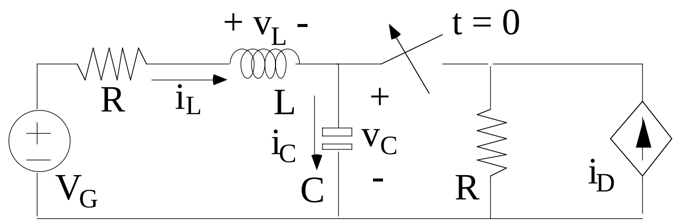
Problema 1



$i_D(t) = g v_C(t)$

En el circuito de la figura, la fuente independiente es continua y son datos las características de todos los elementos. El circuito ha permanecido sin cambios durante mucho tiempo antes de la apertura del interruptor. Una vez producida ésta, ya no ocurren más cambios.

Datos (**sólo para el apartado C**):
$V_G = 3$ V, $g = -0.5$ S, $R = 2\ \Omega$, $L = 1\ \mu H$, $C = 1\ \mu F$

Apartado A (1.2 puntos). Obtened los valores de $i_L(t)$, $v_L(t)$, $v_C(t)$, e $i_C(t)$ en los instantes $t = 0^-$, $t = 0^+$ y $t = \infty$ segundos.

Apartado B (0.5 puntos). Obtened las ecuaciones diferenciales que caracterizan la evolución de $i_L(t)$ y $v_C(t)$ para $t > 0$ segundos.

Apartado C (0.8 puntos). Obtened las expresiones temporales de $i_L(t)$ y $v_C(t)$ para $t > 0$ segundos.

Apartado A

En régimen permanente continuo,
la inductancia es un cortocircuito
y la capacidad, un circuito abierto.

$$v_L(0^-) = 0\text{ V},\; i_C(0^-) = 0\text{ A}$$

Ecuación de nudo
y relación funcional
de la fuente
dependiente.

$$i_L(0^-) + i_D(0^-) = \frac{v_C(0^-)}{R} + i_C(0^-) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow i_L(0^-) + gv_C(0^-) = \frac{v_C(0^-)}{R} + i_C(0^-)$$

Ecuación de malla.

$$V_G = Ri_L(0^-) + v_L(0^-) + v_C(0^-)$$

$$\Rightarrow \quad v_C(0^-) = \frac{V_G}{2 - gR}, \quad i_L(0^-) = \frac{(1 - gR)V_G}{(2 - gR)R}$$

La capacidad
y la inductancia
no admiten cambios
bruscos de tensión
y corriente,
respectivamente.

$$v_C(0^+) = v_C(0^-) = \frac{V_G}{2 - gR},\; i_L(0^+) = i_L(0^-) = \frac{(1 - gR)V_G}{(2 - gR)R}$$

Ecuaciones de malla.

$$V_G = Ri_L(0^+) + v_L(0^+) + v_C(0^+) \Rightarrow v_L(0^+) = 0\text{ V}$$

$$i_C(0^+) = i_L(0^+) = \frac{(1 - gR)V_G}{(2 - gR)R}$$

En régimen permanente continuo,
la inductancia es un cortocircuito
y la capacidad, un circuito abierto.

$$v_L(\infty) = 0\text{ V},\; i_C(\infty) = 0\text{ A}$$

Ecuaciones de malla.

$$i_L(\infty) = i_C(\infty) = 0\text{ A}$$

$$V_G = Ri_L(\infty) + v_L(\infty) + v_C(\infty) \Rightarrow v_C(\infty) = V_G$$

Apartado B

Ecuaciones de malla,
y relaciones funcionales
de los elementos reactivos.

$$i_L(t) = i_C(t) = C\frac{dv_C(t)}{dt} \qquad (1)$$

$$V_G = Ri_L(t) + v_L(t) + v_C(t) \Rightarrow \qquad (2)$$

$$\Rightarrow v_C(t) = V_G - Ri_L(t) - L\frac{di_L(t)}{dt} \qquad (3)$$

Sustituyendo
(1) en (3),

$$LC\frac{d^2v_C(t)}{dt^2} + RC\frac{dv_C(t)}{dt} + v_C(t) = V_G \qquad (4)$$

Derivando (3),

$$\frac{dv_C(t)}{dt} = - R\frac{di_L(t)}{dt} - L\frac{d^2i_L(t)}{dt^2} \qquad (5)$$

Sustituyendo
(5) en (1),

$$LC\frac{d^2i_L(t)}{dt^2} + RC\frac{di_L(t)}{dt} + i_L(t) = 0 \qquad (6)$$

Apartado C

Sustituyendo los datos del
enunciado en (4) y (6)
se obtienen los coeficientes
de la ecuación característica.

$$a = LC = 10^{-12}\ s^2,\ b = RC = 2 \times 10^6\ s^{-1},\ c = 1$$

$$\alpha = \frac{b}{2a} = 10^6\ s^{-1},\ \omega_0 = \sqrt{\frac{c}{a}} = 10^6\ \text{rad/s}$$

$$\alpha^2 = \omega_0^2 \Rightarrow \text{respuesta crítica}$$

Expresión temporal
de $i_L(t)$.

$$i_L(t) = i_{Lf} + Ate^{-\alpha t} + Be^{-\alpha t} \qquad (7)$$

Sustituyendo (7) en (3),

$$v_C(t) = V_G - Ri_{Lf} + A(\alpha L - R)te^{-\alpha t} + [B(\alpha L - R) - LA]e^{-\alpha t} \qquad (8)$$

Por el circuito		Por (7-8)		
$1\ A = \frac{(1 - gR)V_G}{(2 - gR)R}$	$i_L(0)$	$i_{Lf} + B$	$\Rightarrow$	$i_{Lf} = 0\ A$
$0\ A$	$i_L(\infty)$	i_{Lf}		$A = 10^6\ A/s$
$1\ V = \frac{V_G}{2 - gR}$	$v_C(0)$	$V_G - Ri_{Lf} + [B(\alpha L - R) - LA]$		$B = 1\ A$

Sustituyendo
estos resultados
en (7-8),

$$i_L(t) = 10^6te^{-10^6t} + e^{-10^6t}\ A\ (t\ \text{en s}) = te^{-t} + e^{-t}\ A\ (t\ \text{en}\ \mu s)$$

$$v_C(t) = 3 - 10^6te^{-10^6t} - 2e^{-10^6t}\ V\ (t\ \text{en s}) = 3 - te^{-t} - 2e^{-t}\ V\ (t\ \text{en}\ \mu s)$$