Análisis de circuitos

Ingeniería Técnica de Telecomunicación
(primer curso)

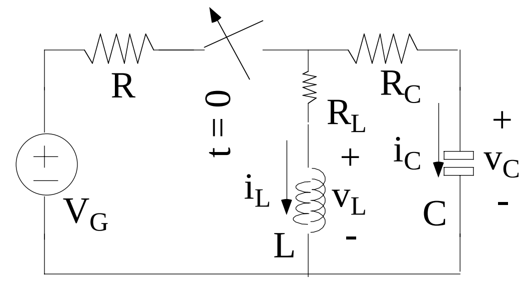
Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Telecomunicación
(Universidad de Vigo)

Examen de septiembre de 2008
(soluciones)

Preparado por:
Enrique Sánchez

Dpto. Teoría de la Señal y Comunicaciones
Universidad de Vigo

Problema 1



El circuito de la figura,
en el que la fuente independiente es continua,
ha permanecido mucho tiempo
en el mismo estado
antes del cambio de posición del interruptor.
Una vez producido éste,
el circuito ya no experimenta más cambios.

A (1.2 puntos) Obtened los valores de v_C, i_C, i_L y v_L para $t = 0^-$, 0^+ e ∞.

B (0.8 puntos) Suponiendo que $R = R_L = R_C$, obtened el coeficiente de amortiguamiento (α) y la frecuencia angular de resonancia (ω_0) del circuito. Para $R = \omega_0 L$, ¿cómo es la respuesta del circuito? ¿Supercrítica, crítica o subcrítica?

Apartado A

$t = 0^-$
(régimen continuo)

$$v_L(0^-) = 0\text{ V},\ i_C(0^-) = 0\text{ A}$$

Nudo
$$\frac{V_G - R(i_L + i_C) - v_L}{R_L} = i_L \Rightarrow \frac{V_G}{R_L} = i_L\left(1 + \frac{R}{R_L}\right) \Rightarrow i_L(0^-) = \frac{V_G}{R + R_L}$$

Elementos en paralelo
$$Ri_C + v_C = V_G - R(i_L + i_C) = \frac{R_L}{R + R_L}V_G = v_C(0^-)$$

$t = 0^+$
(régimen transitorio)

$$i_L(0^+) = i_L(0^-) = \frac{V_G}{R + R_L},\ v_C(0^+) = v_C(0^-) = \frac{R_L}{R + R_L}V_G$$

Continuidad en elementos reactivos

Malla
$$i_C(0^+) = -i_L(0^+) = -\frac{V_G}{R + R_L}$$

Malla
$$v_L(0^+) = (R_L + R_C)i_C(0^+) + v_C(0^+) = -\frac{R_C V_G}{R + R_L}$$

$t = \infty$ (régimen continuo)	$v_L(\infty) = 0$ V, $i_C(\infty) = 0$ A	
	$i_L(\infty) = 0$ A, $v_C(\infty) = 0$ V	Elementos reactivos desconectados

Apartado B

Para $0 < t < \infty$, el circuito queda caracterizado por las ecuaciones que se indican seguidamente (en las que se han utilizado los datos del enunciado).

Malla $$i_L = -i_C \tag{1}$$

Malla $$Ri_L + v_L = Ri_C + v_C \tag{2}$$

Despejando i_L de (1) y sustituyendo el resultado en (2), se obtiene

$$LC\frac{d^2v_C}{dt^2} + 2RC\frac{dv_C}{dt} + v_C = 0$$

Para i_L se obtendría una ecuación formalmente similar a la indicada, con lo que, teniendo en cuenta la definición de ecuación característica, se llega a los siguientes resultados:

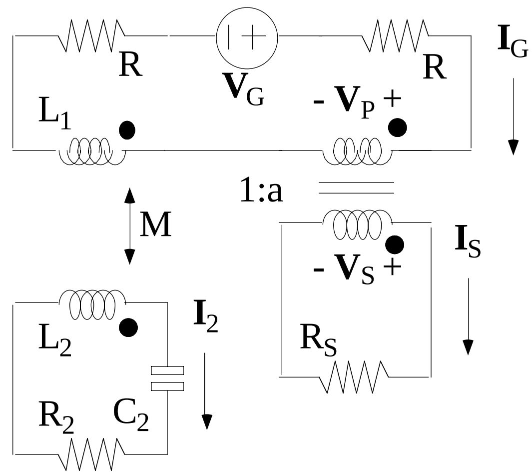
$$a = LC \qquad b = 2RC \qquad c = 1$$

$$\alpha = \frac{b}{2a} = \frac{R}{L} \qquad \omega_0 = \frac{c}{a} = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Utilizando las dos últimas expresiones y el valor de R indicado en el enunciado, se tiene

$$\alpha = \frac{\omega_0 L}{L} = \omega_0 \Rightarrow \text{respuesta crítica}$$

Problema 2



El circuito de la figura, en cuya representación se ha utilizado notación fasorial, funciona en régimen sinusoidal permanente a una frecuencia angular ω.

$$a = 5$$

$$\omega L_1 = 4\ \Omega,\ \omega L_2 = 2\ \Omega,\ \omega M = 1\ \Omega,\ (\omega C_2)^{-1} = 2\ \Omega$$

$$R = 1\ \Omega,\ R_2 = 1\ \Omega,\ R_S = 25\ \Omega$$

A (1 punto) Formulad un sistema algebraico (sin utilizar los datos numéricos) de cinco ecuaciones a partir del cual sea posible obtener los valores de $\mathbf{I}_G$, $\mathbf{I}_S$, $\mathbf{I}_2$, $\mathbf{V}_P$ y $\mathbf{V}_S$.

B (1 punto) La excitación sinusoidal es sustituida por $v_g(t) = V_D + V_A\cos(\omega t + \varphi)$, siendo $V_D = 2$ V, $V_A = 4(2)^{0.5}$ V y $\varphi = 45º$. Para los restantes elementos son aplicables los datos anteriores. Obtened la expresión temporal de la potencia en R (cualquiera de ellas).

Apartado A

Mallas

$$\mathbf{V}_G = \mathbf{I}_G(R + R + j\omega L_1) + \mathbf{V}_P - \mathbf{I}_2 j\omega M$$

$$0 = -\mathbf{I}_G j\omega M + \mathbf{I}_2\left(j\omega L_2 + \frac{1}{j\omega C_2} + R_2\right)$$

$$\mathbf{V}_S = \mathbf{I}_S R_S$$

Ecuaciones del transformador ideal

$$\mathbf{V}_S = a\mathbf{V}_P$$

$$\mathbf{I}_G = a\mathbf{I}_S$$

Apartado B

El circuito está sometido a la combinación de dos excitaciones (una continua y otra sinusoidal), con lo que la expresión temporal de la potencia en R será

$$p_R(t) = i_g^2(t)R = [I_{GD} + \mathrm{Re}\{\mathbf{I}_{GA}e^{j\omega t}\}]^2 R \qquad \mathbf{I}_{GA} = I_{GA\angle\theta}$$

Considerando el régimen sinusoidal, reflejando impedancias y utilizando los datos del enunciado, se obtiene

$$\mathbf{I}_{GA} = \frac{\mathbf{V}_{A\angle\varphi}}{2R + j\omega L_1 + \dfrac{(\omega M)^2}{j\omega L_2 + \dfrac{1}{j\omega C_2} + R_2} + \dfrac{R_S}{a^2}} = 1\ \mathrm{A} \quad \Rightarrow \quad I_{GA} = 1\ \mathrm{A},\ \theta = 0^{\circ}$$

Por otro lado, en régimen continuo (las inductancias son cortocircuitos) se tiene

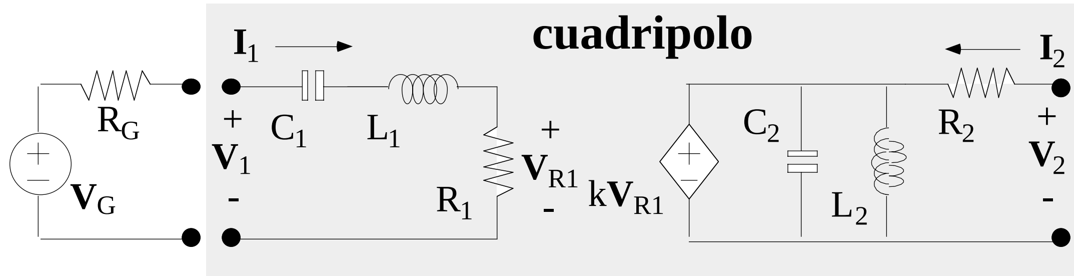
$$I_{GD} = \frac{V_D}{2R} = 1\ \mathrm{A}$$

En consecuencia, la expresión buscada es

$$p_R(t) = [1 + \cos(\omega t)]^2\ \mathrm{W}$$

Problema 3

Dado el circuito de la figura,
en cuya representación se ha utilizado notación fasorial,



A (0.5 puntos) Obtened los parámetros de transmisión del cuadripolo en régimen sinusoidal permanente. El cuadripolo ¿es simétrico?, ¿es recíproco?

B (0.5 puntos) Con el circuito completo, obtened el equivalente Thèvenin en la puerta de salida. Suponed que se conocen los parámetros de transmisión del cuadripolo.

Apartado A

Los parámetros de transmisión en régimen sinusoidal permanente se definen mediante las expresiones

$$\mathbf{V}_1 = \mathbf{V}_2 a - \mathbf{I}_2 b \qquad\qquad \mathbf{I}_1 = \mathbf{V}_2 c - \mathbf{I}_2 d \tag{1}$$

Se utiliza la siguiente nomenclatura:

$$Z_1 = R_1 + \frac{1}{j\omega C_1} + j\omega L_1 \tag{2}$$

Utilizando estas expresión, en el circuito se verifican las siguientes relaciones:

$$\text{Mallas} \quad \begin{array}{c} \mathbf{V}_1 = \mathbf{I}_1 Z_1 \\ k\mathbf{I}_1 R_1 = k\mathbf{V}_{R1} = \mathbf{V}_2 - \mathbf{I}_2 R_2 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{c} \mathbf{V}_1 = \dfrac{\mathbf{V}_2 Z_1}{kR_1} - \dfrac{\mathbf{I}_2 R_2 Z_1}{kR_1} \\ \mathbf{I}_1 = \dfrac{\mathbf{V}_2}{kR_1} - \dfrac{\mathbf{I}_2 R_2}{kR_1} \end{array} \tag{3}$$

Comparando estas expresiones con (1), se obtiene

$$a = \frac{Z_1}{kR_1} \qquad b = \frac{R_2 Z_1}{kR_1} \qquad c = \frac{1}{kR_1} \qquad d = \frac{R_2}{kR_1}$$

Para que sea recíproco ha de cumplirse ad - bc = 1. En este caso, el resultado de esta operación es 0, con lo que el cuadripolo no es recíproco y, por tanto, tampoco es simétrico.

Apartado B

En el circuito completo se verifican las siguientes relaciones:

$$\mathbf{V}_G = \mathbf{I}_1 R_G + \mathbf{V}_1 \tag{4}$$

$$\mathbf{V}_1 = \mathbf{V}_2 a - \mathbf{I}_2 b \tag{5}$$

$$\mathbf{I}_1 = \mathbf{V}_2 c - \mathbf{I}_2 d \tag{6}$$

Con el circuito completo, tal y como está dibujado en el enunciado, la salida está en circuito abierto, con lo que $\mathbf{I}_2 = 0$ A. En ese caso, las relaciones (4-6) conducen a

$$\mathbf{V}_G = \mathbf{V}_2 c R_G + \mathbf{V}_2 a \Rightarrow \mathbf{V}_2 = \frac{\mathbf{V}_G}{a + cR_G} = \mathbf{V}_{Th}$$

Con el circuito completo y la salida en cortocircuito, $\mathbf{V}_2 = 0$ V. En ese caso, las relaciones (4-6) conducen a

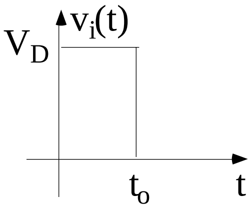
$$\mathbf{V}_G = - \mathbf{I}_2 d R_G - \mathbf{I}_2 b \Rightarrow \mathbf{I}_2 = - \frac{\mathbf{V}_G}{b + dR_G} = - \mathbf{I}_N$$

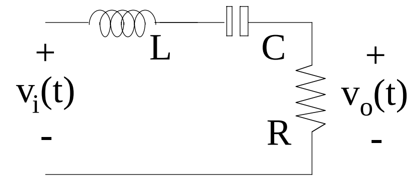
En consecuencia,

$$Z_{Th} = \frac{\mathbf{V}_{Th}}{\mathbf{I}_N} = \frac{b + dR_G}{a + cR_G}$$

Problema 4

El circuito de la derecha es sometido a la excitación representada a la izquierda.





A (0.5 puntos) Obtened la transformada de Laplace de la excitación.

B (1 punto) Obtened la expresión temporal de la tensión de salida, sabiendo que su transformada de Laplace es

$$V_o(s) = \frac{5\times10^4(1 - e^{-10^{-4}s})}{s^2 + 5\times10^4 s + 4\times10^8}$$

C (1 punto) Dado un circuito cuya función de transferencia es $h(t) = e^{-t} - e^{-4t}$, obtened la expresión temporal de la tensión de salida en régimen sinusoidal permanente cuando la entrada es $v_i(t) = \cos(t) + 2\cos(2t)$ V.

Apartado A

Matemáticamente, la excitación se caracteriza como

$v_i(t) = V_D$ para $0 \le t \le t_o$ $\qquad$ $v_i(t) = 0$ para cualquier otro valor de t

con lo que, aplicando la definición de transformada de Laplace, se tiene

$$V_i(s) = \mathcal{L}\{v_i(t)\} = \int_0^{t_o} V_D e^{-st}dt = \frac{V_D}{s} - \frac{V_D e^{-st_o}}{s}$$

Al mismo resultado se llega considerando la excitación como combinación de dos funciones escalón (una de ellas desplazada) y aplicando las tablas de transformadas de Laplace.

Apartado B

$$V_o(s) = Y_o(s) - Y_o(s)e^{-st_o},\ t_o = 10^{-4}\text{ s} \qquad Y_o(s) = \frac{5\times10^4}{s^2 + 5\times10^4 s + 10^8}$$

$$s^2 + 5\times10^4 s + 4\times10^8 = 0 \;\Rightarrow\; s_{1,2} = \frac{-5\times10^4 \pm \sqrt{25\times10^8 - 16\times10^8}}{2} \;\Rightarrow\; \begin{cases} s_1 = -10^4\ s^{-1} \\ s_2 = -4\times10^4\ s^{-1} \end{cases}$$

$$Y_o(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{5\times10^4}{(s + 10^4)(s + 4\times10^4)} = \frac{K_1}{s + 10^4} + \frac{K_2}{s + 4\times10^4}$$

$$K_1 = \{Y_o(s)(s + s_1)\}_{s=s_1} = \left\{\frac{N(s)}{s + s_2}\right\}_{s=s_1} = 1.67\ s^{-1}$$

$$K_2 = \{Y_o(s)(s + s_2)\}_{s=s_2} = \left\{\frac{N(s)}{s + s_1}\right\}_{s=s_2} = -1.67\ s^{-1}$$

$$y_o(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y_o(s)\} = 1.67(e^{-10^4 t} - e^{-4\times10^4 t})$$

$$\mathcal{L}^{-1}\{e^{-st_o}F(s)\} = f(t - t_o)u(t - t_o) \;\Rightarrow\; \mathcal{L}^{-1}\{e^{-st_o}Y_o(s)\} = y_o(t - t_o)u(t - t_o) =$$
$$= 1.67[e^{-10^4(t - t_o)} - e^{-4\times10^4(t - t_o)}]u(t - t_o)$$

$$v_o(t) = y_o(t) - y_o(t - t_o) = 1.67(e^{4\times10^4 t_o} - e^{10^4 t_o})\ V$$

Apartado C

La expresión temporal de la respuesta en régimen sinusoidal permanente de un circuito de función de transferencia $H(s)$ y sometido a una excitación sinusoidal de la forma $x(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$ está dada por

$$y(t) = A|H(j\omega)|\cos[\omega t + \varphi + \theta(\omega)] \qquad |H(j\omega)| = \{|H(s)|\}_{s=j\omega},\ \theta(\omega) = \{\angle H(s)\}_{s=j\omega}$$

$$H(s) = \mathcal{L}\{h(t)\} = \frac{1}{s + 1} - \frac{1}{s + 4} = \frac{3}{s^2 + 5s + 4} \;\Rightarrow\; \begin{cases} |H(j\omega)| = \dfrac{3}{\sqrt{(4 - \omega^2)^2 + 25\omega^2}} \\ \theta(\omega) = 0^{\circ} - \mathrm{arctg}\dfrac{5\omega}{4 - \omega^2} \end{cases}$$

$$\omega = \omega_1 = 1\ \text{rad/s},\ A_1 = 1,\ \varphi_1 = 0^{\circ} \;\Rightarrow\; y_1(t) = \frac{3}{\sqrt{34}}\cos(\omega_1 t - \mathrm{arctg}(5/3))\ V$$

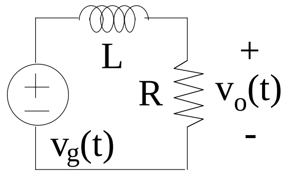
$$\omega = \omega_2 = 2\ \text{rad/s},\ A_2 = 2\ V,\ \varphi_2 = 0^{\circ} \;\Rightarrow\; y_2(t) = 0.6\cos(\omega_2 t - 90^{\circ})\ V$$

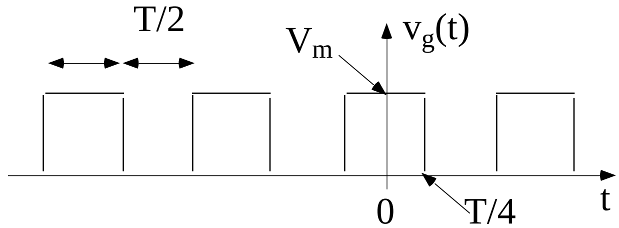
$$y(t) = y_1(t) + y_2(t)$$

Problema 5

$R = 1\ \Omega$, $L = 1$ H

$T = 1$ s, $V_m = 1$ V

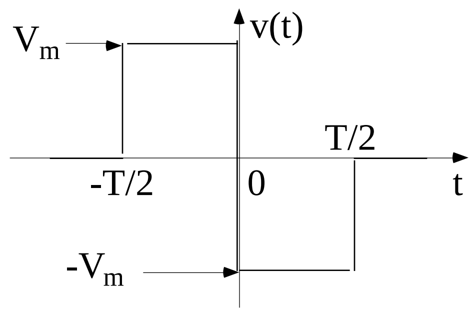




A (0.75 puntos) La excitación del circuito de la izquierda es el tren periódico de pulsos mostrado en la figura de la derecha. Obtened $v_o(t)$.

B (0.75 puntos) Obtened la transformada de Fourier del pulso de tensión mostrado en la figura de la derecha.

$V_m = 1$ V, $T = 2\pi$ s



Apartado A

La excitación es una función par ya que $v_g(t) = -v_g(t)$. En consecuencia, teniendo en cuenta que $\omega=2\pi T$,

$$a_v = \frac{2}{T}\int_0^{T/2} v_g(t)dt = \frac{2}{T}\int_0^{T/4} V_m dt = 0.5\ \text{V}$$

$$a_k = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} v_g(t)\cos\left(\frac{2\pi kt}{T}\right)dt = \frac{4}{T}\int_0^{T/4} v_g(t)\cos\left(\frac{2\pi kt}{T}\right)dt = \frac{2V_m}{\pi k}\text{sen}\left(\frac{\pi k}{2}\right) = \frac{2}{\pi k}\text{en}\left(\frac{\pi k}{2}\right)\ \text{V}$$

$$b_k = 0\ \text{V}$$

$$A_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2} = a_k \qquad \varphi_k = \text{arctg}\left(\frac{b_k}{a_k}\right) = 0^o$$

$$v_g(t) = a_v + \sum_{k=1}^{\infty} A_k\cos\left(\frac{2\pi kt}{T} - \varphi_k\right) = v_{gDC} + v_{gAC}(t)$$

Es decir, el tren de pulsos tiene una componente continua y múltiples componentes sinusoidales (una para cada valor de k).

Para calcular la componente continua de la respuesta puede observarse que la inductancia se comporta como un cortocircuito con lo que

$$v_{oDC} = v_{gDC} = a_v = 0.5 \text{ V}$$

Para la componente correspondiente a un valor (cualquiera) de k se utiliza la notación fasorial, con lo que el fasor correspondiente a la componente en cuestión es

$$\mathbf{A}_k = A_{k\angle\varphi_k} = A_k = a_k = \frac{2}{\pi k}\text{sen}\left(\frac{\pi k}{2}\right) \text{V}$$

El circuito es un divisor de tensión, con lo que

$$\mathbf{V}_{oAC}(k) = \frac{R}{R + j\frac{2\pi kL}{T}}\mathbf{A}_k \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad |\mathbf{V}_{oAC}(k)| = \frac{R}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{2\pi kL}{T}\right)^2}}A_k = \frac{a_k}{\sqrt{1 + (2\pi k)^2}} \qquad \theta_k = -\text{ arctg}\left(\frac{2\pi kL}{TR}\right) = 180\text{ º}$$

En consecuencia, la expresión temporal correspondiente a la componente considerada es

$$v_{oAC}(t) = \text{Re}\left\{\mathbf{V}_{oAC}e^{j\left(\frac{2\pi kt}{T} - \theta\right)}\right\} = \frac{a_k}{\sqrt{1 + (2\pi k)^2}}\cos(2\pi kt - 180\text{ º}) \text{ V}$$

Sumando todas las componentes se tiene

$$v_o(t) = 0.5 + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\frac{2}{\pi k}\text{sen}\left(\frac{\pi k}{2}\right)}{\sqrt{1 + (2\pi k)^2}}\cos(2\pi kt - 180\text{ º}) \text{ V}$$

Apartado B

De acuerdo con la definición de transformada de Fourier

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt = \int_{-T/2}^{0} V_m e^{-j\omega t}dt - \int_{0}^{T/2} V_m e^{-j\omega t}dt =$$

$$= \frac{jV_m}{\omega}\left[e^{-j\omega t}\right]_{-T/2}^{0} + \frac{jV_m}{\omega}\left[e^{-j\omega t}\right]_{0}^{T/2} = \frac{j2V_m}{\omega} - \frac{jV_m}{\omega}\left(e^{j\omega T/2} + e^{-j\omega T/2}\right) =$$

$$= \frac{j2V_m}{\omega}\left[1 - \cos(\omega T/2)\right] = \frac{j2}{\omega}\left[1 - \cos(\pi\omega)\right]$$

Problema 6

Se tiene un filtro cuya característica de transferencia es

$$H(s) = \frac{s^2 + 0.5\times10^6 s}{3s^2 + 3\times10^6 s + 10^{12}}$$

A (0.5 puntos) Indicad justificadamente de qué tipo es el filtro.

B (0.5 puntos) Calculad la(s) frecuencia(s) que limita(n) la banda de paso del filtro. ¿Cuánto vale(n) la(s) atenuación(es) para dicha(s) frecuencia(s)?

Apartado A

$$H(j\omega) = \{H(s)\}_{s=j\omega} = \frac{-\omega^2 + j0.5\times10^6\omega}{(10^{12} - 3\omega^2) + j3\times10^6\omega} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |H(j\omega)| = \frac{\sqrt{(-\omega^2)^2 + (0.5\times10^6\omega)^2}}{\sqrt{(10^{12} - 3\omega^2)^2 + (3\times10^6\omega)^2}}$$

$$\left.\begin{array}{l} \omega \to 0 \Rightarrow |H(j\omega)| \to 0 \\ \omega \to \infty \Rightarrow |H(j\omega)| \to \dfrac{1}{3} \end{array}\right| \Rightarrow$$

Características de un filtro paso alto

Apartado B

Aplicando la definición de frecuencia de corte, se tiene

$$\omega = \omega_c \Rightarrow \{|H(j\omega)|\}_{\omega=\omega_c} = \frac{\{|H(j\omega)|\}_{max}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{3\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{\omega_c^4 + 0.25\times10^{12}\omega_c^2}{9\omega_c^4 + 3\times10^{12}\omega_c^2 + 10^{24}}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \omega_c^2 = 0.26\times10^{12} \Rightarrow \omega_c = 0.51\times10^6 \text{ rad/s}$$

En el cálculo de la frecuencia de corte se prescinde de los resultados negativos, ya que carecen de sentido físico.

$$A_c = -20\log\{|H(j\omega)|\}_{\omega=\omega_c} = 12.55 \text{ dB}$$