Análisis de circuitos

Ingeniería Técnica de Telecomunicación
(primer curso)

Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Telecomunicación
(Universidad de Vigo)

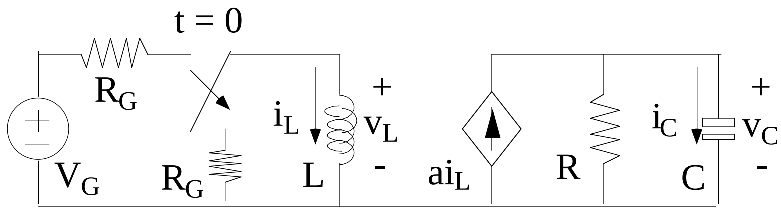
Examen de septiembre de 2007
(soluciones)

Preparado por:
Enrique Sánchez

Dpto. Teoría de la Señal y Comunicaciones
Universidad de Vigo

Problema 1

$V_G = 1$ V
$R_G = 1\ \Omega = R$, $a = 2$
$L = 1$ H, $C = 1$ F



El circuito de la figura, en el que la fuente independiente es continua, ha permanecido mucho tiempo en el mismo estado antes del cambio de posición del interruptor. Una vez producido éste, el circuito ya no experimenta más cambios.

A (1.2 puntos) Obtened los valores de v_C, i_C, i_L y v_L, para $t = 0^-$, 0^+ e ∞.

B (0.8 puntos) La ecuación diferencial que define la variación de v_C para $t \geq 0$ corresponde a una respuesta crítica en la que $s = -1\ s^{-1}$ es la raíz doble de la ecuación característica. Obtened las expresiones temporales de v_C e i_L para $t \geq 0$.

Apartado A

En régimen permanente continuo la capacidad es un circuito abierto y la inductancia, un cortocircuito.

$$i_C(0^-) = 0 \text{ A}$$
$$v_L(0^-) = 0 \text{ V}$$

Ecuación de malla.

$$i_L(0^-) = \frac{V_G - v_L(0^-)}{R_G} = \frac{V_G}{R_G} = 1 \text{ A}$$

Ecuación de nudo y elementos en paralelo.

$$v_C(0^-) = R[ai_L(0^-) - i_C(0^-)] = \frac{RaV_G}{R_G} = 2 \text{ V}$$

La tensión en la capacidad y la corriente en la inductancia no pueden variar bruscamente.

$$v_C(0^+) = v_C(0^-) = \frac{RaV_G}{R_G} = 2 \text{ V}$$
$$i_L(0^+) = i_L(0^-) = \frac{V_G}{R_G} = 1 \text{ A}$$

Ecuación de malla.

$$v_L(0^+) = -R_G i_L(0^+) = -V_G = -1 \text{ V}$$

Ecuación de nudo y elementos en paralelo.

$$i_C(0^+) = ai_L(0^+) - \frac{v_C(0^+)}{R} = \frac{aV_G}{R} - \frac{aV_G}{R} = 0 \text{ A}$$

En régimen permanente continuo la capacidad es un circuito abierto y la inductancia, un cortocircuito.

$$i_C(\infty) = 0 \text{ A}$$

$$v_L(\infty) = 0 \text{ V}$$

Ecuación de malla.

$$i_L(\infty) = -\frac{v_L(\infty)}{R_G} = 0 \text{ A}$$

Ecuación de nudo y elementos en paralelo.

$$v_C(\infty) = R[ai_L(\infty) - i_C(\infty)] = 0 \text{ V}$$

Apartado B

La solución general de una respuesta crítica es de la forma

$$v_C(t) = v_{Cf} + Ate^{st} + Be^{st} \tag{1a}$$

En este caso particular

$$v_{Cf} = v_C(\infty) = 0 \text{ V} \qquad\qquad s = -1 \text{ s}^{-1} \tag{1b}$$

Utilizando (1) se tiene

$$2 \text{ V} = v_C(0) = v_{Cf} + B \qquad \Rightarrow \qquad B = 2 \text{ V} \tag{1c}$$

Por otro lado, utilizando las relaciones funcionales de la capacidad y la inductancia,

Ecuación de nudo.

$$ai_L(t) = \frac{v_C(t)}{R} + i_C(t) = \frac{v_C(t)}{R} + C\frac{dv_C(t)}{dt} \tag{2}$$

Ecuación de malla.

$$0 = R_G i_L(t) + v_L(t) = R_G i_L(t) + L\frac{di_L(t)}{dt} \tag{3}$$

Sustituyendo (1) en (2) y el resultado en (3), se llega a

$$i_L(t) = \frac{A}{a}e^{-t} \tag{4a}$$

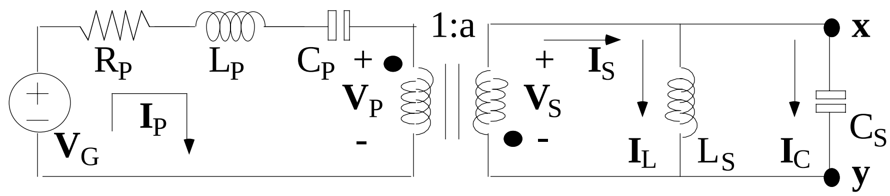
Particularizando esta expresión, se obtiene

$$1 \text{ A} = i_L(0) = \frac{A}{a} \qquad \Rightarrow \qquad A = 2 \text{ V/s} \tag{4b}$$

con lo que

$$i_L(t) = e^{-t} \qquad\qquad v_C(t) = 2t\, e^{-t} + 2e^{-t}$$

Problema 2



El circuito de la figura, en cuya representación se ha utilizado notación fasorial, funciona en régimen sinusoidal permanente a una frecuencia angular ω fija y conocida. Son datos las características de todos los elementos.

A (1.2 puntos) Escribid un sistema algebraico de seis ecuaciones independientes a partir del cual sea posible obtener los valores de $\mathbf{I}_P$, $\mathbf{V}_P$, $\mathbf{V}_S$, $\mathbf{I}_S$, $\mathbf{I}_L$ e $\mathbf{I}_C$.

B (0.8 puntos) Obtened el circuito equivalente de Thèvenin entre **x** e **y**.

$$\omega = 1 \text{ krad/s}, \mathbf{V}_G = 1 \text{ V}, R_P = 1\ \Omega$$
$$L_P = L_S = 5 \text{ mH}, a = 2, C_P = C_S = 0.2 \text{ mF}$$

Apartado A

Ecuación de malla.
$$\mathbf{V}_G = \mathbf{I}_P\left(R_P + j\omega L_P + \frac{1}{j\omega C_P}\right) + \mathbf{V}_P$$

Corrientes de rama.
$$\mathbf{I}_L = \frac{\mathbf{V}_S}{j\omega L_S} \qquad \mathbf{I}_C = \mathbf{V}_S j\omega C_S$$

Ecuación de nudo
$$\mathbf{I}_S = \mathbf{I}_L + \mathbf{I}_C$$

Ecuaciones del transformador
$$\mathbf{I}_P = -a\mathbf{I}_S \qquad \mathbf{V}_S = -a\mathbf{V}_P$$

Apartado B

A la frecuencia indicada la agrupación L_S-C_S en paralelo es un circuito abierto y la agrupación L_P-C_P es un cortocircuito. Con los puntos **x** e **y** en circuito abierto.

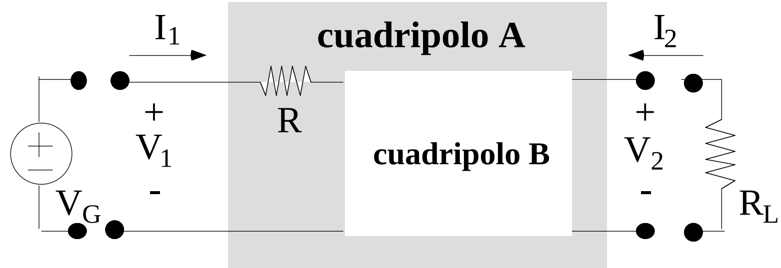
$$\mathbf{I}_S = 0 \text{ A} \Rightarrow \mathbf{I}_P = -a\mathbf{I}_S = 0 \text{ A} \Rightarrow \mathbf{V}_P = \mathbf{V}_G - \mathbf{I}_P R_P = 1 \text{ V} \Rightarrow \mathbf{V}_S = -a\mathbf{V}_P = -2 \text{ V} = \mathbf{V}_{Th}$$

Con los puntos **x** e **y** en cortocircuito

$$\mathbf{V}_S = 0 \text{ V} \Rightarrow \mathbf{V}_P = -\frac{\mathbf{V}_S}{a} = 0 \text{ V} \Rightarrow \mathbf{I}_P = \frac{\mathbf{V}_G - \mathbf{V}_P}{R_P} = 1 \text{ A} \Rightarrow \mathbf{I}_S = -\frac{\mathbf{I}_P}{a} = -0.5 \text{ A} = \mathbf{I}_N$$

$$Z_{Th} = \frac{\mathbf{V}_{Th}}{\mathbf{I}_N} = 4\ \Omega$$

Problema 3



El **cuadripolo A** es simétrico.
Régimen permanente continuo.

DATOS (apartados B y C): $R = 1\ \Omega$, $V_G = 5$ V

A (0.3 puntos) Suponiendo conocidos los parámetros de transmisión del **cuadripolo A** (A, B, C, D), obtened el valor de R_L para que la ganancia de corriente del circuito en la configuración de la figura (I_2/I_1) tenga un valor dado (G_I).

B (0.3 puntos) Suponiendo conocidos los parámetros de transmisión del **cuadripolo A** (A, B, C, D), obtened los parámetros de transmisión del **cuadripolo B**.

C (0.4 puntos) Se hace una medida en el circuito de la figura, en el que se ha sustituido R_L por un cortocircuito. Los resultados de dicha medida son: $I_1 = 2$ A, $I_2 = -1$ A. Obtened los parámetros de transmisión del **cuadripolo A**.

Apartado A

En las condiciones indicadas en la figura se cumplen las relaciones

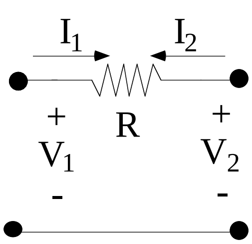
$$I_1 = CV_2 - DI_2 \qquad\qquad V_2 = -R_L I_2$$

a partir de las cuales puede deducirse

$$I_1 = -I_2(CR_L + D) \Rightarrow \frac{I_2}{I_1} = -\frac{1}{CR_L + D} = G_I \Rightarrow R_L = -\frac{1}{C}\left(D + \frac{1}{G_I}\right)$$

Apartado B

El cuadripolo A es el resultado de conectar dos cuadripolos en cascada. Los parámetros de transmisión del cuadripolo constituido por la resistencia se obtienen como sigue.



$$\begin{matrix} I_1 = -I_2 & V_1 = a_R V_2 - b_R I_2 \\ V_1 = V_2 - RI_2 & I_1 = c_R V_2 - d_R I_2 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} a_R = 1 & b_R = R = 1\ \Omega \\ c_R = 0\ \text{S} & d_R = 1 \end{matrix}$$

En la agrupación en cascada la matriz de parámetros de transmisión del cuadripolo resultante es igual al producto de las matrices de parámetros de transmisión de los cuadripolos individuales. Por tanto,

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_R & b_R \\ c_R & d_R \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} a_B & b_B \\ c_B & d_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_R a_B + b_R c_B & a_R b_B + b_R d_B \\ c_R a_B + d_R c_B & c_R b_B + d_R d_B \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \begin{aligned} A &= a_B + c_B \\ B &= b_B + d_B \\ C &= c_B \\ D &= d_B \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} a_B &= A - C \\ b_B &= B - D \\ c_B &= C \\ d_B &= D \end{aligned}$$

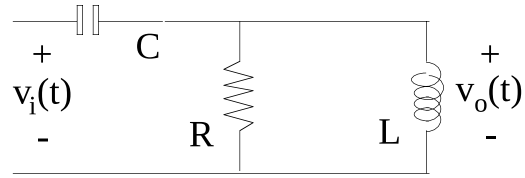
Obsérvese que las matrices de parámetros de transmisión han de multiplicarse en el orden indicado (que coincide con el orden de los cuadripolos) porque el producto de matrices no es conmutativo.

Apartado C

En el circuito se cumplen las relaciones que se indican a continuación. En la segunda columna se han incluido las condiciones de simetría del cuadripolo A.

$$\begin{aligned} V_G &= V_1 \\ V_1 &= AV_2 - BI_2 \\ I_1 &= CV_2 - DI_2 \\ V_2 &= 0\ \text{V} \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} V_G &= -BI_2 \\ I_1 &= -DI_2 \\ AD - BC &= 1 \\ A &= D \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} A = D &= -\frac{I_1}{I_2} = 2 \\ B &= -\frac{V_G}{I_2} = 5\,\Omega \\ C &= \frac{AD - 1}{B} = 0.6\ \text{S} \end{aligned}$$

Problema 4



$V_i(s) = \mathcal{L}\{v_i(t)\}$, $V_o(s) = \mathcal{L}\{v_o(t)\}$

$H(s) = V_o(s)/V_i(s)$

$R = 1\ \Omega$, $L = 1$ mH, $C = 0.5$ mF

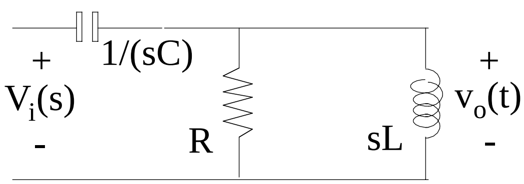
A (0.7 puntos) Obtened H(s) (las condiciones iniciales del circuito son nulas).

B (0.7 puntos) Obtened la transformada inversa de Laplace de la función

$$H(s) = \frac{s^2}{s^2 + 2 \times 10^3 s + 2 \times 10^6}$$

C (0.6 puntos) Si $v_i(t) = u(t)$ y H(s) es la indicada en el apartado anterior, obtened $v_o(t)$ en régimen permanente.

Apartado A



En términos de transformada de Laplace, el circuito queda como se indica en la figura. (recuérdese que las condiciones iniciales son nulas).

El circuito es un divisor de tensión constituido por la agrupación en serie de la capacidad con la agrupación en paralelo de la resistencia y la inductancia, con lo que

$$H(s) = \frac{sRL/(R + sL)}{1/(sC) + sRL/(R + sL)} = \frac{s^2}{s^2 + s/(RC) + 1/(LC)} = \frac{s^2}{s^2 + 2 \times 10^3 s + 2 \times 10^6}$$

Apartado B

H(s) es una función racional impropia puesto que su numerador y su denominador son del mismo orden. En consecuencia, puede escribirse en la forma

$$H(s) = 1 - G(s) \qquad G(s) = \frac{2 \times 10^3 s + 2 \times 10^6}{s^2 + 2 \times 10^3 s + 2 \times 10^6}$$

A su vez, G(s) puede expandirse en serie de fracciones en la forma siguiente.

$$s^2 + 2 \times 10^3 s + 2 \times 10^6 = 0 \quad \Rightarrow \quad s_c = -10^3(1 - j)\ s^{-1} \qquad s_c^* = -10^3(1 + j)\ s^{-1}$$

$$\Rightarrow \quad \alpha = -10^3\ s^{-1} \qquad \beta = 10^3\ s^{-1}$$

$$G(s) = \frac{2 \times 10^3 s + 2 \times 10^6}{s^2 + 2 \times 10^3 s + 2 \times 10^6} = \frac{2 \times 10^3 s + 2 \times 10^6}{(s + 10^3 - j10^3)(s + 10^3 + j10^3)} =$$

$$= \frac{K}{s + 10^3 - j10^3} + \frac{K^*}{s + 10^3 + j10^3}$$

$$K = \{G(s)(s - s_c)\}_{s = s_c} = 10^3\ s^{-1} = |K|_{\angle\theta} \quad \Rightarrow \quad |K| = 10^3\ s^{-1},\ \theta = 0\ °$$

$$g(t) = \mathcal{L}^{-1}\{G(s)\} = 2|K|e^{\alpha t}\cos(\beta t + \theta) = 2 \times 10^3 e^{-10^3 t}\cos(10^3 t)$$

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\{1 - G(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\{1\} - g(t)$$

$$\mathcal{L}^{-1}\{1\} = \left\{\begin{matrix}\text{utilizando tablas} \\ \text{de transformadas}\end{matrix}\right\} = \delta(t)$$

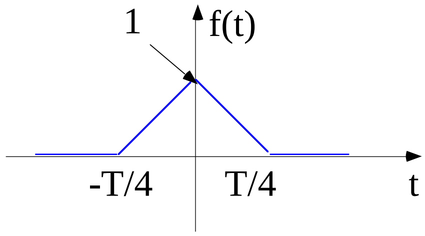
Apartado C

$$v_i(t) = u(t) \Rightarrow \left\{\begin{matrix}\text{utilizando tablas} \\ \text{de transformadas}\end{matrix}\right\} \Rightarrow V_i(s) = \frac{1}{s}$$

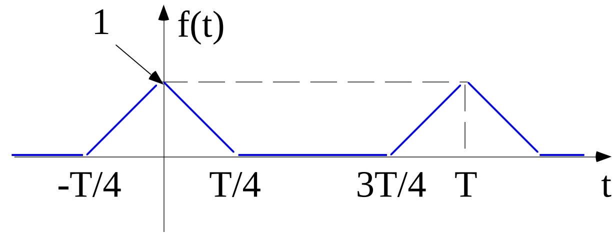
$$V_o(s) = H(s)V_i(s) = \frac{s}{s^2 + 2 \times 10^3 + 2 \times 10^6}$$

Puede observarse que $V_o(s)$ es de la misma forma que la función G(s) mencionada en el apartado anterior (en todo caso, puede observarse que sus raíces son complejas, con partes real e imaginaria), por lo que las transformadas inversas de una y otra también serán de la misma forma. Es decir, la transformada inversa de Laplace de $V_o(s)$ tiene la forma de una exponencial amortiguada, lo cual significa que la respuesta en régimen permanente es nula.

Problema 5



Un pulso único.



Tren de pulsos periódicos de periodo T.

A (0.7 puntos) Obtened el desarrollo en serie de Fourier (formulación trigonométrica) de la función representada en la figura de la derecha.

B (0.7 puntos) Obtened la transformada de Fourier de la función representada en la figura de la izquierda.

C (0.6 puntos) Sabiendo que la transformada de Laplace de la función de transferencia de un circuito es

$$H(s) = \frac{s^2}{s^2 + 2 \times 10^3 s + 2 \times 10^6}$$

obtened la función que describe la variación con la frecuencia de dicha función de transferencia (respuesta en frecuencia), y calculad los valores a los que tienden el módulo y la fase de la respuesta en frecuencia cuando ésta tiende a valores muy bajos y muy altos.

Apartado A

El desarrollo en serie de Fourier con la formulación trigonométrica es

$$f(t) = a_v + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(k\omega_0 t - \varphi_k)$$

$$A_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2} \qquad \varphi_k = \operatorname{arctg}\left(\frac{b_k}{a_k}\right)$$

$$a_v = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)dt \qquad a_k = \frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)\cos\left(\frac{2\pi k}{T}t\right)dt \qquad b_k = \frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi k}{T}t\right)dt$$

Para el periodo centrado en el origen la función representada en la figura de la derecha puede expresarse como

$- T/2 \leq t \leq - T/4$	$- T/4 \leq t \leq 0$	$0 \leq t \leq T/4$	$T/4 \leq t \leq T/2$
$f(t) = 0$	$f(t) = (4t/T) + 1$	$f(t) = - (4t/T) + 1$	$f(t) = 0$

Puede observarse que se trata de una función par, ya que f(-t) = f(t), con lo que

$b_k = 0 \qquad \varphi_k = 0\,^o \qquad A_k = a_k$

$$a_v = \frac{2}{T}\int_0^{T/2} f(t)dt = \frac{2}{T}\int_0^{T/4}\left(-\frac{4t}{T}+1\right)dt = \frac{2}{T}\left[-\frac{2t^2}{T}+t\right]_0^{T/4} = \frac{1}{2}$$

$$a_k = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(t)\cos\left(\frac{2\pi k}{T}t\right)dt = \frac{4}{T}\int_0^{T/4}\left(-\frac{4t}{T}+1\right)\cos\left(\frac{2\pi k}{T}t\right)dt$$

Teniendo en cuenta que

$$\int t\cos(at)dt = \frac{\cos(at)}{a^2} + \frac{t\,\mathrm{sen}(at)}{a}$$

$$a_k = -\frac{16}{T^2}\left[\frac{\cos\left(\frac{2\pi k}{T}t\right)}{\left(\frac{2\pi k}{T}\right)^2} + \frac{t\,\mathrm{sen}\left(\frac{2\pi k}{T}t\right)}{\frac{2\pi k}{T}}\right]_0^{T/4} + \frac{4}{T}\left[\frac{\mathrm{sen}\left(\frac{2\pi k}{T}t\right)}{\frac{2\pi k}{T}}\right]_0^{T/4} = \frac{4}{(\pi k)^2}\left[\cos\left(\frac{\pi k}{2}\right) - 1\right]$$

con lo que el desarrollo en serie queda completamente definido.

Apartado B

$$F(\omega) = \mathcal{F}\{f(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt = \int_{-T/4}^{0}\left(\frac{4t}{T}+1\right)e^{-j\omega t}dt + \int_0^{T/4}\left(-\frac{4t}{T}+1\right)e^{-j\omega t}dt$$

Teniendo en cuenta que

$$\int te^{at}dt = \frac{(at-1)e^{at}}{a^2}$$

$$F(\omega) = \frac{4}{T}\left[\frac{(1+j\omega t)e^{-j\omega t}}{\omega^2}\right]_{-T/4}^{0} - \left[\frac{e^{-j\omega t}}{j\omega}\right]_{-T/4}^{0} - \frac{4}{T}\left[\frac{(1+j\omega t)e^{-j\omega t}}{\omega^2}\right]_0^{T/4} - \left[\frac{e^{-j\omega t}}{j\omega}\right]_0^{T/4} =$$

$$= \left(-\frac{6}{\omega} + j\frac{8}{\omega^2}\right)\mathrm{sen}\left(\frac{\omega T}{4}\right)$$

Apartado C

$$H(\omega) = \{H(s)\}_{s = j\omega} = \frac{-\omega^2}{(2 \times 10^6 - \omega^2) + j2 \times 10^6\omega} = |H(\omega)|_{\angle\varphi(\omega)}$$

$$\omega \rightarrow 0 \text{ rad/s} \quad \Rightarrow \quad H(\omega) \rightarrow 0 \quad \Rightarrow \quad |H(\omega)| \rightarrow 0,\ \varphi(\omega) \rightarrow 180\,°$$

$$\omega \rightarrow \infty \text{ rad/s} \quad \Rightarrow \quad H(\omega) \rightarrow 1 \quad \Rightarrow \quad |H(\omega)| \rightarrow 1,\ \varphi(\omega) \rightarrow 0\,°$$

Problema 6 Se dispone de un filtro cuya función de transferencia es

$$H(j\omega) = \frac{2 \times 10^6}{(2 \times 10^6 - \omega^2) + j3 \times 10^3\omega}$$

A (0.5 puntos) Indicad justificadamente de qué tipo de filtro se trata.

B (0.5 puntos) Suponiendo que el máximo del módulo de la función de transferencia es la unidad, obtened la frecuencia de corte (o las frecuencias de corte si hay más de una).

Apartado A

$$H(j\omega) = \frac{2 \times 10^6}{(2 \times 10^6 - \omega^2) + j3 \times 10^3\omega} \Rightarrow |H(j\omega)| = \frac{2 \times 10^6}{\sqrt{(2 \times 10^6 - \omega^2)^2 + 9 \times 10^6\omega^2}}$$

Puede observarse que

$$\omega \to 0 \text{ rad/s} \quad \Rightarrow \quad |H(j\omega)| \to 1$$

$$\omega \to \infty \text{ rad/s} \quad \Rightarrow \quad |H(j\omega)| \to 0$$

Es decir, el filtro bloquea las frecuencias altas mientras que deja pasar las bajas. En consecuencia, se trata de un filtro paso bajo.

Apartado B

Para cualquier frecuencia de corte se verifica

$$\omega = \omega_c \Rightarrow |H(j\omega_c)| = \frac{|H(j\omega)|_{max}}{\sqrt{2}}$$

En este caso particular, teniendo en cuenta que el máximo del módulo de la función de transferencia vale 1, ha de verificarse

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{2 \times 10^6}{\sqrt{4 \times 10^{12} + 5 \times 10^6\omega_c^2 + \omega_c^4}} \quad \Rightarrow \quad \omega_c = 0.84 \times 10^3 \text{ rad/s}$$

En el cálculo se ha prescindido de las soluciones negativas ya que carecen de significado físico.