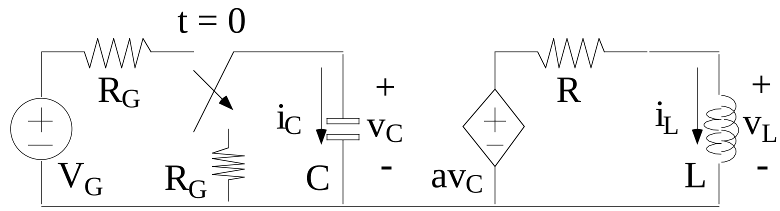
Problema 1

$V_G = 1$ V
$R_G = 2\ \Omega = R$, $a = 2$
$L = 2$ H, $C = 1$ F



El circuito de la figura, en el que la fuente independiente es continua, ha permanecido mucho tiempo en el mismo estado antes del cambio de posición del interruptor. Una vez producido éste, el circuito ya no experimenta más cambios.

A (1.2 puntos) Obtened los valores de v_C, i_C, i_L y v_L, para $t = 0^-$, 0^+ e ∞.

B (0.8 puntos) La ecuación diferencial que define la variación de i_L para $t \geq 0$ corresponde a una respuesta supercrítica en la que $s_1 = -1\ s^{-1}$ y $s_2 = -0.5\ s^{-1}$ son las raíces de la ecuación característica. Obtened las expresiones temporales de v_C e i_L para $t \geq 0$.

Apartado A

En régimen permanente continuo la capacidad es un circuito abierto y la inductancia, un cortocircuito.

$$i_C(0^-) = 0\ \text{A}$$

$$v_L(0^-) = 0\ \text{V}$$

Ecuación de malla.

$$v_C(0^-) = V_G - R_G i_C(0^-) = V_G = 1\ \text{V}$$

Ecuación de malla.

$$i_L(0^-) = \frac{a v_C(0^-) - v_L(0^-)}{R} = \frac{aV_G}{R} = 1\ \text{A}$$

La tensión en la capacidad y la corriente en la inductancia no pueden variar bruscamente.

$$v_C(0^+) = v_C(0^-) = V_G = 1\ \text{V}$$

$$i_L(0^+) = i_L(0^-) = \frac{aV_G}{R} = 1\ \text{A}$$

Ecuación de malla.

$$i_C(0^+) = -\frac{v_C(0^+)}{R_G} = -0.5\ \text{A}$$

Ecuación de malla.

$$v_L(0^+) = a v_C(0^+) - R i_L(0^+) = 0\ \text{V}$$

En régimen permanente continuo la capacidad es un circuito abierto y la inductancia, un cortocircuito. $i_C(\infty) = 0$ A

$v_L(\infty) = 0$ V

Ecuación de malla. $v_C(0^-) = - R_G i_C(0^-) = 0$ V

Ecuación de malla. $i_L(0^-) = \dfrac{av_C(0^-) - v_L(0^-)}{R} = 0$ A

Apartado B

La solución general de una respuesta supercrítica es de la forma

$$i_L(t) = i_{Lf} + Ae^{s_1 t} + Be^{s_2 t} \quad (1a)$$

En este caso particular

$$i_{Lf} = i_L(\infty) = 0 \text{ A} \qquad s_1 = - 1 \text{ s}^{-1}, s_1 = - 0.5 \text{ s}^{-1} \quad (1b)$$

Utilizando (1) se tiene

$$1 \text{ A} = i_L(0) = A + B \quad (2a)$$

Por otro lado, utilizando las relaciones funcionales de la capacidad y la inductancia,

Ecuación de malla. $$0 = v_C(t) + Ri_C(t) = v_C(t) + RC\frac{dv_C(t)}{dt} \quad (3)$$

Ecuación de malla. $$av_C(t) = 0 = Ri_L(t) + v_L(t) = Ri_L(t) + L\frac{di_L(t)}{dt} \quad (4)$$

Sustituyendo (1) en (4) y el resultado en (3), se llega a

$$v_C(t) = 0.5Be^{-0.5t} \quad (5a)$$

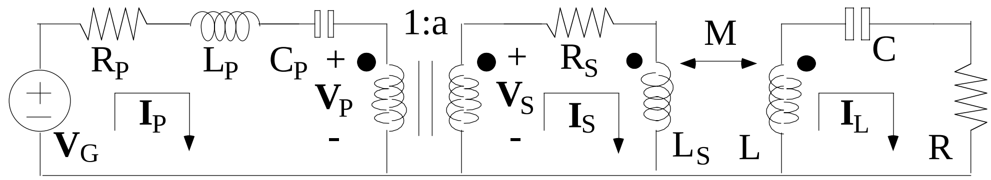
Particularizando esta expresión y combinando el resultado con (2a), se obtiene

$$1 \text{ V} = v_C(0) = 0.5B \quad \Rightarrow \quad A = - 1 \text{ A}, B = 2 \text{ A} \quad (2b)$$

con lo que

$$i_L(t) = - e^{-t} + 2e^{-0.5t} \qquad v_C(t) = e^{-0.5t}$$

Problema 2



El circuito de la figura, en cuya representación se ha utilizado notación fasorial, funciona en régimen sinusoidal permanente a una frecuencia angular ω fija y conocida. Son datos las características de todos los elementos.

A (1 punto) Escribid un sistema algebraico de cinco ecuaciones independientes a partir del cual sea posible obtener los valores de $\mathbf{I}_P$, $\mathbf{V}_P$, $\mathbf{V}_S$, $\mathbf{I}_S$, e $\mathbf{I}_L$.

B (1 punto) Sabiendo que $I_P = 1$ A, obtened la potencia compleja en L.

$$\omega = 10 \text{ krad/s}, \ \mathbf{V}_G = 2 + j2 \text{ V}, \ R_P = 1\ \Omega, \ R_S = 3\ \Omega, \ R_L = 1\ \Omega$$

$$L_P = 0.1 \text{ mH}, \ L_S = 0.8 \text{ mH}, \ L = 0.1 \text{ mH}, \ a = 2, \ M = 0.1 \text{ mH}, \ C_P = 0.1 \text{ mF}, \ C = 0.1 \text{ mF}$$

Apartado A

Ecuaciones de malla.

$$\mathbf{V}_G = \mathbf{I}_P\left(R_P + j\omega L_P + \frac{1}{j\omega C_P}\right) + \mathbf{V}_P$$

$$\mathbf{V}_S = \mathbf{I}_S(R_S + j\omega L_S) - \mathbf{I}_L j\omega M$$

$$0 = -\mathbf{I}_S j\omega M + \mathbf{I}_L\left(j\omega L + \frac{1}{j\omega C} + R\right)$$

Ecuaciones
del transformador ideal.

$$\mathbf{I}_P = a\mathbf{I}_S \qquad \mathbf{V}_S = a\mathbf{V}_P$$

Apartado B

A la frecuencia indicada las agrupaciones L_P-C_P y L-C son cortocircuitos (aunque en la segunda no puede prescindirse del efecto de inductancia mutua), con lo que.

$$\mathbf{I}_P = 1 \text{ A} \Rightarrow \mathbf{I}_S = \frac{\mathbf{I}_P}{a} = 0.5 \text{ A} \Rightarrow \mathbf{I}_L = \frac{j\omega M}{R}\mathbf{I}_S = j0.5 \text{ A}$$

$$S_L = -\frac{\mathbf{V}_L\mathbf{I}_L}{2} = -\frac{|\mathbf{I}_L|^2\left(\frac{1}{j\omega C} + R\right)}{2} = -0.125(1 - j) \text{ VA}$$

Problema 3

El circuito de la figura funciona en régimen permanente continuo.

A (0.5 puntos) Obtened el circuito equivalente de Thèvenin del montaje de la figura entre los puntos **x** e **y** en función de los parámetros ***z*** del **cuadripolo A**.

B (0.5 puntos) El **cuadripolo A** es simétrico y el resultado de agrupar en serie dos cuadripolos: el **cuadripolo 1** y el **cuadripolo 2**. En las condiciones indicadas en la figura (V_G = 5 V) se hace una medida de la que resultan los siguientes valores: I_1 = 1 A, V_2 = 2 V. Obtened los parámetros de impedancia del **cuadripolo 2** sabiendo que los del **cuadripolo 1** son

$$z_{11}^1 = 1\,\Omega,\ z_{12}^1 = 1\,\Omega,\ z_{21}^1 = 1\,\Omega,\ z_{22}^1 = 4\,\Omega$$

Apartado A

$V_G = V_1$ $V_1 = I_1 Z_{11} + I_2 Z_{12}$ $V_2 = I_1 Z_{21} + I_2 Z_{22}$ $V_2 = - I_2 R_L$	**x-y** en circuito abierto $I_2 = 0$ A	$\Rightarrow$	$I_1 = \dfrac{V_G}{Z_{11}}$ $V_2 = I_1 Z_{21} = \dfrac{Z_{21}}{Z_{11}} V_G = V_{Th}$
$V_G = V_1$ $V_1 = I_1 Z_{11} + I_2 Z_{12}$ $V_2 = I_1 Z_{21} + I_2 Z_{22}$ $V_2 = - I_2 R_L$	**x-y** en cortocircuito $V_2 = 0$ V	$\Rightarrow$	$I_1 = -\dfrac{Z_{22}}{Z_{21}} I_2$ $V_G = I_1 Z_{11} + I_2 Z_{12} = I_2 \dfrac{Z_{12}Z_{21} - Z_{11}Z_{22}}{Z_{21}} \Rightarrow$ $\Rightarrow I_N = - I_2 = \dfrac{Z_{21} V_G}{Z_{11}Z_{22} - Z_{12}Z_{21}}$

$$R_{Th} = \frac{V_{Th}}{I_N} = \frac{Z_{11}Z_{22} - Z_{12}Z_{21}}{Z_{11}}$$

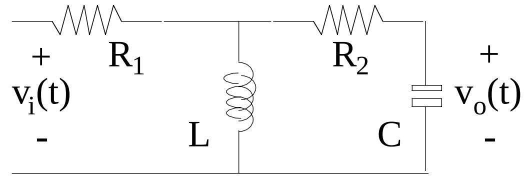
Apartado B

En las condiciones indicadas $(I_2 = 0\ A)$ y teniendo en cuenta las condiciones de simetría se cumple

$$5\ V = V_G = V_{11} = I_1 Z_{11} = Z_{11} \Rightarrow Z_{11} = 5\ \Omega = Z_{22}$$

$$2\ V = V_2 = I_1 Z_{21} = Z_{21} \Rightarrow Z_{21} = 2\ \Omega = Z_{12}$$

Problema 4



$$V_i(s) = \mathcal{L}\{v_i(t)\},\ V_o(s) = \mathcal{L}\{v_o(t)\}$$

$$H(s) = V_o(s)/V_i(s)$$

$R_1 = 1\ \Omega = R_2$, $L = 0.5\ \mu H$, $C = 0.5\ \mu F$

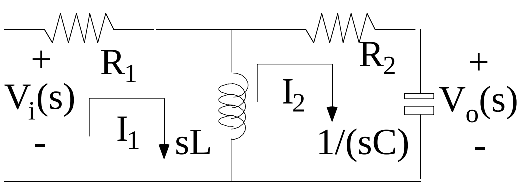
A (0.8 puntos) Obtened H(s) (las condiciones iniciales del circuito son nulas).

B (0.6 puntos) Obtened la transformada inversa de Laplace de la función

$$H(s) = \frac{10^6 s}{s^2 + 2 \times 10^6 s + 2 \times 10^{12}}$$

C (0.6 puntos) Si $v_i(t) = \cos(\omega_1 t) + \cos(\omega_2 t)$ y H(s) es la indicada en el apartado anterior, obtened $v_o(t)$ en régimen permanente ($\omega_1 = 10^3$ rad/s, $\omega_2 = 10^6$ rad/s). Se recomienda utilizar aproximaciones matemáticas razonables.

Apartado A



En términos de transformada de Laplace, el circuito queda como se indica en la figura. (recuérdese que las condiciones iniciales son nulas).

El circuito se caracteriza por las siguientes ecuaciones de malla:

$$V_i = I_1(R_1 + sL) - I_2 sL \qquad 0 = -I_1 sL + I_2\left(sL + R_2 + \frac{1}{sC}\right)$$

a partir de las cuales puede deducirse

$$I_1 = \frac{V_i + I_2 sL}{R_1 + sL} \qquad V_o = \frac{I_2}{sC} = \frac{V_i sL}{s^2 LC(R_1 + R_2) + s(R_1 R_2 C + L) + R_1}$$

$$H(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{\dfrac{s}{(R_1 + R_2)C}}{s^2 + s\left[\dfrac{R_1 R_2}{(R_1 + R_2)L} + \dfrac{1}{(R_1 + R_2)C}\right] + \dfrac{R_1}{(R_1 + R_2)LC}} = \frac{10^6 s}{s^2 + 2 \times 10^6 s + 2 \times 10^{12}}$$

Apartado B

H(s) puede expandirse en serie de fracciones en la forma siguiente.

$$s^2 + 2 \times 10^6 s + 2 \times 10^{12} = 0 \quad \Rightarrow \quad s_c = -10^6(1 - j)\ s^{-1} \qquad s_c^* = -10^6(1 + j)\ s^{-1}$$

$$\Rightarrow \quad \alpha = -10^6\ s^{-1} \qquad \beta = 10^6\ s^{-1}$$

$$H(s) = \frac{10^6 s}{s^2 + 2 \times 10^6 s + 2 \times 10^{12}} = \frac{10^6 s}{(s + 10^6 - j10^6)(s + 10^6 + j10^6)} =$$

$$= \frac{K}{s + 10^6 - j10^6} + \frac{K^*}{s + 10^6 + j10^6}$$

$$K = \{H(s)(s - s_c)\}_{s = s_c} = \frac{10^6(1 + j)}{2}\ s^{-1} = |K|_{\angle\theta} \quad \Rightarrow \quad |K| = \frac{10^6}{\sqrt{2}}\ s^{-1},\ \theta = 45\ °$$

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H(s)\} = 2|K|e^{\alpha t}\cos(\beta t + \theta) = \sqrt{2} \times 10^6 e^{-10^6 t}\cos(10^6 t + 45\ °)$$

Apartado C

Función de transferencia en función de la frecuencia

$$H(j\omega) = \{H(s)\}_{s=j\omega} =$$

$$= \frac{j10^6\omega}{(2 \times 10^{12} - \omega^2) + j2 \times 10^6\omega}$$

Salida en régimen sinusoidal permanente (entrada cosenoidal)

$$y(t) = A|H(j\omega)|\cos[\omega t + \varphi + \theta(\omega)]$$

$$v_{i1}(t) = A_1\cos(\omega_1 t + \varphi_1)$$

$$A_1 = 1\ V \qquad \varphi_1 = 0\ ° \qquad \omega_1 = 10^3\ \text{rad/s}$$

$$\Rightarrow \quad \{H(j\omega)\}_{\omega=10^3} = \frac{j10^9}{(2 \times 10^{12} - 10^6) + j2 \times 10^9} \approx \frac{j10^9}{2 \times 10^{12}}$$

$$\Rightarrow \quad |H(j\omega)|_{\omega=10^3} \approx 0.0005 \qquad \theta(\omega)_{\omega=10^3} \approx 90\ °$$

$$v_{o1}(t) = 0.0005\cos(10^3 t + 90\ °)\ V$$

$$v_{i2}(t) = A_2\cos(\omega_2 t + \varphi_2)$$

$$A_2 = 1\ \text{V}$$

$$\varphi_2 = 0\ ^o$$

$$\omega_2 = 10^6\ \text{rad/s}$$

$$\Rightarrow \quad \{H(j\omega)\}_{\omega=10^6} = \frac{j10^{12}}{(2 \times 10^{12} - 10^{12}) + j2 \times 10^{12}} = 0.4 + j0.2$$

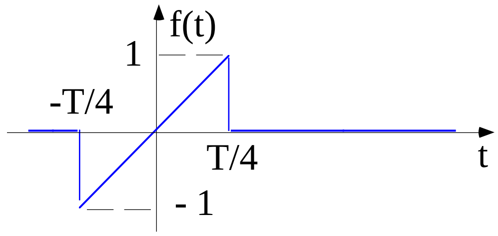
$$\Rightarrow \quad \left|H(j\omega)\right|_{\omega=10^6} = 0.45$$

$$\theta(\omega)_{\omega=10^6} = 26.6\ ^\circ$$

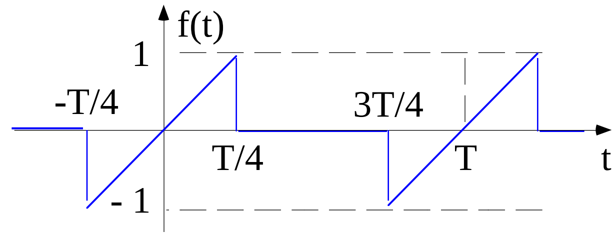
$$v_{o2}(t) = 0.45\cos(10^6 t + 26.6\ ^o)\ \text{V}$$

$$v_o(t) = v_{o1}(t) + v_{o2}(t) \approx v_{o2}(t)$$

Problema 5



Un pulso único.



Tren de pulsos periódicos de periodo T.

A (0.7 puntos) Obtened el desarrollo en serie de Fourier (formulación trigonométrica) de la función representada en la figura de la derecha.

B (0.7 puntos) Obtened la transformada de Fourier de la función representada en la figura de la izquierda.

C (0.6 puntos) Sabiendo que la transformada de Laplace de la función de transferencia de un circuito es

$$H(s) = \frac{10^6 s}{s^2 + 2 \times 10^6 s + 2 \times 10^{12}}$$

obtened la función que describe la variación con la frecuencia de dicha función de transferencia (respuesta en frecuencia), y calculad los valores a los que tienden el módulo y la fase de la respuesta en frecuencia cuando ésta tiende a valores muy bajos y muy altos.

Apartado A

El desarrollo en serie de Fourier con la formulación trigonométrica es

$$f(t) = a_v + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(k\omega_0 t - \varphi_k)$$

$$A_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2} \qquad \varphi_k = \text{arctg}\left(\frac{b_k}{a_k}\right)$$

$$a_v = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)dt \qquad a_k = \frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)\cos\left(\frac{2\pi k}{T}t\right)dt \qquad b_k = \frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)\,\text{sen}\left(\frac{2\pi k}{T}t\right)tdt$$

Para el periodo centrado en el origen la función representada en la figura de la derecha puede expresarse como

$-T/2 \le t \le -T/4$	$-T/4 \le t \le T/4$	$T/4 \le t \le T/2$
$f(t) = 0$	$f(t) = 4t/T$	$f(t) = 0$

Puede observarse que se trata de una función impar, ya que f(-t) = - f(t), con lo que

$$a_k = 0 \qquad \varphi_k = 90\,^{\circ} \qquad A_k = b_k$$

$$a_v = \frac{2}{T}\int_0^{T/2} f(t)dt = \frac{2}{T}\int_0^{T/4}\left(-\frac{4t}{T}+1\right)dt = \frac{2}{T}\left[-\frac{2t^2}{T}+t\right]_0^{T/4} = \frac{1}{2}$$

$$b_k = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(t)\mathrm{sen}\left(\frac{2\pi k}{T}t\right)dt = \frac{4}{T}\int_0^{T/4}\frac{4t}{T}\mathrm{sen}\left(\frac{2\pi k}{T}t\right)dt$$

Teniendo en cuenta que

$$\int t\,\mathrm{sen}(at)dt = \frac{\mathrm{sen}(at)}{a^2} - \frac{t\cos(at)}{a}$$

$$b_k = -\frac{16}{T^2}\left[\frac{\mathrm{sen}\left(\frac{2\pi k}{T}t\right)}{\left(\frac{2\pi k}{T}\right)^2} - \frac{t\cos\left(\frac{2\pi k}{T}t\right)}{\frac{2\pi k}{T}}\right]_0^{T/4} = \frac{4}{(\pi k)^2}\mathrm{sen}\left(\frac{\pi k}{2}\right) - \frac{4}{\pi k}\cos\left(\frac{\pi k}{2}\right)$$

con lo que el desarrollo en serie queda completamente definido.

Apartado B

$$F(\omega) = \mathcal{F}\{f(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt = \frac{4}{T}\int_{-T/4}^{T/4} te^{-j\omega t}dt$$

Teniendo en cuenta que

$$\int te^{at}dt = \frac{(at-1)e^{at}}{a^2}$$

$$F(\omega) = \frac{4}{T}\left[\frac{(1+j\omega t)e^{-j\omega t}}{\omega^2}\right]_{-T/4}^{T/4} = \frac{2}{\omega}\left[\mathrm{sen}\left(\frac{\omega T}{4}\right) - j\cos\left(\frac{\omega T}{4}\right)\right]$$

Apartado C

$$H(\omega) = \{H(s)\}_{s\,=\,j\omega} = \frac{j\omega}{(2 \times 10^{12} - \omega^2) + j2 \times 10^6\omega} = |H(\omega)|_{\angle\varphi(\omega)}$$

$$\omega \to 0 \text{ rad/s} \quad \Rightarrow \quad H(\omega) \to 0 \quad \Rightarrow \quad |H(\omega)| \to 0,\ \varphi(\omega) \to 90\ °$$

$$\omega \to \infty \text{ rad/s} \quad \Rightarrow \quad H(\omega) \to 0 \quad \Rightarrow \quad |H(\omega)| \to 0,\ \varphi(\omega) \to -\ 90\ °$$

Problema 6

Se dispone de un filtro cuya función de transferencia es

$$H(j\omega) = \frac{j10^6\omega}{(2 \times 10^{12} - \omega^2) + j2 \times 10^6\omega}$$

A (0.5 puntos) Indicad justificadamente de qué tipo de filtro se trata.

B (0.5 puntos) Calculad la frecuencia a la que se produce el máximo de la función de transferencia.

Apartado A

$$H(j\omega) = \frac{j10^6\omega}{(2 \times 10^{12} - \omega^2) + j2 \times 10^6\omega} \Rightarrow |H(j\omega)| = \frac{10^6\omega}{\sqrt{(2 \times 10^{12} - \omega^2)^2 + 4 \times 10^{12}\omega^2}}$$

Puede observarse que

$$\omega \to 0 \text{ rad/s} \quad \Rightarrow \quad |H(j\omega)| \to 0$$

$$\omega \to \infty \text{ rad/s} \quad \Rightarrow \quad |H(j\omega)| \to 0$$

Es decir, el filtro bloquea tanto las frecuencias altas como las bajas. Además, para frecuencias intermedias el módulo de la función de transferencia es mayor que 0. En consecuencia, se trata de un filtro paso banda.

Apartado B

$$|H(j\omega)| = \frac{10^6\omega}{\sqrt{\omega^4 + 4 \times 10^{24}}} \Rightarrow \frac{d|H(j\omega)|}{d\omega} = \frac{-3 \times 10^6\omega^4 + 4 \times 10^{30}}{(\omega^4 + 4 \times 10^{24})^{3/2}}$$

$$\max|H(j\omega)| \Rightarrow -3 \times 10^6\omega_{max}^4 + 4 \times 10^{30} = 0 \Rightarrow \omega_{max} = 1.07 \times 10^6 \text{ rad/s}$$

En el cálculo se ha prescindido de las soluciones negativas ya que carecen de significado físico.

En principio, la anulación de la derivada también podría corresponder a una situación de mínimo. Pero en un filtro paso banda no hay mínimos.