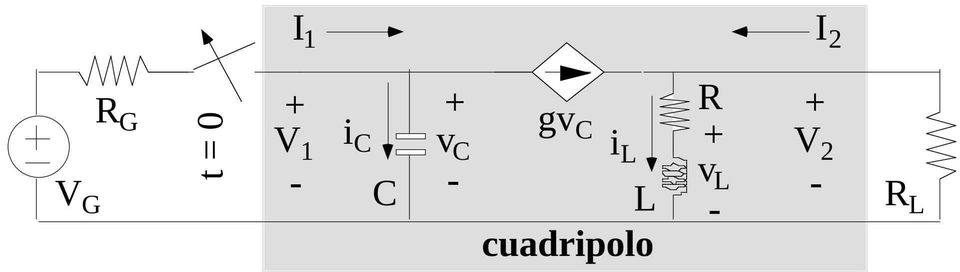
Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Telecomunicación
Universidad de Vigo

Análisis de circuitos

(titulaciones:
Ingeniero Técnico de Telecomunicación,
especialidad en Sistemas de Telecomunicación;
Ingeniero Técnico de Telecomunicación,
especialidad en Sonido e Imagen)

Examen final de diciembre de 2006

Problema 1



En el circuito de la figura la fuente independiente es continua, y son datos las características de todos los elementos. El circuito ha permanecido mucho tiempo en el mismo estado antes del cambio de posición del interruptor; una vez producido éste, ya no experimenta más cambios.

A (0.4 puntos) Calculad los parámetros ***z*** del cuadripolo correspondientes al régimen permanente inicial.

B (0.3 puntos) Calculad I_2 en función de V_G, R_G, R_L y los parámetros ***abcd*** del cuadripolo (se suponen conocidos) cuando el circuito está en el régimen permanente inicial.

C (1.2 puntos) Obtened los valores de v_C, i_C, i_L y v_L, para $t = 0^-$, 0^+ e ∞.

D (0.6 puntos) Obtened las ecuaciones diferenciales que rigen el comportamiento de v_C e i_L para $t > 0\ s$.

Apartado A

El régimen permanente inicial es continuo ya que la fuente independiente también lo es. En esas condiciones, la capacidad es un circuito abierto ($i_C = 0\ A$) y la inductancia es un cortocircuito ($v_L = 0\ V$), y en el cuadripolo se cumplen las siguientes relaciones:

$$\left.\begin{array}{l} I_1 = i_C + gv_C = gv_C = gV_1 \\ V_2 = (gv_C + I_2)R + v_L = (I_1 + I_2)R \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} V_1 = \dfrac{I_1}{g} \\ V_2 = I_1R + I_2R \end{array}\right.$$

Comparando estas expresiones con las que definen los parámetros ***z***, se obtiene

$$\left.\begin{array}{ll} V_1 = \dfrac{I_1}{g} & V_1 = I_1z_{11} + I_2z_{12} \\ V_2 = I_1R + I_2R & V_2 = I_1z_{21} + I_2z_{22} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{ll} z_{11} = \dfrac{1}{g} & z_{12} = 0\ \Omega \\ z_{21} = R & z_{22} = R \end{array}$$

Apartado B

En el circuito se verifican las relaciones

$$V_1 = aV_2 - bI_2 \qquad V_G = R_G I_1 + V_1$$

$$I_1 = cV_2 - dI_2 \qquad V_2 = -R_L I_2$$

a partir de las cuales puede deducirse

$$I_1 = -(cR_L + d)I_2 \qquad V_1 = -(aR_L + b)I_2$$

$$I_2 = -\frac{V_G}{(a + cR_G)R_L + b + dR_G}$$

Apartado C

En régimen permanente continuo
la capacidad es un circuito abierto
y la inductancia es un cortocircuito.

$$i_C(0^-) = 0\ \mathrm{A},\ v_L(0^-) = 0\ \mathrm{V}$$

$$\frac{V_G - v_C(0^-)}{R_G} = i_C(0^-) + gv_C(0^-) \Rightarrow v_C(0^-) = \frac{V_G}{1 + gR_G}$$

Ecuaciones de nudo.

$$gv_C(0^-) = i_L(0^-) + \frac{V_2}{R_L} = i_L(0^-) + \frac{Ri_L(0^-) + v_L(0^-)}{R_L} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow i_L(0^-) = \frac{gR_L V_G}{(1 + gR_G)(R + R_L)}$$

La tensión en la capacidad
y la corriente en la inductancia
no pueden variar bruscamente.

$$v_C(0^+) = v_C(0^-),\ i_L(0^+) = i_L(0^-)$$

$$i_C(0^+) = -gv_C(0^+) = -\frac{gV_G}{1 + gR_G}$$

Ecuaciones
de nudo
y de malla.

$$gv_C(0^+) = i_L(0^+) - I_2 = i_L(0^+) + \frac{V_2}{R_L} \Rightarrow V_2 = [gv_C(0^+) - i_L(0^+)]R_L$$

$$v_L(0^+) = V_2 - Ri_L(0^+) = 0\ \mathrm{V}$$

En régimen permanente continuo la capacidad es un circuito abierto y la inductancia es un cortocircuito.

$$i_C(\infty) = 0\ A,\ v_L(\infty) = 0\ V$$

Ecuaciones de nudo.

$$gv_C(\infty) = -\ i_C(\infty) \Rightarrow v_C(\infty) = 0\ V$$

$$gv_C(\infty) = i_L(\infty) - I_2 = i_L(\infty) + \frac{V_2}{R_L} = i_L(\infty) + \frac{Ri_L(\infty) + v_L(\infty)}{R_L} \Rightarrow i_L(\infty) = 0\ A$$

Apartado D

Para $t > 0\ s$ en el circuito se verifican las siguientes ecuaciones (en las que se han utilizado las relaciones funcionales que definen los elementos reactivos):

Ecuaciones de nudo.

$$gv_C + i_C = 0 \Rightarrow \frac{C}{g}\frac{dv_C}{dt} + v_C = 0 \qquad (1)$$

$$gv_C = i_L - I_2 = i_L + \frac{Ri_L + v_L}{R_L} \Rightarrow v_C = \frac{1}{g}\left[\left(1 + \frac{R}{R_L}\right)i_L + \frac{L}{R_L}\frac{di_L}{dt}\right] \qquad (2)$$

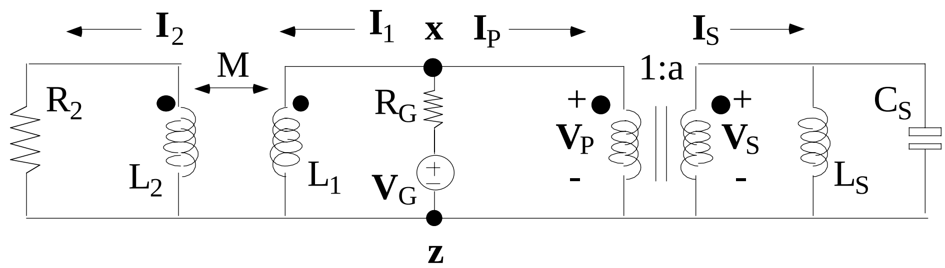
Sustituyendo (2) en (1),

$$\frac{LC}{gR_L}\frac{d^2i_L}{dt^2} + \left[\frac{C}{g}\left(1 + \frac{R}{R_L}\right) + \frac{L}{R_L}\right]\frac{di_L}{dt} + \left(1 + \frac{R}{R_L}\right)i_L = 0 \qquad (3)$$

(1) y (3) son las ecuaciones diferenciales buscadas.

Problema 2

Para los
Apartados A y B

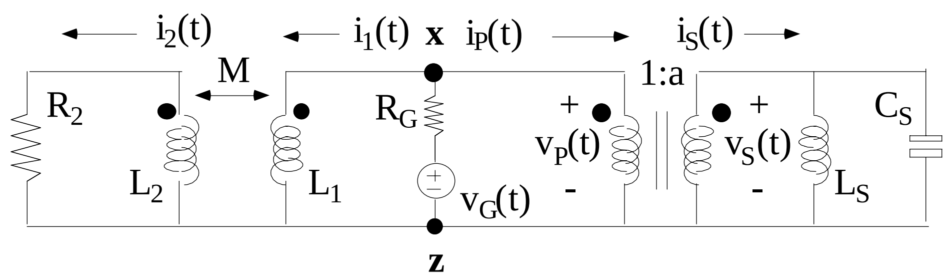


El circuito de la figura, en cuya representación se ha utilizado notación fasorial, funciona en régimen sinusoidal permanente a una frecuencia angular ω fija y conocida. Son datos las características de todos los elementos.

A (1.2 puntos) Escribid un sistema algebraico de seis ecuaciones independientes a partir del cual sea posible obtener los valores de $\boldsymbol{I_1}$, $\boldsymbol{I_2}$, $\boldsymbol{I_P}$, $\boldsymbol{I_S}$, $\boldsymbol{V_P}$ y $\boldsymbol{V_S}$.

B (0.6 puntos) Obtened el circuito equivalente de Thèvenin entre **x** y **z**.

Para el ***Apartado C***



$$v_G(t) = V_D + V_A\cos(\omega t)$$

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{L_S C_S}}$$

Son datos los valores de los elementos del circuito.

C (0.7 puntos) Obtened la expresión temporal de la potencia instantánea en R_G.

Apartado A

$$0 = -\mathbf{I}_1 j\omega M + \mathbf{I}_2(R_2 + j\omega L_2)$$

$$\mathbf{V}_G = \mathbf{I}_1(R_G + j\omega L_1) - \mathbf{I}_2 j\omega M + \mathbf{I}_P R_G$$

Ecuaciones de malla.

$$\mathbf{V}_G = \mathbf{I}_1 R_G + \mathbf{I}_P R_G + \mathbf{V}_P$$

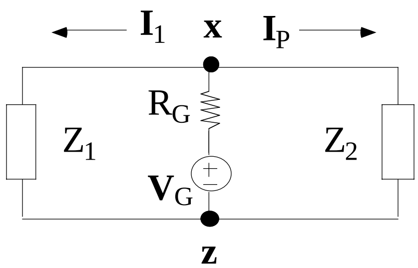
$$\mathbf{V}_S = \mathbf{I}_S \frac{\frac{L_S}{C_S}}{\frac{1}{j\omega C_S} + j\omega L_S}$$

Ecuaciones del transformador ideal.

$$\mathbf{V}_S = a\mathbf{V}_P,\ \mathbf{I}_P = a\mathbf{I}_S$$

Apartado B

El generador de Thèvenin ha de calcularse con el circuito como está. El circuito puede representarse como se indica en la figura siguiente, en la que se han utilizado las propiedades de reflexión de impedancias en los transformadores.



$$Z_1 = \frac{(\omega M)^2}{R_2 + j\omega L_2} + j\omega L_1$$

$$Z_2 = \frac{\dfrac{1}{j\omega C_S} // j\omega L_S}{a^2}$$

$$Z_{12} = Z_1 // Z_2$$

$$\mathbf{V}_{Th} = \mathbf{V}_{xz} = \frac{Z_{12}}{R_G + Z_{12}}\mathbf{V}_G$$

Para calcular la impedancia equivalente, dado que el circuito no contiene fuentes dependientes, puede desactivarse el generador de tensión (se sustituye por un cortocircuito) y obtener la impedancia total entre **x** y **z**. Ésta está constituida por tres impedancias en paralelo, con lo que

$$Z_{Th} = \left(\frac{1}{Z_1} + \frac{1}{R_G} + \frac{1}{Z_2}\right)^{-1}$$

Apartado C

En el circuito están presentes dos excitaciones, por lo que habrá que aplicar el principio de superposición.

Para la componente sinusoidal la situación es la indicada en el ***Apartado B***, siendo el fasor correspondiente al generador $\mathbf{V}_G = V_A$ (número real), con lo que

$$\omega L_S = \frac{1}{\omega C_S} \Rightarrow \mathbf{I}_S = 0 \text{ A} \Rightarrow \mathbf{I}_P = 0 \text{ A} \Rightarrow \mathbf{I}_1 = \frac{\mathbf{V}_G}{R_G + Z_1} \Rightarrow i_{ga}(t) = \mathrm{Re}\{\mathbf{I}_1 e^{j\omega t}\}$$

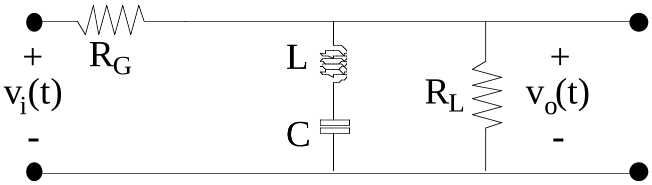
Debido a que L_1 se comporta como un cortocircuito para la componente continua, el circuito sometido a esta excitación se reduce al generador en serie con la resistencia R_G (el primario del transformador ideal es un cortocircuito), con lo que

$$V_D = I_{Pd} R_G \Rightarrow I_{Pd} = \frac{V_D}{R_G}$$

Combinando las dos excitaciones,

$$i_{Rg}(t) = I_{Pd} + i_{ga}(t) \Rightarrow p_{Rg}(t) = i_{Rg}^2(t) R_G$$

Problema 3



$R_G = R_L = 1\ \mathrm{k\Omega}$, $L = 0.25$ mH, $C = 4$ nF

Las condiciones iniciales en el circuito de la figura son nulas. Sean $V_i(s)$ y $V_o(s)$ las transformadas de Laplace de las señales de entrada (v_i) y salida (v_o), respectivamente.

A (0.8 puntos) Obtened la función de transferencia del circuito, definida como $H(s) = V_o(s)/V_i(s)$.

B (0.6 puntos) Obtened la expresión temporal correspondiente a la función de transferencia, suponiendo que ésta es

$$H(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{0.5(s^2 + 10^{12})}{s^2 + 2\times10^6 s + 10^{12}}$$

C (0.4 puntos) Suponiendo que la función de transferencia es la indicada en el ***Apartado B*** y que la entrada es de la forma

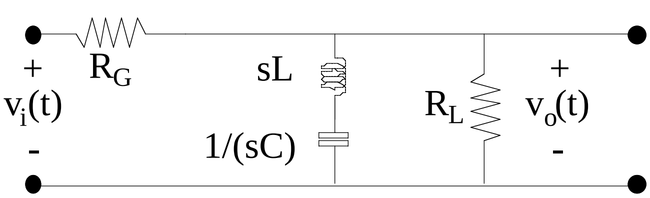
$$v_i(t) = v_1(t) + v_2(t)$$
$$v_1(t) = V_1\cos(\omega_1 t),\ V_1 = 1\ \mathrm{V},\ \omega_1 = 1\ \mathrm{Mrad/s}$$
$$v_2(t) = V_2\cos(\omega_2 t),\ V_2 = 1\ \mathrm{V},\ \omega_2 = 1\ \mathrm{krad/s}$$

obtened la transformada de Laplace de la tensión de salida.

D (0.7 puntos) Obtened la expresión temporal (se recomienda realizar aproximaciones numéricas justificadas) en régimen permanente de la tensión de salida suponiendo que su transformada de Laplace es

$$V_o(s) = \frac{s(s^2 + 0.5\times10^{12})}{(s^2 + 10^6)(s^2 + 2\times10^6 s + 10^{12})}$$

Apartado A



En términos de transformada de Laplace, el circuito queda como se indica en la figura adjunta (recuérdese que las condiciones iniciales son nulas).

$$Z = \frac{\left(sL + \frac{1}{sC}\right)R_L}{sL + \frac{1}{sC} + R_L}$$

$$H(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{Z}{R_G + Z} = \frac{1}{1 + \frac{R_G}{Z}} = \frac{\frac{R_L}{R_G + R_L}\left(s^2 + \frac{1}{LC}\right)}{s^2 + \frac{R_G R_L s}{L(R_G + R_L)} + \frac{1}{LC}} = \frac{0.5(s^2 + 10^{12})}{s^2 + 2\times10^6 s + 10^{12}}$$

Apartado B

Las raíces del denominador de la expresión representativa de la función de transferencia se obtienen mediante el siguiente cálculo.

$$s^2 + 2\times10^6 s + 10^{12} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad -s_1 = 10^6\ s^{-1}\ \text{(raíz doble)}$$

En consecuencia, la expansión de la expresión representativa de la función de transferencia (función irracional) es de la forma

$$H(s) = 0.5 - \frac{10^6 s}{s^2 + 2\times10^6 s + 10^{12}} = 0.5 + \frac{K_1}{s + s_1} + \frac{K_2}{(s + s_1)^2}$$

Los coeficientes de las fracciónes se calculan como se indica a continuación.

$$K_2 = [H(s)(s + s_1)^2]_{s = -s_1} = -10^{12}\ s^{-2}$$

$$K_1 = \left\{\frac{d}{ds}[H(s)(s + s_1)^2]\right\}_{s = -s_1} = 10^6\ s^{-1}$$

La transformada inversa de *H(s)*, que es la expresión temporal que se está buscando, está dada por

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{0.5 + \frac{K_1}{s + s_1} + \frac{K_2}{(s + s_1)^2}\right\} = 0.5\delta(t) + 10^6 e^{-10^6 t} - 10^{12} t e^{-10^6 t}$$

Apartado C

$$v_i(t) = v_1(t) + v_2(t)$$

$$V_i(s) = V_1(s) + V_2(s) = \frac{V_1 s}{s^2 + \omega_1^2} + \frac{V_2 s}{s^2 + \omega_2^2} = \frac{s}{s^2 + 10^{12}} + \frac{s}{s^2 + 10^6}$$

$$H(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)} \Rightarrow V_o(s) = H(s)V_i(s) = \frac{0.5s(2s^2 + 10^{12} + 10^6)}{(s^2 + 10^6)(s^2 + 2\times10^6 s + 10^{12})}$$

Apartado D

Las raíces del denominador de la transformada de Laplace de la tensión de salida se obtienen mediante el siguiente cálculo.

$$s^2 + 2\times10^6 s + 10^{12} = 0 \quad \Rightarrow \quad -s_1 = 10^6 \text{ s}^{-1} \text{ (raíz doble)}$$

$$s^2 + 10^6 = 0 \quad \Rightarrow \quad s = \pm j10^3 \text{ s}^{-1}$$

$$s = \alpha \pm j\beta = \pm j10^3 \quad \Rightarrow \quad \alpha = 0 \text{ s}^{-1},\ \beta = 10^3 \text{ rad/s}$$

En consecuencia, la expansión en fracciones parciales de la expresión representativa de la función de transferencia es de la forma

$$V_o(s) = \frac{K}{s + \alpha - j\beta} + \frac{K^*}{s + \alpha + j\beta} + \frac{K_1}{s + s_1} + \frac{K_2}{(s + s_1)^2}$$

Los dos últimos términos del segundo miembro de la expresión anterior no se consideran, ya que, por estar relacionados con los polos de la función de transferencia, definen el régimen transitorio. Es decir, la tensión de salida en régimen permanente está definida exclusivamente por los dos primeros términos del segundo miembro.

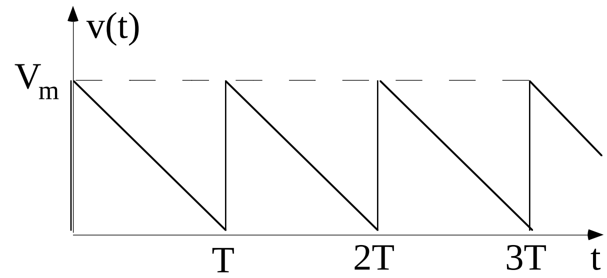
$$K = \left\{V_o(s)(s + \alpha - j\beta)\right\}_{s = -\alpha + j\beta} = \frac{-10^6 + 0.5\times10^{12}}{2(10^{12} - 10^6 + j2\times10^9)} \approx \frac{0.5\times10^{12}}{2\times10^{12}} = 0.25 \text{ V} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow K = 0.25 \text{ V},\ \theta = 0\ °$$

$$v_o(t) = 2|K|e^{-\alpha t}\cos(\beta t + \theta) = 0.5\cos(10^3 t) \text{ V, t en s}$$

Problema 4

$$0 \le t \le T \Rightarrow v(t) = V_m - \frac{V_m}{T}t$$



A (0.8 puntos) La tensión periódica mostrada en la figura puede expresarse como la suma de una componente continua y una serie de Fourier infinita de términos cosenoidales; cada uno de éstos queda definido por un módulo, una frecuencia angular y una fase. Obtened la componente continua y los parámetros que definen los términos cosenoidales.

B (0.4 puntos) El tren periódico de pulsos triangulares de la figura queda reducido a un único pulso (el primero), de duración τ. Obtened la transformada de Fourier de dicho pulso.

C (1.3 puntos) Un circuito se caracteriza por una función de transferencia tal que su transformada de Laplace es

$$H(s) = \frac{10^6 s}{s^2 + 2\times10^6 s + 10^{12}}$$

Representad cualitativamente la variación del módulo de la función de transferencia con la frecuencia angular cuando el circuito funciona en régimen sinusoidal permanente; en la representación señalad valores numéricos fácilmente deducibles. Indicad razonadamente el tipo de filtro al que corresponde el circuito. Indicad los valores a los que tiende la fase de la función de transferencia cuando la frecuencia angular tiende a 0 y a ∞ rad/s.

Apartado A

Se trata de expresar la función como desarrollo en serie de Fourier de la forma

$$v(t) = a_v + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(k\omega_0 t - \varphi_k) \qquad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

$$a_v = \frac{1}{T}\int_0^T v(t)dt = \frac{1}{T}\int_0^T V_m dt - \frac{1}{T}\int_0^T \frac{V_m}{T} t dt = \frac{V_m}{2}$$

$$a_k = \frac{2}{T}\int_0^T v(t)\cos(k\omega_0 t)dt = \frac{2}{T}\int_0^T V_m \cos(k\omega_0 t)dt - \frac{2}{T}\int_0^T \frac{V_m}{T} t\cos(k\omega_0 t)dt =$$

$$= \frac{V_m}{k\pi}[\mathrm{sen}(k\omega_0 t)]_0^T - \frac{2V_m}{T^2}\left[\frac{\cos(k\omega_0 t)}{(k\omega_0)^2} + \frac{t\,\mathrm{sen}(k\omega_0 t)}{k\omega_0}\right]_0^T = 0 \text{ V}$$

$$b_k = \frac{2}{T}\int_0^T v(t)\mathrm{sen}(k\omega_0 t)dt = \frac{2}{T}\int_0^T V_m \mathrm{sen}(k\omega_0 t)dt - \frac{2}{T}\int_0^T \frac{V_m}{T} t\,\mathrm{sen}(k\omega_0 t)dt =$$

$$= -\frac{V_m}{k\pi}[\cos(k\omega_0 t)]_0^T - \frac{2V_m}{T^2}\left[\frac{\mathrm{sen}(k\omega_0 t)}{(k\omega_0)^2} - \frac{t\cos(k\omega_0 t)}{k\omega_0}\right]_0^T = \frac{V_m}{k\pi}$$

$$A_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2} = \frac{V_m}{k\pi} \qquad \varphi_k = \mathrm{arctg}\left(\frac{b_k}{a_k}\right) = 90\ °$$

Apartado B

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} v(t)e^{-j\omega t}dt = \int_0^{\tau} V_m e^{-j\omega t}dt - \int_0^{\tau} V_m \frac{t}{\tau} e^{-j\omega t}dt =$$

$$= -\frac{V_m}{j\omega}\left[e^{-j\omega t}\right]_0^{\tau} - \frac{V_m}{\tau}\left[\frac{e^{-j\omega t}}{(-j\omega)^2}(-j\omega t - 1)\right]_0^{\tau} = \frac{V_m}{\tau\omega^2} - j\frac{V_m}{\omega} - \frac{V_m}{\tau\omega^2}e^{-j\omega\tau} =$$

$$= \frac{V_m}{\tau\omega^2}[1 - \cos(\omega\tau)] + j\frac{V_m}{\omega}\left[\frac{\mathrm{sen}(\omega\tau)}{\omega\tau} - 1\right]$$

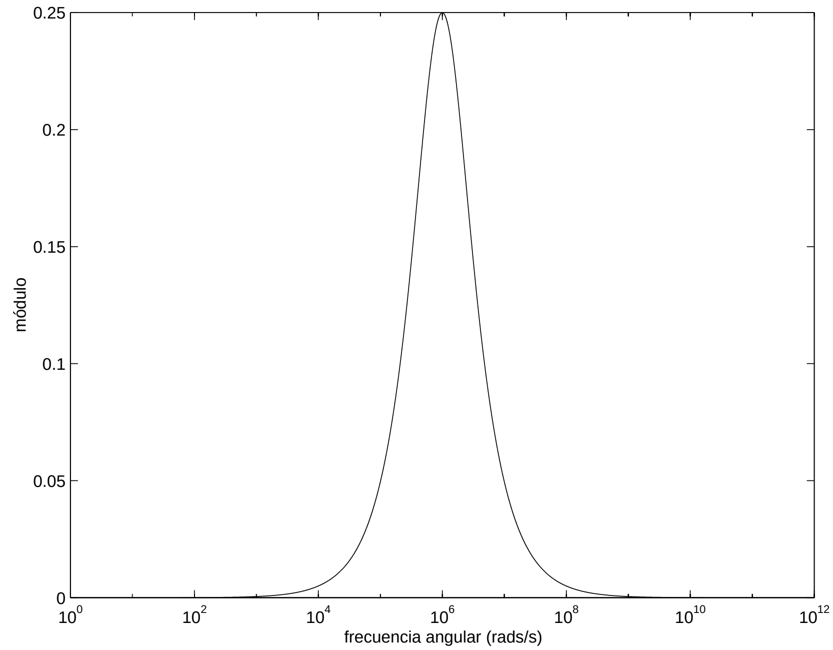
Apartado C

La función de transferencia en régimen sinusoidal permanente es la indicada en el enunciado haciendo la transformación $s = j\omega$, con lo que queda

$$H(\omega) = \{H(s)\}_{s = j\omega} = \frac{j10^6\omega}{(10^{12} - \omega^2) + j2\times10^6\omega} = \frac{N(\omega)}{D(\omega)}$$

$$|H(\omega)| = \frac{10^6\omega}{\sqrt{(10^{12} - \omega^2)^2 + 4\times10^{12}\omega^2}} = \frac{10^6\omega}{\omega^2 + 10^{12}}$$

En la última expresión puede verse que el módulo de la función de transferencia tiende a 0, tanto para valores muy bajos como para valores muy altos de ω. También puede comprobarse que el máximo del módulo se alcanza para el valor particular $\omega_0 = 10^6\ rad/s$, con lo que la representación buscada es la indicada en la figura adjunta.



A partir de la gráfica se deduce que el circuito se comporta como un filtro paso banda, ya que rechaza todas las frecuencias excepto las comprendidas en el entorno de $\omega_0 = 10^6\ rad/s$.

Con relación a la variación de la fase, es posible hacer los siguientes razonamientos.

$$\angle H(\omega) = \angle N(\omega) - \angle D(\omega)$$

$$\angle N(\omega) = 90\ ° \qquad \angle D(\omega) = \text{arctg}\left(\frac{2\times10^6\omega}{10^{12} - \omega^2}\right)$$

$$\omega \rightarrow 0\ \text{rad/s} \quad \Rightarrow \quad \angle D(\omega) \rightarrow 0\ ° \quad \Rightarrow \quad \angle H(\omega) \rightarrow 90\ °$$

$$\omega \rightarrow \infty\ \text{rad/s} \quad \Rightarrow \quad \angle D(\omega) \rightarrow 180\ ° \quad \Rightarrow \quad \angle H(\omega) \rightarrow -90\ °$$