funcional de la fuente dependiente.

$$R[I_G - i_L(0^+)] = v_L(0^+) + v_C(0^+) \Rightarrow v_L(0^+) = 0 \text{ V}$$

$$v_C(0^+) = Ri_D(0^+) + v_D(0^+) = Ri_D(0^+) + ri_L(0^+) \Rightarrow i_D(0^+) = I_G$$

$$i_L(0^+) = i_D(0^+) + i_C(0^+) \Rightarrow i_C(0^+) = - I_G$$

En régimen permanente continuo, la inductancia es un cortocircuito y la capacidad, un circuito abierto.

$$v_L(\infty) = 0 \text{ V},\ i_C(\infty) = 0 \text{ A}$$

Ecuaciones de nudo y de malla, y relación funcional de la fuente dependiente.

$$i_L(\infty) = i_D(\infty) + i_C(\infty)$$

$$v_C(\infty) = Ri_D(\infty) + v_D(\infty) = $$
$$= Ri_D(\infty) + ri_L(\infty)$$

$$R[I_G - i_L(\infty)] = v_L(\infty) + v_C(\infty)$$

$$\Rightarrow$$

$$i_L(\infty) = \frac{RI_G}{2R + r}$$

$$v_C(\infty) = \frac{(R + r)RI_G}{(2R + r)}$$

Apartado B

Ecuaciones de nudo y de malla, y relaciones funcionales de la fuente dependiente y los elementos reactivos.

$$i_L(t) = i_C(t) + i_D(t) = i_C(t) + \frac{v_C(t) - v_D(t)}{R} \Rightarrow \qquad (1)$$

$$\Rightarrow i_L(t) = \frac{v_C(t)}{R + r} + \frac{RC}{(R + r)}\frac{dv_C(t)}{dt} \qquad (2)$$

$$R[I_G - i_L(t)] = v_L(t) + v_C(t) \Rightarrow \qquad (3)$$

$$\Rightarrow v_C(t) = RI_G - Ri_L(t) - L\frac{di_L(t)}{dt} \qquad (4)$$

Sustituyendo (2) en (4),

$$LC\frac{d^2v_C(t)}{dt^2} + \left(\frac{L}{R} + RC\right)\frac{dv_C(t)}{dt} + \frac{(2R + r)v_C(t)}{R} = (R + r)I_G \qquad (5)$$

Sustituyendo (4) en (2),

$$LC\frac{d^2i_L(t)}{dt^2} + \left(\frac{L}{R} + RC\right)\frac{di_L(t)}{dt} + \frac{(2R + r)i_L(t)}{R} = I_G \qquad (6)$$

Apartado C

Sustituyendo los datos del enunciado en (5-6) se obtienen los coeficientes de la ecuación característica.

$$a = LC = 10^{-12}\ s^2,\ b = \frac{L}{R} + RC = 2 \times 10^6\ s^{-1},\ c = \frac{2R + r}{R} = 1$$

$$\alpha = \frac{b}{2a} = 10^6\ s^{-1},\ \omega_0 = \sqrt{\frac{c}{a}} = 10^6\ \text{rad/s}$$

$$\alpha^2 = \omega_0^2 \Rightarrow \text{respuesta crítica}$$

Expresión temporal de $i_L(t)$.

$$i_L(t) = i_{Lf} + Ate^{-\alpha t} + Be^{-\alpha t} \qquad (7)$$

Sustituyendo (7) en (4),

$$v_C(t) = RI_G - Ri_{Lf} + A(\alpha L - R)te^{-\alpha t} + [B(\alpha L - R) - LA]e^{-\alpha t} \qquad (8)$$

Por el circuito		Por (7-8)		
$0\ A$	$i_L(0)$	$i_{Lf} + B$		$i_{Lf} = 1\ A$
$1\ A = \frac{RI_G}{2R + r}$	$i_L(\infty)$	i_{Lf}	$\Rightarrow$	$A = -10^6\ A/s$
$1\ V = RI_G$	$v_C(0)$	$RI_G - Ri_{Lf} + [B(\alpha L - R) - LA]$		$B = -1\ A$

Sustituyendo estos resultados en (7-8),

$$i_L(t) = 1 - 10^6te^{-10^6t} - e^{-10^6t}\ A\ (t \text{ en s}) = 1 - te^{-t} - e^{-t}\ A\ (t \text{ en } \mu s)$$

$$v_C(t) = e^{-10^6t}\ V\ (t \text{ en s}) = e^{-t}\ V\ (t \text{ en } \mu s)$$