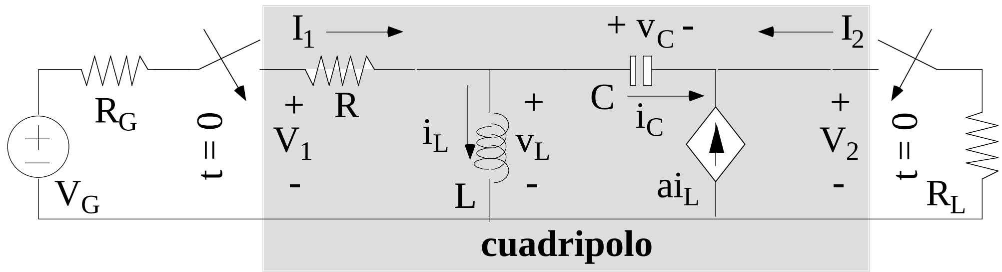
Problema 1



En el circuito de la figura la fuente independiente es continua, y son datos las características de todos los elementos. El circuito ha permanecido mucho tiempo en el mismo estado antes del cambio de posición de los interruptores; una vez producido éste, ya no experimenta más cambios.

A (0.4 puntos) Obtened los parámetros ***h*** del cuadripolo cuando se ha alcanzado el régimen permanente final.

B (0.3 puntos) Obtened I_1 en función de V_G, R_G, R_L y los parámetros ***z*** del cuadripolo (se suponen conocidos) cuando se ha alcanzado el régimen permanente final.

C (1.2 puntos) Obtened los valores de v_C, i_C, i_L y v_L, para $t = 0^-$, 0^+ e ∞.

D (0.6 puntos) Obtened las ecuaciones diferenciales que rigen el comportamiento de v_C e i_L para $t > 0\ s$ (supóngase $a = 0$).

Apartado A

El régimen permanente final es continuo ya que la fuente independiente también lo es. En esas condiciones, la capacidad es un circuito abierto ($i_C = 0\ A$) y la inductancia es un cortocircuito ($v_L = 0\ V$), y en el cuadripolo se cumplen las siguientes relaciones:

$$I_1 = i_L + i_C \qquad i_L = \frac{V_1 - v_L}{R} \qquad i_C + ai_L + I_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad V_1 = RI_1 \qquad I_2 = -aI_1$$

Comparando estas expresiones con las que definen los parámetros *h*, se obtiene

$$\begin{aligned} V_1 &= RI_1 & V_1 &= h_{11}I_1 + h_{12}V_2 \\ I_2 &= -aI_1 & I_2 &= h_{21}I_1 + h_{22}V_2 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} h_{11} &= R & h_{12} &= 0 \\ h_{21} &= -a & h_{22} &= 0\ S \end{aligned}$$

Apartado B

En el circuito se verifican las relaciones

$$V_1 = z_{11}I_1 + z_{12}I_2 \qquad\qquad V_G = R_GI_1 + V_1$$

$$V_2 = z_{21}I_1 + z_{22}I_2 \qquad\qquad V_2 = - R_LI_2$$

a partir de las cuales puede deducirse

$$I_2 = - \frac{z_{21}I_1}{R_L + z_{22}} \qquad\qquad V_1 = \left(z_{11} - \frac{z_{12}z_{21}}{R_L + z_{22}}\right)I_1$$

$$I_1 = \frac{(R_L + z_{22})V_G}{(R_G + z_{11})(R_L + z_{22}) - z_{12}z_{21}}$$

Apartado C

En régimen permanente continuo
la capacidad es un circuito abierto
y la inductancia es un cortocircuito.

$$i_C(0^-) = 0 \text{ A},\ v_L(0^-) = 0 \text{ V}$$

Para *t < 0 s*, los elementos reactivos
están desconectados de la excitación.

$$v_C(0^-) = 0 \text{ V},\ i_L(0^-) = 0 \text{ A}$$

La tensión en la capacidad
y la corriente en la inductancia
no pueden variar bruscamente.

$$v_C(0^+) = v_C(0^-) = 0 \text{ V},\ i_L(0^+) = i_L(0^-) = 0 \text{ A}$$

Ecuaciones
de malla
y de nudo.

$$v_L(0^+) = v_C(0^+) + [i_C(0^+) + ai_L(0^+)]R_L$$

$$\frac{V_G - v_L(0^+)}{R_G + R} = i_L(0^+) + i_C(0^+) \qquad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \qquad i_C(0^+) = \frac{V_G}{R_G + R + R_L} \qquad v_L(0^+) = \frac{R_LV_G}{R_G + R + R_L}$$

En régimen permanente continuo la capacidad es un circuito abierto y la inductancia es un cortocircuito.

$$i_C(\infty) = 0\ \mathrm{A},\ v_L(\infty) = 0\ \mathrm{V}$$

Ecuaciones de nudo y de malla.

$$\frac{V_G - v_L(\infty)}{R_G + R} = i_L(\infty) + i_C(\infty)$$

$$v_L(\infty) = v_C(\infty) + [i_C(\infty) + ai_L(\infty)]R_L$$

$$\Rightarrow \quad i_L(\infty) = \frac{V_G}{R_G + R} \qquad v_C(\infty) = -\frac{aR_LV_G}{R_G + R}$$

Apartado D

Para $t > 0\ s$ en el circuito se verifican las siguientes ecuaciones (en las que se han utilizado las relaciones funcionales que definen los elementos reactivos):

Ecuación de nudo

$$\frac{V_G - v_L}{R_G + R} = i_C + i_L$$

Ecuación de malla

$$v_L = v_C + i_CR_L$$

$$\Rightarrow \quad i_L = \frac{1}{R_G + R}\left[V_G - v_C - C(R_G + R + R_L)\frac{dv_C}{dt}\right]$$

$$\Rightarrow \quad v_C = -\frac{R_LV_G}{R_G + R} + R_Li_L + L\left(1 + \frac{R_L}{R_G + R}\right)\frac{di_L}{dt}$$

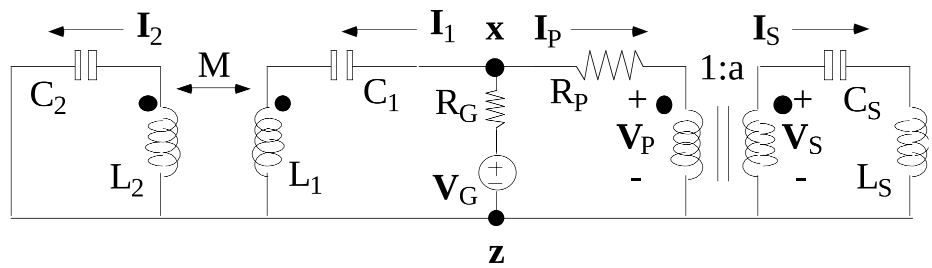
Combinando estas ecuaciones se obtienen las ecuaciones diferenciales buscadas:

$$LC\left(1 + \frac{R_L}{R_G + R}\right)\frac{d^2i_L}{dt^2} + \left(\frac{L}{R_G + R} + R_LC\right)\frac{di_L}{dt} + i_L = \frac{V_G}{R_G + R}$$

$$LC\left(1 + \frac{R_L}{R_G + R}\right)\frac{d^2v_C}{dt^2} + \left(\frac{L}{R_G + R} + R_LC\right)\frac{dv_C}{dt} + v_C = 0$$

Problema 2

Para los
Apartados A** y **B



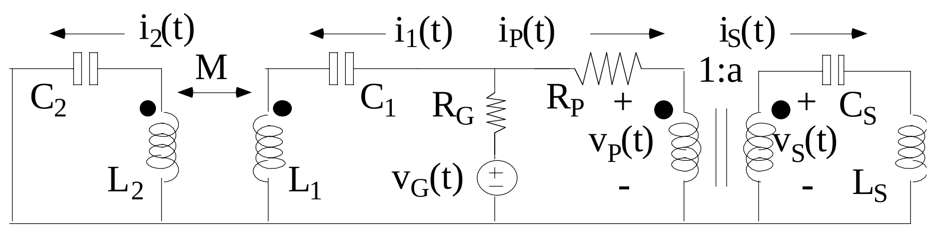
El circuito de la figura, en cuya representación se ha utilizado notación fasorial, funciona en régimen sinusoidal permanente a una frecuencia angular ω fija y conocida. Son datos las características de todos los elementos.

A (1.2 puntos) Escribid un sistema algebraico de seis ecuaciones independientes a partir del cual sea posible obtener los valores de $\boldsymbol{I_1}$, $\boldsymbol{I_2}$, $\boldsymbol{I_P}$, $\boldsymbol{I_S}$, $\boldsymbol{V_P}$ y $\boldsymbol{V_S}$.

B (0.6 puntos) Obtened el circuito equivalente de Thèvenin entre **x** y **z**, utilizando los siguientes datos:

$$\omega M = R_G = R_P = R \qquad \omega = \frac{1}{\sqrt{L_1C_1}} = \frac{1}{\sqrt{L_2C_2}} = \frac{1}{\sqrt{L_SC_S}}$$

Para el ***Apartado C***



$$v_G(t) = V_D + V_A\cos(\omega t)$$

$$\omega M = R_G = R_P = R \qquad \omega = \frac{1}{\sqrt{L_1C_1}} = \frac{1}{\sqrt{L_2C_2}} = \frac{1}{\sqrt{L_SC_S}}$$

C (0.7 puntos) Obtened la expresión temporal de la potencia instantánea en R_P..

Apartado A

$$0 = -\mathbf{I}_1 j\omega M + \mathbf{I}_2\left(\frac{1}{j\omega C_2} + j\omega L_2\right)$$

Ecuaciones de malla.

$$\mathbf{V}_G = \mathbf{I}_1\left(j\omega L_1 + \frac{1}{j\omega C_1} + R_G\right) - \mathbf{I}_2 j\omega M + \mathbf{I}_P R_G$$

$$\mathbf{V}_G = \mathbf{I}_1 R_G + \mathbf{I}_P(R_G + R_P) + \mathbf{V}_P$$

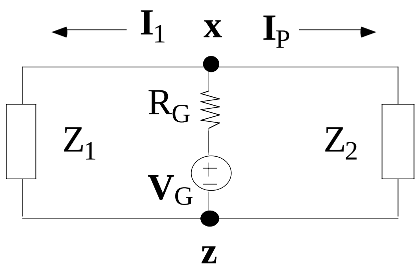
$$\mathbf{V}_S = \mathbf{I}_S\left(\frac{1}{j\omega C_S} + j\omega L_S\right)$$

Ecuaciones del transformador ideal.

$$\mathbf{V}_S = a\mathbf{V}_P,\ \mathbf{I}_P = a\mathbf{I}_S$$

Apartado B

El generador de Thèvenin ha de calcularse con el circuito como está. El circuito puede representarse como se indica en la figura siguiente, en la que se han utilizado las propiedades de reflexión de impedancias en los transformadores. En los cálculos que siguen se hace uso de los datos del enunciado.



$$Z_1 = \frac{(\omega M)^2}{\frac{1}{j\omega C_2} + j\omega L_2} + j\omega L_1 + \frac{1}{j\omega C_1} = \infty\ \Omega$$

(circuito abierto, $\mathbf{I}_1 = 0$ A)

$$Z_2 = R_P + \frac{\frac{1}{j\omega C_S} + j\omega L_S}{a^2} = R_P = R$$

En el circuito se verifican las siguientes relaciones:

$$\mathbf{V}_G = \mathbf{I}_1 R_G + \mathbf{I}_P(R_G + Z_2) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{I}_P = \frac{\mathbf{V}_G}{2R}$$

$$\mathbf{V}_{Th} = \mathbf{V}_{xz} = \mathbf{V}_G - \mathbf{I}_P R_G = \frac{\mathbf{V}_G}{2}$$

Para calcular la impedancia equivalente, dado que el circuito no contiene fuentes dependientes, puede desactivarse el generador de tensión (se sustituye por un cortocircuito) y obtener la impedancia total entre **x** y **z**. Ésta está constituida por tres impedancias en paralelo, con lo que

$$Z_{Th} = \left(\frac{1}{Z_1} + \frac{1}{R_G} + \frac{1}{Z_2}\right)^{-1} = \frac{R}{2}$$

Apartado C

En el circuito están presentes dos excitaciones, por lo que habrá que aplicar el principio de superposición.

Para la componente sinusoidal la situación es la indicada en el ***Apartado B***, siendo el fasor correspondiente al generador $\boldsymbol{V}_G = V_A$ (número real), con lo que

$$\mathbf{I}_P = \frac{\mathbf{V}_G}{2R} = \frac{V_A}{2R} \qquad \Rightarrow \qquad i_{pa}(t) = \mathrm{Re}\{\mathbf{I}_P e^{j\omega t}\} = \frac{V_A}{2R}\cos(\omega t)$$

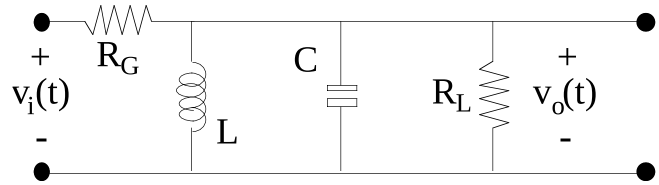
Debido a que C_1 se comporta como un circuito abierto para la componente continua, el circuito sometido a esta excitación se reduce al generador en serie con las resistencias R_G y R_P (el primario del transformador ideal es un cortocircuito), con lo que

$$V_D = I_P(R_G + R_P) \qquad \Rightarrow \qquad I_P = \frac{V_D}{2R}$$

Combinando las dos excitaciones,

$$i_P(t) = I_P + i_{pa}(t) = \frac{V_D}{2R} + \frac{V_A}{2R}\cos(\omega t) \qquad \Rightarrow \qquad p_{Rp}(t) = i_P^2(t)R$$

Problema 3



$R_G = R_L = 1\ \text{k}\Omega$, $L = 1\ \text{mH}$, $C = 1\ \text{nF}$

Las condiciones iniciales en el circuito de la figura son nulas. Sean $V_i(s)$ y $V_o(s)$ las transformadas de Laplace de las señales de entrada (v_i) y salida (v_o), respectivamente.

A (0.8 puntos) Obtened la función de transferencia del circuito, definida como $H(s) = V_o(s)/V_i(s)$.

B (0.6 puntos) Obtened la expresión temporal correspondiente a la función de transferencia, suponiendo que ésta es

$$H(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{10^6 s}{s^2 + 2\times10^6 s + 10^{12}}$$

C (0.4 puntos) Suponiendo que la función de transferencia es la indicada en el ***Apartado B*** y que la entrada es de la forma

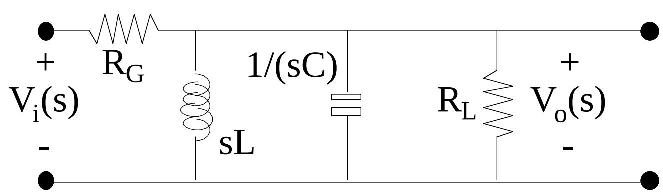
$$v_i(t) = v_1(t) + v_2(t)$$
$$v_1(t) = V_1\cos(\omega_1 t),\ V_1 = 1\ \text{V},\ \omega_1 = 1\ \text{Mrad/s}$$
$$v_2(t) = V_2\cos(\omega_2 t),\ V_2 = 1\ \text{V},\ \omega_2 = 1\ \text{krad/s}$$

obtened la transformada de Laplace de la tensión de salida.

D (0.7 puntos) Obtened la expresión temporal en régimen permanente de la tensión de salida suponiendo que su transformada de Laplace es

$$V_o(s) = \frac{2\times10^6 s^2 + 10^{18}}{(s^2 + 10^{12})\,(s^2 + 2\times10^6 s + 10^{12})}$$

Apartado A



En términos de transformada de Laplace, el circuito queda como se indica en la figura adjunta (recuérdese que las condiciones iniciales son nulas).

$$Z = \left(\frac{1}{sL} + sC + \frac{1}{R_L}\right)^{-1}$$

$$H(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{Z}{R_G + Z} = \frac{1}{1 + \frac{R_G}{Z}} = \frac{\frac{s}{R_G C}}{s^2 + \frac{s}{C}\left(\frac{1}{R_G} + \frac{1}{R_L}\right) + \frac{1}{LC}} = \frac{10^6 s}{s^2 + 2\times10^6 s + 10^{12}}$$

Apartado B

Las raíces del denominador de la expresión representativa de la función de transferencia se obtienen mediante el siguiente cálculo.

$$s^2 + 2\times10^6 s + 10^{12} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad -s_1 = 10^6\ s^{-1} \text{ (raíz doble)}$$

En consecuencia, la expansión en fracciones parciales de la expresión representativa de la función de transferencia es de la forma

$$H(s) = \frac{K_1}{s + s_1} + \frac{K_2}{(s + s_1)^2}$$

Los coeficientes de las fracciones se calculan como se indica a continuación.

$$K_2 = [H(s)\,(s + s_1)^2]_{s\,=\,-s_1} = -\,10^{12}\ s^{-2}$$

$$K_1 = \left\{\frac{d}{ds}[H(s)(s + s_1)^2]\right\}_{s\,=\,-s_1} = 10^6\ s^{-1}$$

La transformada inversa de *H(s)*, que es la expresión temporal que se está buscando, está dada por

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{K_1}{s + s_1} + \frac{K_2}{(s + s_1)^2}\right\} = 10^6 e^{-10^6 t} - 10^{12} t e^{-10^6 t}$$

Apartado C

$$v_i(t) = v_1(t) + v_2(t)$$

$$V_i(s) = V_1(s) + V_2(s) = \frac{V_1 s}{s^2 + \omega_1^2} + \frac{V_2 s}{s^2 + \omega_2^2} = \frac{s}{s^2 + 10^{12}} + \frac{s}{s^2 + 10^6}$$

$$H(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)} \Rightarrow V_o(s) = H(s)V_i(s) = \frac{10^6 s^2[(s^2 + 10^{12}) + (s^2 + 10^6)]}{(s^2 + 10^{12})\,(s^2 + 10^6)\,(s^2 + 2\times10^6 s + 10^{12})}$$

Apartado D

Las raíces del denominador de la transformada de Laplace de la tensión de salida se obtienen mediante el siguiente cálculo.

$$s^2 + 2\times10^6 s + 10^{12} = 0 \quad \Rightarrow \quad -s_1 = 10^6\ s^{-1}\ \text{(raíz doble)}$$

$$s^2 + 10^{12} = 0 \quad \Rightarrow \quad s = \pm j10^6\ s^{-1}$$

$$s = \alpha \pm j\beta = \pm j10^6 \quad \Rightarrow \quad \alpha = 0\ s^{-1},\ \beta = 10^6\ \text{rad/s}$$

En consecuencia, la expansión en fracciones parciales de la expresión representativa de la función de transferencia es de la forma

$$V_o(s) = \frac{K}{s + \alpha - j\beta} + \frac{K^*}{s + \alpha + j\beta} + \frac{K_3}{s + s_1} + \frac{K_4}{(s + s_1)^2}$$

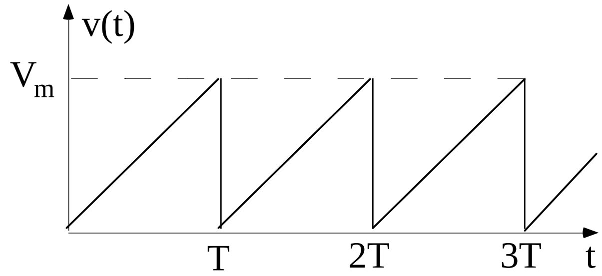
Los dos últimos términos del segundo miembro de la expresión anterior no se consideran, ya que, por estar relacionados con los polos de la función de transferencia, definen el régimen transitorio. Es decir, la tensión de salida en régimen permanente está definida exclusivamente por los dos primeros términos del segundo miembro.

$$K = \left\{V_o(s)(s + \alpha - j\beta)\right\}_{s = -\alpha + j\beta} = 0.25\ \text{V} \quad \Rightarrow \quad K = 0.25\ \text{V},\ \theta = 0\,°$$

$$v_o(t) = 2|K|e^{-\alpha t}\cos(\beta t + \theta) = 0.5\cos(10^6 t)\ \text{V, t en s}$$

Problema 4

$$0 \le t \le T \Rightarrow v(t) = \frac{V_m}{T}t$$



A (0.8 puntos) La tensión periódica mostrada en la figura puede expresarse como la suma de una componente continua y una serie de Fourier infinita de términos cosenoidales; cada uno de éstos queda definido por un módulo, una frecuencia angular y una fase. Obtened la componente continua y los parámetros que definen los términos cosenoidales.

B (0.4 puntos) Obtened la función *f(t)* sabiendo que su transformada de Fourier es

$$F(\omega) = \frac{e^{-j\omega t_0}}{a + j\omega}$$

C (1.3 puntos) Un circuito se caracteriza por una función de transferencia tal que su transformada de Laplace es

$$H(s) = \frac{0.5(s^2 + 10^{12})}{s^2 + 0.5\times10^6 s + 10^{12}}$$

Representad cualitativamente la variación del módulo de la función de transferencia con la frecuencia angular cuando el circuito funciona en régimen sinusoidal permanente; en la representación señalad valores numéricos fácilmente deducibles. Indicad razonadamente el tipo de filtro al que corresponde el circuito. Indicad los valores a los que tiende la fase de la función de transferencia cuando la frecuencia angular tiende a 0 y a ∞ rad/s.

Apartado A

Se trata de expresar la función como desarrollo en serie de Fourier de la forma

$$v(t) = a_v + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(k\omega_0 t - \varphi_k) \qquad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

$$a_v = \frac{1}{T}\int_0^T v(t)dt = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{V_m}{T}t\,dt = \frac{V_m}{2}$$

$$a_k = \frac{2}{T}\int_0^T v(t)\cos(k\omega_0 t)dt = \frac{2}{T}\int_0^T \frac{V_m}{T}t\cos(k\omega_0 t)dt = \frac{2V_m}{T^2}\left[\frac{\cos(k\omega_0 t)}{(k\omega_0)^2} + \frac{t\,\mathrm{sen}(k\omega_0 t)}{k\omega_0}\right]_0^T = 0\ \mathrm{V}$$

$$b_k = \frac{2}{T}\int_0^T v(t)\mathrm{sen}(k\omega_0 t)dt = \frac{2}{T}\int_0^T \frac{V_m}{T}t\,\mathrm{sen}(k\omega_0 t)dt = \frac{2V_m}{T^2}\left[\frac{\mathrm{sen}(k\omega_0 t)}{(k\omega_0)^2} - \frac{t\cos(k\omega_0 t)}{k\omega_0}\right]_0^T = -\frac{V_m}{k\pi}$$

$$A_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2} = \frac{V_m}{k\pi} \qquad \varphi_k = \mathrm{arctg}\left(\frac{b_k}{a_k}\right) = -90^\circ$$

Apartado B

La multiplicación por el término *exp(-jωt*$_0$*)* es indicativa de un desplazamiento temporal en un intervalo t_0.

Por otro lado, el término *1/(a + jω)* es la transformada de Fourier de la función *exp(-at)*.

Combinando ambos razonamientos se llega a

$$f(t) = \mathcal{F}^{-1}\{F(\omega)\} = e^{-a(t - t_0)}$$

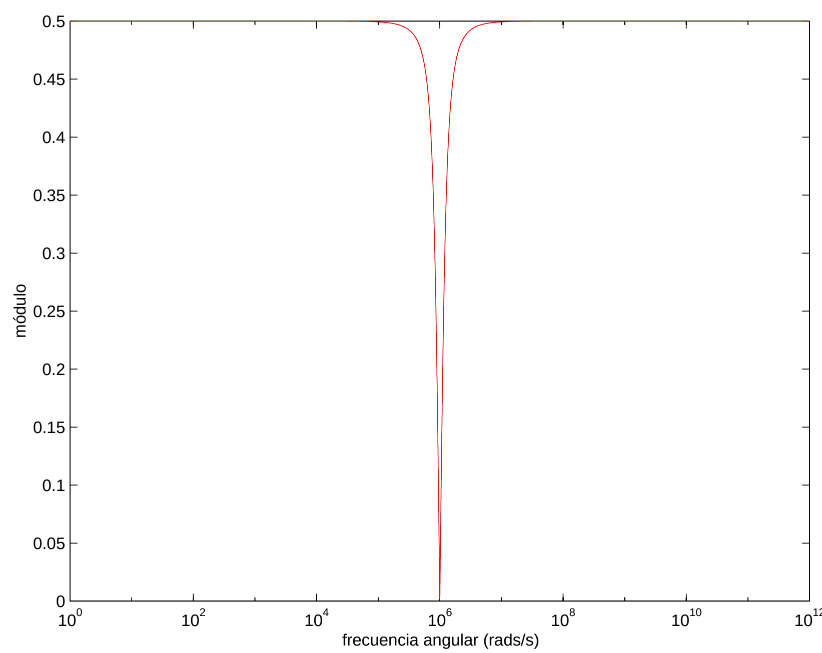
Apartado C

La función de transferencia en régimen sinusoidal permanente es la indicada en el enunciado haciendo la transformación $s = j\omega$, con lo que queda

$$H(\omega) = \{H(s)\}_{s = j\omega} = \frac{0.5(10^{12} - \omega^2)}{(10^{12} - \omega^2) + j0.5\times10^6\omega} = \frac{N(\omega)}{D(\omega)}$$

$$|H(\omega)| = \frac{0.5\left|10^{12} - \omega^2\right|}{\sqrt{(10^{12} - \omega^2)^2 + 0.25\times10^{12}\omega^2}}$$

En la última expresión puede verse que el módulo de la función de transferencia tiende a 0.5, tanto para valores muy bajos como para valores muy altos de ω y que se anula para el valor particular $\omega_0 = 10^6$ *rad/s*, con lo que la representación buscada es la indicada en la figura adjunta.



A partir de la gráfica se deduce que el circuito se comporta como un filtro de banda rechazada, ya que permite el paso de todas las frecuencias excepto las comprendidas en el entorno de $\omega_0 = 10^6$ *rad/s*.

Con relación a la variación de la fase, es posible hacer los siguientes razonamientos.

$$\angle H(\omega) = \angle N(\omega) - \angle D(\omega)$$

$$\omega \leq 10^6 \text{ rad/s} \quad \Rightarrow \quad \angle N(\omega) = 0\,°,\ \angle D(\omega) = \text{arctg}\left(\frac{0.5\times10^6\omega}{10^{12} - \omega^2}\right)$$

$$\omega \to 0 \text{ rad/s} \quad \Rightarrow \quad \angle N(\omega) = 0\,°,\ \angle D(\omega) \to 0\,° \quad \Rightarrow \quad \angle H(\omega) \to 0\,°$$

$$\omega \geq 10^6 \text{ rad/s} \quad \Rightarrow \quad \angle N(\omega) = 180\,°,\ \angle D(\omega) = \text{arctg}\left(\frac{0.5\times10^6\omega}{10^{12} - \omega^2}\right)$$

$$\omega \to \infty \text{ rad/s} \quad \Rightarrow \quad \angle N(\omega) = 180\,°,\ \angle D(\omega) \to 180\,° \quad \Rightarrow \quad \angle H(\omega) \to 0\,°$$