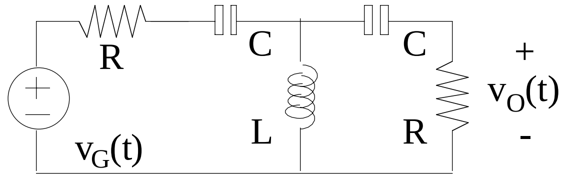
Problema 3



El circuito de la figura funciona en régimen sinusoidal permanente.

Datos (**para los apartados A, B y C**):
$v_G(t) = V_G\cos(\omega_G t)$
Se suponen conocidos los valores de V_G (real y positivo), R, L y C.

Datos (**sólo para el apartado D**):
$v_G(t) = V_1\cos(\omega_1 t) + V_2\cos(\omega_2 t)$, $V_1 = 1$ V, $\omega_1 = 1$ krad/s, $V_2 = 1$ V, $\omega_2 = 1$ Grad/s
$R_1 = 1\ \Omega$, $L = 1\ \mu$H, $C = 1\ \mu$F

Para los apartados B, C y D se recomienda utilizar razonamientos aproximados antes que cálculos exactos.

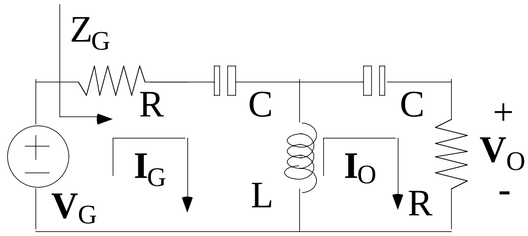
Apartado A (0.8 puntos). Obtened el valor de la frecuencia angular de resonancia (ω_0) del circuito (en el supuesto de que exista; si hay dos o más, basta con obtener una).

Apartado B (0.5 puntos). Obtened los valores a los que tienden el módulo y la fase del fasor representativo de $v_O(t)$ cuando la frecuencia angular ω toma valores muy bajos.

Apartado C (0.5 puntos). Obtened los valores a los que tienden el módulo y la fase del fasor representativo de $v_O(t)$ cuando la frecuencia angular ω toma valores muy altos.

Apartado D (1.2 puntos). Obtened la expresión temporal de $v_O(t)$ con los datos correspondientes a este apartado.

Apartado A



Se adopta la nomenclatura indicada en la figura adjunta. Además, se utiliza la siguiente notación:

$$Z = R + jX,\ X = \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)$$

Ecuaciones de malla.

$$\mathbf{V}_G = \mathbf{I}_G Z - \mathbf{I}_O j\omega L,\ 0 = -\mathbf{I}_G j\omega L + \mathbf{I}_O Z$$

Impedancia que *ve* la fuente.

$$Z_G = \frac{\mathbf{V}_G}{\mathbf{I}_G} = R + \frac{(\omega L)^2 R}{R^2 + X^2} + jX\left[1 - \frac{(\omega L)^2}{R^2 + X^2}\right]$$

$$\omega = \omega_0 \Rightarrow \mathrm{Im}\{Z_G\} = 0\ \Omega$$

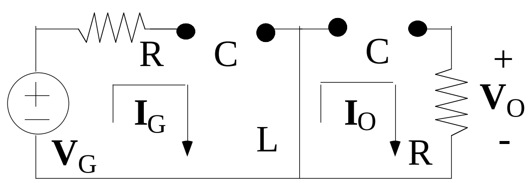
$$\Rightarrow X = 0\ \Omega \Rightarrow \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$$\Rightarrow \frac{(\omega L)^2}{R^2 + X^2} = 1 \Rightarrow \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{2LC - (RC)^2}}$$

En ambos casos el valor buscado es el afectado por el signo positivo de la raíz.
La segunda frecuencia de resonancia sólo existe si el radical es positivo.
Las dos frecuencias de resonancia coinciden si

$$R = \sqrt{\frac{L}{C}}$$

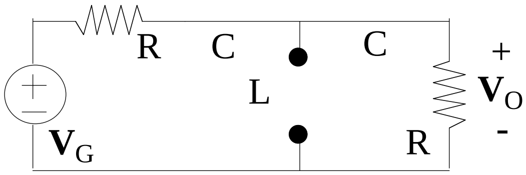
Apartado B



Para frecuencias muy bajas, las inductancias y las capacidades se comportan aproximadamente como cortocircuitos y circuitos abiertos, respectivamente, con lo que el circuito queda como se indica en la figura adjunta, a partir de la cual puede deducirse

$$\mathbf{V}_L = \mathbf{I}_G j\omega L \approx (\mathbf{V}_G j\omega C) j\omega L \Rightarrow \mathbf{V}_O = \mathbf{I}_O R \approx (\mathbf{V}_L j\omega C) R = -j\omega^3 RLC^2 \mathbf{V}_G \Rightarrow$$
$$\Rightarrow |\mathbf{V}_O| \to 0\ \mathrm{V},\ \angle\mathbf{V}_O \to \angle\mathbf{V}_G - 90\ ° = -90\ °$$

Apartado C



Para frecuencias muy altas, las inductancias y las capacidades se comportan aproximadamente como circuitos abiertos y cortocircuitos, respectivamente, con lo que el circuito queda como se indica en la figura adjunta, a partir de la cual puede deducirse

$$\mathbf{V}_O \approx \frac{R\mathbf{V}_G}{R + R} = \frac{\mathbf{V}_G}{2} \Rightarrow |\mathbf{V}_O| \rightarrow \frac{|\mathbf{V}_G|}{2} = \frac{V_G}{2},\ \angle\mathbf{V}_O \rightarrow \angle\mathbf{V}_G = 0\ °$$

Apartado D

Dado que hay dos excitaciones sinusoidales con frecuencias distintas, ha de aplicarse el principio de superposición. Además, con los datos del enunciado puede comprobarse que las dos frecuencias de resonancia calculadas en el apartado A tienen el mismo valor:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{2LC - (RC)^2}} = 1\ \text{Mrad/s}$$

En estas condiciones, la frecuencia $\omega_1 = 1\ krad/s$ puede considerarse baja. A la misma conclusión puede llegarse observando que

$$\omega_1 L = 10^{-3}\ \Omega << R = 1\ \Omega << \frac{1}{\omega_1 C} = 10^3\ \Omega \Rightarrow L \approx \text{cortocircuito},\ C \approx \text{circuito abierto}$$

En consecuencia, para la excitación correspondiente a esta frecuencia pueden aplicarse los resultados del apartado B, con lo que

$$\mathbf{V}_O(\omega_1) = 0\ V$$

Del mismo modo, la frecuencia $\omega_2 = 1\ Grad/s$ puede considerarse alta. A la misma conclusión puede llegarse observando que

$$\omega_2 L = 10^3\ \Omega >> R = 1\ \Omega >> \frac{1}{\omega_2 C} = 10^{-3}\ \Omega \Rightarrow L \approx \text{circuito abierto},\ C \approx \text{cortocircuito}$$

En consecuencia, para la excitación correspondiente a esta frecuencia pueden aplicarse los resultados del apartado C, con lo que

$$\mathbf{V}_O(\omega_2) = 0.5_{\angle 0\,°}\ V$$

Respuesta total

$$v_O(t) = \text{Re}\left\{\mathbf{V}_O(\omega_1)e^{j\omega_1 t}\right\} + \text{Re}\left\{\mathbf{V}_O(\omega_2)e^{j\omega_2 t}\right\} = 0.5\cos(\omega_2 t)\ V$$