Análisis de circuitos

Ingeniería Técnica de Telecomunicación
(primer curso)

Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Telecomunicación
(Universidad de Vigo)

Examen de junio de 2007
(soluciones)

Preparado por:
Enrique Sánchez

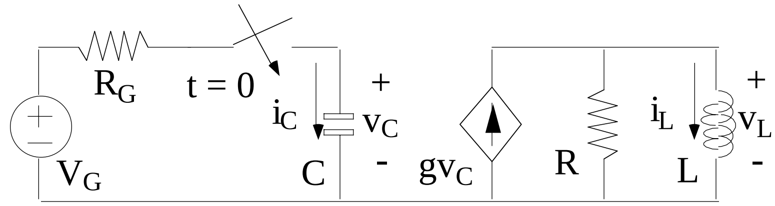
Dpto. Teoría de la Señal y Comunicaciones
Universidad de Vigo

Problema 1

$V_G = 1$ V

$R_G = 1\ \Omega = R$, $g = 1$ S

$L = 1$ H, $C = 1$ F



El circuito de la figura, en el que la fuente independiente es continua, ha permanecido mucho tiempo en el mismo estado antes del cambio de posición del interruptor. Una vez producido éste, el circuito ya no experimenta más cambios.

A (1.2 puntos) Obtened los valores de v_C, i_C, i_L y v_L, para $t = 0^-$, 0^+ e ∞.

B (0.8 puntos) La ecuación diferencial que define la variación de i_L para $t \geq 0$ corresponde a una respuesta crítica en la que $s = -1$ s^{-1} es la raíz doble de la ecuación característica. Obtened las expresiones temporales de v_C e i_L para $t \geq 0$.

Apartado A

En régimen permanente continuo la capacidad es un circuito abierto y la inductancia, un cortocircuito.

$$i_C(0^-) = 0 \text{ A}$$

$$v_L(0^-) = 0 \text{ V}$$

La capacidad está descargada, ya que no está conectada a la excitación.

$$v_C(0^-) = 0 \text{ V}$$

Ecuación de nudo.

$$gv_C(0^-) = \frac{v_L(0^-)}{R} + i_L(0^-) \Rightarrow i_L(0^-) = 0 \text{ A}$$

La tensión en la capacidad y la corriente en la inductancia no pueden variar bruscamente.

$$v_C(0^+) = v_C(0^-) = 0 \text{ V}$$

$$i_L(0^+) = i_L(0^-) = 0 \text{ A}$$

Ecuación de malla.

$$i_C(0^+) = \frac{V_G - v_C(0^+)}{R_G} = \frac{V_G}{R_G} = 1 \text{ A}$$

Ecuación de nudo.

$$gv_C(0^-) = \frac{v_L(0^-)}{R} + i_L(0^-) \Rightarrow v_L(0^+) = 0 \text{ V}$$

En régimen permanente continuo la capacidad es un circuito abierto y la inductancia, un cortocircuito.

$$i_C(\infty) = 0 \text{ A}$$

$$v_L(\infty) = 0 \text{ V}$$

Ecuación de malla. $$v_C(\infty) = V_G - R_G i_C(\infty) = V_G = 1 \text{ V}$$

Ecuación de nudo. $$g v_C(\infty) = \frac{v_L(\infty)}{R} + i_L(\infty) \Rightarrow i_L(\infty) = gV_G = 1 \text{ A}$$

Apartado B

La solución general de una respuesta crítica es de la forma

$$i_L(t) = i_{Lf} + Ate^{st} + Be^{st} \tag{1a}$$

En este caso particular

$$i_{Lf} = i_L(\infty) = 1 \text{ A} \qquad\qquad s = -1 \text{ s}^{-1} \tag{1b}$$

Utilizando (1) se tiene

$$0 \text{ A} = i_L(0) = i_{Lf} + B \qquad \Rightarrow \qquad B = -1 \text{ A} \tag{1c}$$

Por otro lado, utilizando las relaciones funcionales de la capacidad y la inductancia,

Ecuación de nudo. $$g v_C(t) = \frac{v_L(t)}{R} + i_L(t) = \frac{L}{R}\frac{di_L(t)}{dt} + i_L(t) \tag{2}$$

Ecuación de malla. $$V_G = R_G i_C(t) + v_C(t) = R_G C\frac{dv_C(t)}{dt} + v_C(t) \tag{3}$$

Sustituyendo (1) en (2) y el resultado en (3), se llega a

$$v_C(t) = 1 + Ae^{-t} \tag{4a}$$

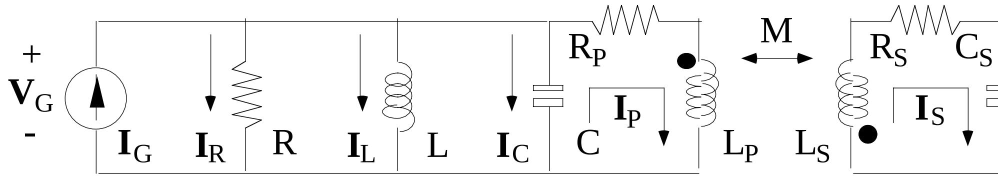
Particularizando esta expresión, se obtiene

$$0 \text{ V} = v_C(0) = 1 + A \qquad \Rightarrow \qquad A = -1 \text{ A/s} \tag{4b}$$

con lo que

$$i_L(t) = 1 - te^{-t} - e^{-t} \qquad\qquad v_C(t) = 1 - e^{-t}$$

Problema 2



El circuito de la figura, en cuya representación se ha utilizado notación fasorial, funciona en régimen sinusoidal permanente a una frecuencia angular ω fija y conocida. Son datos las características de todos los elementos.

A (1.2 puntos) Escribid un sistema algebraico de seis ecuaciones independientes a partir del cual sea posible obtener los valores de $\mathbf{V}_G$, $\mathbf{I}_R$, $\mathbf{I}_L$, $\mathbf{I}_C$, $\mathbf{I}_P$ e $\mathbf{I}_S$.

B (0.8 puntos) Sabiendo que la potencia compleja en la fuente vale - 1 VA, obtened la potencia compleja en el primario del transformador.

$$\omega = 1 \text{ Mrad/s}, \mathbf{I}_G = 1 \text{ A}, R = R_P = R_S = 1\ \Omega$$
$$L = L_P = L_S = 2\ \mu\text{H}, M = 1\ \mu\text{H}, C = C_P = C_S = 0.5\ \mu\text{F}$$

Apartado A

Corrientes de rama. $\mathbf{I}_R = \dfrac{\mathbf{V}_G}{R}$ $\mathbf{I}_L = \dfrac{\mathbf{V}_G}{j\omega L}$ $\mathbf{I}_C = \mathbf{V}_G j\omega C$

Ecuación de nudo. $\mathbf{I}_G = \mathbf{I}_R + \mathbf{I}_L + \mathbf{I}_C + \mathbf{I}_P$

Ecuaciones del transformador.

$$\mathbf{V}_G = \mathbf{I}_P(R + j\omega L_P) + \mathbf{I}_S j\omega M$$
$$0 = \mathbf{I}_P j\omega M + \mathbf{I}_S\left(j\omega L_S + R_S + \frac{1}{j\omega C_S}\right)$$

Apartado B

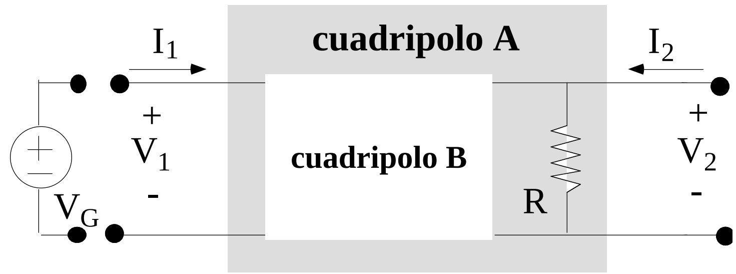
A la frecuencia indicada la agrupación L-C en paralelo es un circuito abierto y la agrupación L_S-C_S es un cortocircuito. $\mathbf{V}_P$ (positiva en el punto) es la tensión en el primario.

$$0 = \mathbf{I}_P j\omega M + \mathbf{I}_S R_S$$
$$\mathbf{V}_G = \mathbf{I}_P(R + j\omega L_P) + \mathbf{I}_S j\omega M$$
$$\mathbf{I}_P = \mathbf{I}_G - \frac{\mathbf{V}_G}{R}$$
$$\mathbf{V}_P = \mathbf{V}_G - \mathbf{I}_P R_P$$

$$\Rightarrow$$

$$\mathbf{V}_G = \frac{2 + j2}{3 + j2}\text{ V}$$
$$\mathbf{I}_P = \frac{3 - j2}{13}\text{ A}, \mathbf{V}_P = -\frac{1}{3 + j2}\text{ V}$$
$$S_P = \frac{\mathbf{V}_P \mathbf{I}_P^*}{2} = \frac{1 + j2}{26}\text{ VA}$$

Problema 3



$R = 1\ \Omega$, $V_G = 3$ V

Parámetros **cuadripolo A**:

$A = 3$, $B = 3\ \Omega$, $C = 3$ S, $D = 2$

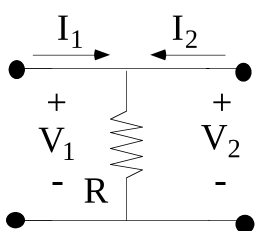
El circuito de la figura funciona en régimen permanente continuo.

A (0.5 puntos) Obtened los parámetros de transmisión del **cuadripolo B**.

B (0.5 puntos) Obtened la potencia disipada en el **cuadripolo B** cuando el circuito adopta la disposición mostrada en la figura.

Apartado A

El cuadripolo A es el resultado de conectar dos cuadripolos en cascada. Los parámetros de transmisión del cuadripolo constituido por la resistencia se obtienen como sigue.



$$V_1 = V_2 \qquad V_1 = a_R V_2 - b_R I_2 \qquad \Rightarrow \qquad a_R = 1 \qquad b_R = 0\ \Omega$$

$$I_1 = \frac{V_2}{R} - I_2 \qquad I_1 = c_R V_2 - d_R I_2 \qquad c_R = \frac{1}{R} = 1\ \text{S} \qquad d_R = 1$$

En la agrupación en cascada la matriz de parámetros de transmisión del cuadripolo resultante es igual al producto de las matrices de parámetros de transmisión de los cuadripolos individuales. Por tanto,

$$\begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_B & b_B \\ c_B & d_B \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} a_R & b_R \\ c_R & d_R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_B a_R + b_B c_R & a_B b_R + b_B d_R \\ c_B a_R + d_B c_R & c_B b_R + d_B d_R \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \qquad \begin{aligned} 3 &= a_B + b_B \\ 3 &= b_B \\ 3 &= c_B + d_B \\ 2 &= d_B \end{aligned} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{aligned} a_B &= 0 \\ b_B &= 3\ \Omega \\ c_B &= 1\ \text{S} \\ d_B &= 2 \end{aligned}$$

Apartado B

En las condiciones indicadas la puerta de salida está en circuito abierto, con lo que se cumplen las siguientes relaciones:

$$\begin{matrix} V_G = V_1 \\ V_1 = AV_2 - BI_2 \\ I_1 = CV_2 - DI_2 \\ I_2 = 0\ A \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{matrix} V_1 = 3\ V \\ I_1 = 3\ A \\ V_2 = 1\ V \\ I_2 = 0\ A \end{matrix}$$

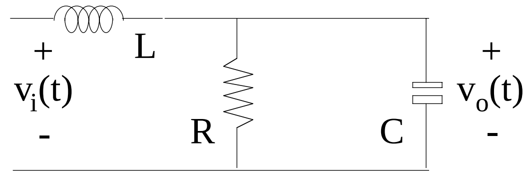
La potencia total en el circuito ha de ser nula. Es decir, en términos absolutos la potencia entregada por el generador ha de ser igual a la suma de las potencias en el cuadripolo B y en la resistencia, con lo que

$$\text{Potencia (absoluta) en el generador: } |P_G| = |-V_G I_1| = 9\ W$$

$$\text{Potencia (absoluta) en la resistencia: } |P_R| = \left|\frac{V_2^2}{R}\right| = 1\ W$$

$$\text{Potencia (absoluta) en el cuadripolo B: } |P_B| = |P_G| - |P_R| = 8\ W$$

Problema 4



$$V_i(s) = \mathcal{L}\{v_i(t)\},\ V_o(s) = \mathcal{L}\{v_o(t)\}$$

$$H(s) = V_o(s)/V_i(s)$$

$R = 1\ \Omega$, $L = 1.5$ mH, $C = 1/3$ mF

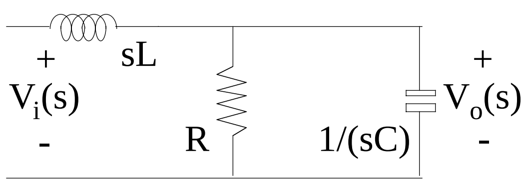
A (0.6 puntos) Obtened H(s) (las condiciones iniciales del circuito son nulas).

B (0.6 puntos) Obtened la transformada inversa de Laplace de la función

$$H(s) = \frac{2 \times 10^6}{s^2 + 3 \times 10^3 s + 2 \times 10^6}$$

C (0.6 puntos) Si $v_i(t) = \cos(\omega t)$ y H(s) es la indicada en el apartado anterior, obtened $v_o(t)$ en régimen permanente ($\omega = 10^3$ rad/s).

Apartado A



En términos de transformada de Laplace, el circuito queda como se indica en la figura. (recuérdese que las condiciones iniciales son nulas).

El circuito es un divisor de tensión constituido por la agrupación en serie de la inductancia con la agrupación en paralelo de la resistencia y la capacidad, con lo que

$$H(s) = \frac{[R/(sC)] / [R + 1/(sC)]}{sL + [R/(sC)] / [R + 1/(sC)]} = \frac{1/(LC)}{s^2 + s/(RC) + 1/(LC)} = \frac{2 \times 10^6}{s^2 + 3 \times 10^3 s + 2 \times 10^6}$$

Apartado B

H(s) puede expandirse en serie de fracciones en la forma siguiente.

$$s^2 + 3 \text{ x } 10^3 s + 2 \text{ x } 10^6 = 0 \quad \Rightarrow \quad s_1 = -10^3 \text{ s}^{-1} \qquad s_1 = -2 \text{ x } 10^3 \text{ s}^{-1}$$

$$H(s) = \frac{2 \times 10^6}{s^2 + 3 \times 10^3 s + 2 \times 10^6} = \frac{2 \times 10^6}{(s + 10^3)(s + 2 \times 10^3)} = \frac{K_1}{s + 10^3} + \frac{K_2}{s + 2 \times 10^3}$$

$$K_1 = \{H(s)(s - s_1)\}_{s = s_1} = 2 \times 10^3 \text{ s}^{-1} \qquad K_2 = \{H(s)(s - s_2)\}_{s = s_2} = -2 \times 10^3 \text{ s}^{-1}$$

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{10^3}{s + 10^3} - \frac{2 \times 10^3}{s + 2 \times 10^3}\right\} = \left\{\begin{matrix}\text{utilizando tablas}\\ \text{de transformadas}\end{matrix}\right\} = 2 \times 10^3\left(e^{-10^3 t} - e^{-2 \times 10^3 t}\right)$$

Apartado C

Teniendo en cuenta la forma de la entrada (cosenoidal, amplitud unidad, fase nula), la expresión temporal de la salida en régimen permanente, utilizando la función de transferencia, es de la forma

$$v_o(t) = \{|H(j\omega)|\cos[\omega t + \theta(\omega)]\}_{\omega = 10^3}$$

$$|H(j\omega)|_{\angle\theta(\omega)} = H(j\omega) = \{H(s)\}_{s = j\omega}$$

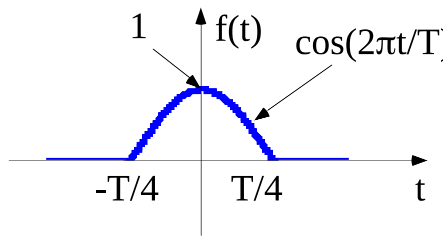
$$H(j\omega) = \frac{2 \times 10^6}{-\omega^2 + j3 \times 10^3\omega + 2 \times 10^6} \Rightarrow \{H(j\omega)\}_{\omega = 10^3} = \frac{2 \times 10^6}{10^6 + j3 \times 10^6} = 0.2 - j0.6 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \{|H(j\omega)|\}_{\omega = 10^3} = \sqrt{0.4} = 0.63 \qquad \{\theta(\omega)\}_{\omega = 10^3} = \text{arctg}(-3) = -71.57\,°$$

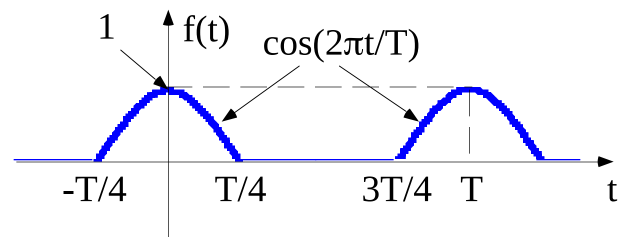
En consecuencia, la expresión buscada es

$$v_o(t) = 0.63\cos(10^3 t - 71.57\,°)\ \text{V, t en s}$$

Problema 5



Un pulso único.



Tren de pulsos periódicos de periodo T.

A (0.7 puntos) Obtened el desarrollo en serie de Fourier (formulación trigonométrica) de la función representada en la figura de la derecha.

B (0.7 puntos) Obtened la transformada de Fourier de la función representada en la figura de la izquierda.

C (0.6 puntos) Sabiendo que la transformada de Laplace de la función de transferencia de un circuito es

$$H(s) = \frac{2 \times 10^6}{s^2 + 3 \times 10^3 s + 2 \times 10^6}$$

obtened la función que describe la variación con la frecuencia de dicha función de transferencia (respuesta en frecuencia), y calculad los valores a los que tienden el módulo y la fase de la respuesta en frecuencia cuando ésta tiende a valores muy bajos y muy altos.

Apartado A

El desarrollo en serie de Fourier con la formulación trigonométrica es

$$f(t) = a_v + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(k\omega_0 t - \varphi_k)$$

$$A_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2} \qquad \varphi_k = \operatorname{arctg}\left(\frac{b_k}{a_k}\right)$$

$$a_v = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)dt \qquad a_k = \frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)\cos\left(\frac{2\pi k}{T}t\right)dt \qquad b_k = \frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi k}{T}t\right)dt$$

Para el periodo centrado en el origen la función representada en la figura de la derecha puede expresarse como

- T/2 ≤ t ≤ - T/4	**- T/4 ≤ t ≤ T/4**	**T/4 ≤ t ≤ T/2**
$f(t) = 0$	$f(t) = \cos(2\pi t/T)$	$f(t) = 0$

Puede observarse que se trata de una función par, ya que f(-t) = f(t), con lo que

$$b_k = 0 \qquad \varphi_k = 0\,^{\circ} \qquad A_k = a_k$$

$$a_v = \frac{2}{T}\int_0^{T/2} f(t)dt = \frac{2}{T}\int_0^{T/4} \cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right)dt = \frac{1}{\pi}\left[\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{T}t\right)\right]_0^{T/4} = \frac{1}{\pi}$$

$$a_k = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(t)\cos\left(\frac{2\pi k}{T}\right)dt = \frac{4}{T}\int_0^{T/4} \cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right)\cos\left(\frac{2\pi k}{T}t\right)dt$$

Teniendo en cuenta que

$$\int \cos(at)\cos(bt)dt = \frac{\operatorname{sen}[(a-b)t]}{2(a-b)} + \frac{\operatorname{sen}[(a+b)t]}{2(a+b)}$$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\left\{\frac{\operatorname{sen}\left[\left(\frac{2\pi}{T} - \frac{2\pi k}{T}\right)t\right]}{1-k} + \frac{\operatorname{sen}\left[\left(\frac{2\pi}{T} + \frac{2\pi k}{T}\right)t\right]}{1+k}\right\}_0^{T/4} = \frac{1}{\pi}\left\{\frac{\operatorname{sen}\left[\frac{(1-k)\pi}{2}\right]}{1-k} + \frac{\operatorname{sen}\left[\frac{(1+k)\pi}{2}\right]}{1+k}\right\}$$

con lo que el desarrollo en serie queda completamente definido.

Obsérvese que el término correspondiente al primer armónico (k = 1) ha de calcularse utilizando la regla de l'Hôpital.

Apartado B

$$F(\omega) = \mathcal{F}\{f(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt = \int_{-T/4}^{T/4} \cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right)e^{-j\omega t}dt$$

Teniendo en cuenta que

$$\int e^{at}\cos(bt)dt = \frac{e^{at}}{a^2 + b^2}[a\cos(bt) + b\operatorname{sen}(bt)]$$

$$F(\omega) = \left\{\frac{e^{-j\omega t}}{\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 - \omega^2}\left[-j\omega\cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right) + \frac{2\pi}{T}\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{T}t\right)\right]\right\}_{-T/4}^{T/4} = \frac{\frac{4\pi}{T}\cos\left(\frac{\omega T}{4}\right)}{\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 - \omega^2}$$

Apartado C

$$H(\omega) = \{H(s)\}_{s\,=\,j\omega} = \frac{2 \times 10^6}{(2 \times 10^6 - \omega^2) + j3 \times 10^6\omega} = |H(\omega)|_{\angle\varphi(\omega)}$$

$$\omega \rightarrow 0 \text{ rad/s} \quad \Rightarrow \quad H(\omega) \rightarrow 1 \quad \Rightarrow \quad |H(\omega)| \rightarrow 1,\ \varphi(\omega) \rightarrow 0\ °$$

$$\omega \rightarrow \infty \text{ rad/s} \quad \Rightarrow \quad H(\omega) \rightarrow 0 \quad \Rightarrow \quad |H(\omega)| \rightarrow 0,\ \varphi(\omega) \rightarrow 180\ °$$

Problema 6 Se dispone de un filtro cuya función de transferencia es

$$H(j\omega) = -\frac{\omega^2}{(2\times 10^6 - \omega^2) + j2\times 10^3\omega}$$

A (0.5 puntos) Indicad justificadamente de qué tipo de filtro se trata.

B (0.5 puntos) Suponiendo que el máximo del módulo de la función de transferencia es la unidad, obtened la frecuencia de corte (o las frecuencias de corte si hay más de una).

Apartado A

$$H(j\omega) = -\frac{\omega^2}{(2\times 10^6 - \omega^2) + j2\times 10^3\omega} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |H(j\omega)| = \frac{\omega^2}{\sqrt{(2\times 10^6 - \omega^2)^2 + 4\times 10^6\omega^2}} = \frac{\omega^2}{\sqrt{4\times 10^{12} + \omega^4}}$$

Puede observarse que

$$\omega \to 0 \text{ rad/s} \qquad \Rightarrow \qquad |H(j\omega)| \to 0$$

$$\omega \to \infty \text{ rad/s} \qquad \Rightarrow \qquad |H(j\omega)| \to 1$$

Es decir, el filtro bloquea las frecuencias bajas mientras que deja pasar las altas. En consecuencia, se trata de un filtro paso alto.

Apartado B

Para cualquier frecuencia de corte se verifica

$$\omega = \omega_c \Rightarrow |H(j\,\omega_c)| = \frac{|H(j\,\omega)|_{max}}{\sqrt{2}}$$

En este caso particular, teniendo en cuenta que el máximo del módulo de la función de transferencia vale 1, ha de verificarse

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\omega_c^2}{\sqrt{4\times 10^{12} + \omega_c^4}} \qquad \Rightarrow \qquad \omega_c = \sqrt{2}\times 10^3 \text{ rad/s}$$

En el cálculo se ha prescindido de las soluciones negativas ya que carecen de significado físico.