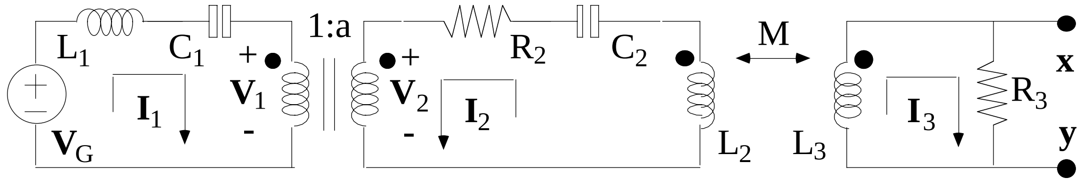
Problema 2



El circuito de la figura, en cuya representación se ha utilizado notación fasorial, funciona en régimen sinusoidal permanente a una frecuencia angular ω.

Datos para los apartados B y C (**no para el apartado A**):

$\mathbf{V}_G = 1$ V, $\omega = 1$ krad/s, $a = 2$, $M = 1$ mH

$R_2 = 1\ \Omega = R_3$, $L_1 = 10$ mH, $L_2 = 2$ mH, $L_3 = 2$ mH, $C_1 = 0.1$ mF, $C_2 = 0.5$ mF

Apartado A (1 punto). Escribid un sistema algebraico de cinco ecuaciones que permita obtener los valores de $\boldsymbol{V_1}$, $\boldsymbol{V_2}$ $\boldsymbol{I_1}$, $\boldsymbol{I_2}$ e $\boldsymbol{I_3}$ (**no calculéis tales valores**).

Apartado B (1 punto). Hallad el circuito equivalente de Thèvenin entre **x** e **y**.

Apartado C (0.5 puntos). Obtened las potencias instantánea y compleja en la fuente.

Apartado A

$$\mathbf{V}_G = \mathbf{I}_1\left(\frac{1}{j\omega C_1} + j\omega L_1\right) + \mathbf{V}_1 \qquad (1)$$

Ecuaciones de malla.

$$\mathbf{V}_2 = -\,\mathbf{I}_2\left(R_2 + \frac{1}{j\omega C_2} + j\omega L_2\right) - \mathbf{I}_3 j\omega M \qquad (2)$$

$$0 = \mathbf{I}_2 j\omega M + \mathbf{I}_3(R_3 + j\omega L_3) \qquad (3)$$

Ecuaciones
del transformador ideal.

$$\mathbf{V}_2 = a\mathbf{V}_1 \qquad (4)$$

$$\mathbf{I}_1 = -\,a\mathbf{I}_2 \qquad (5)$$

Apartado B

Para obtener la tensión de circuito abierto el circuito se analiza tal y como figura en el enunciado, con lo que son válidas las ecuaciones (1-5). Sustituyendo en ellas los datos del enunciado se obtiene

$$\left.\begin{array}{c} 1 = \mathbf{I}_1(j10 - j10) + \mathbf{V}_1 \\ \mathbf{V}_2 = - \mathbf{I}_2(1 - j2 + j2) - \mathbf{I}_3 j \\ 0 = \mathbf{I}_2 j + \mathbf{I}_3(j + 1) \\ \mathbf{V}_2 = 2\mathbf{V}_1 \\ \mathbf{I}_1 = - 2\mathbf{I}_2 \end{array}\right| \Rightarrow \left|\begin{array}{c} \mathbf{I}_1 = 2.4 + j0.8 \text{ A}, \mathbf{I}_2 = - 1.2 - j0.4 \text{ A}, \mathbf{I}_3 = 0.4 + j0.8 \text{ A} \quad (6) \\ \mathbf{V}_1 = 1 \text{ V} \\ \mathbf{V}_2 = 2 \text{ V} \\ \mathbf{V}_{Th} = \mathbf{V}_{xy} = \mathbf{I}_3 R_3 = 0.4 + j0.8 \text{ V} \quad (7) \end{array}\right.$$

Para calcular la impedancia equivalente hay dos posibilidades, que se muestran a continuación.

Cálculo previo de la corriente de cortocircuito

Se conecta un cortocircuito entre **x** e **y**. El cortocircuito elimina la influencia de R_3 por estar en paralelo con tal elemento. En esas condiciones, el circuito queda caracterizado como se indica seguidamente.

$$\mathbf{V}_G = \mathbf{I}_1\left(\frac{1}{j\omega C_1} + j\omega L_1\right) + \mathbf{V}_1 \quad (8)$$

Ecuaciones de malla.

$$\mathbf{V}_2 = - \mathbf{I}_2\left(R_2 + \frac{1}{j\omega C_2} + j\omega L_2\right) - \mathbf{I}_3 j\omega M \quad (9)$$

$$0 = \mathbf{I}_2 j\omega M + \mathbf{I}_3 j\omega L_3 \quad (10)$$

Ecuaciones
del transformador ideal.

$$\mathbf{V}_2 = a\mathbf{V}_1 \quad (11)$$

$$\mathbf{I}_1 = - a\mathbf{I}_2 \quad (12)$$

Sustituyendo en (8-12) los datos del enunciado y utilizando (7) se obtiene

$$\left.\begin{aligned} 1 &= \mathbf{I}_1(j10 - j10) + \mathbf{V}_1 \\ \mathbf{V}_2 &= -\mathbf{I}_2(1 - j2 + j2) - \mathbf{I}_3 j \\ 0 &= \mathbf{I}_2 j + \mathbf{I}_3 j \\ \mathbf{V}_2 &= 2\mathbf{V}_1 \\ \mathbf{I}_1 &= -2\mathbf{I}_2 \end{aligned}\right| \Rightarrow \left| \begin{aligned} \mathbf{I}_N &= \mathbf{I}_3 = 1 + j \text{ A} \\ Z_{Th} &= \frac{\mathbf{V}_{Th}}{\mathbf{I}_N} = 0.6 + j0.2\ \Omega \end{aligned}\right.$$

Cálculo directo de la impedancia

Puesto que el circuito no contiene fuentes dependientes y, además, los transformadores adoptan las configuraciones convencionales, es posible reflejar impedancias tras desactivar la fuente independiente (sustituyéndola por un cortocircuito). Así,

Reflejando impedancias en el secundario del transformador lineal,

$$Z_R = \frac{(\omega M)^2}{a^2\left(j\omega L_1 + \dfrac{1}{j\omega C_1}\right) + R_2 + \dfrac{1}{j\omega C_2} + j\omega L_2} = 1 + j\ \Omega$$

Impedancia entre **x** e **y**

$$Z_{Th} = Z_{xy} = (Z_R + j\omega L_3) \,//\, R_3 = 0.6 + j0.2\ \Omega$$

Apartado C

Utilizando los datos del enunciado y (6) se obtiene

$$\mathbf{I}_1 = 2.4 + j0.8 \text{ A} = 2.53e^{j18.43\,^\circ} \text{ A} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow i_1(t) = \text{Re}\left\{2.53e^{j18.43\,^\circ}e^{j\omega t}\right\} \text{ A} = 2.53\cos(\omega t + 18.43\ ^\circ) \text{ A}, \ \omega = 1 \text{ krad/s}$$

$$\mathbf{V}_G = 1 \text{ V} = 1e^{j0\,^\circ} \text{ V} \Rightarrow v_G(t) = \text{Re}\left\{1e^{j0\,^\circ}e^{j\omega t}\right\} \text{ V} = 1\cos(\omega t) \text{ V}, \ \omega = 1 \text{ krad/s}$$

$$p_G(t) = -\,i_1(t)v_G(t) = 2.53\cos(\omega t - 161.57\ ^\circ)\cos(\omega t) \text{ W}, \ \omega = 1 \text{ krad/s}$$

$$S_G = -\frac{\mathbf{V}_G\mathbf{I}_1^*}{2} = -\,1.2 + j0.4 \text{ VA}$$