Análisis de circuitos

Ingeniería Técnica de Telecomunicación
(primer curso)

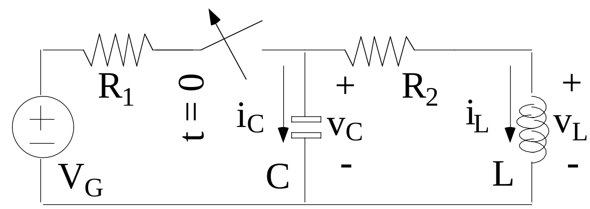
Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Telecomunicación
(Universidad de Vigo)

Examen de diciembre de 2008
(soluciones)

Preparado por:
Enrique Sánchez

Dpto. Teoría de la Señal y Comunicaciones
Universidad de Vigo

Problema 1



El circuito de la figura,
en el que la fuente independiente es continua,
ha permanecido mucho tiempo
en el mismo estado
antes del cambio de posición del interruptor.
Una vez producido éste,
el circuito ya no experimenta más cambios.

A (1.2 puntos) Obtened los valores de v_C, i_C, i_L y v_L, para $t = 0^-$, 0^+ e ∞.

B (0.8 puntos) Obtened el coeficiente de amortiguamiento (α) y la frecuencia angular de resonancia (ω_0) del circuito. Para $R_2 = 1/(\omega_0 C)$, ¿cómo es la respuesta del circuito? ¿Supercrítica, crítica o subcrítica?

Apartado A

$t = 0^-$
(régimen continuo)

$$v_L(0^-) = 0 \text{ V},\ i_C(0^-) = 0 \text{ A}$$

Malla $V_G = R_1(i_L + i_C) + R_2 i_L + v_L \Rightarrow$

$$\Rightarrow i_L(0^-) = \frac{V_G}{R_1 + R_2}$$

Malla $$v_C(0^-) = R_2 i_L(0^-) + v_L(0^-) = \frac{R_2 V_G}{R_1 + R_2}$$

$t = 0^+$
(régimen transitorio)

$$i_L(0^+) = i_L(0^-) = \frac{V_G}{R_1 + R_2},\ v_C(0^+) = v_C(0^-) = \frac{R_2 V_G}{R_1 + R_2}$$

Continuidad en elementos reactivos

Malla $$i_C(0^+) = -i_L(0^+) = -\frac{V_G}{R_1 + R_2}$$

Malla $$v_L(0^+) = v_C(0^+) - R_2 i_L(0^+) = 0$$

$t = \infty$ (régimen continuo) $\quad v_L(\infty) = 0$ V, $i_C(\infty) = 0$ A

$i_L(\infty) = 0$ A, $v_C(\infty) = 0$ V $\quad$ Elementos reactivos desconectados

Apartado B

Para $0 < t < \infty$, el circuito queda caracterizado por las ecuaciones que se indican seguidamente.

Malla $\quad i_L = -i_C \quad (1)$

Malla $\quad v_C = R_2 i_C + v_L \quad (2)$

Despejando i_C de (1) y sustituyendo el resultado en (2), se obtiene

$$LC\frac{d^2 i_L}{dt^2} + R_2 C\frac{di_L}{dt} + i_L = 0$$

Para v_C se obtendría una ecuación formalmente similar a la indicada, con lo que, teniendo en cuenta la definición de ecuación característica, se llega a los siguientes resultados:

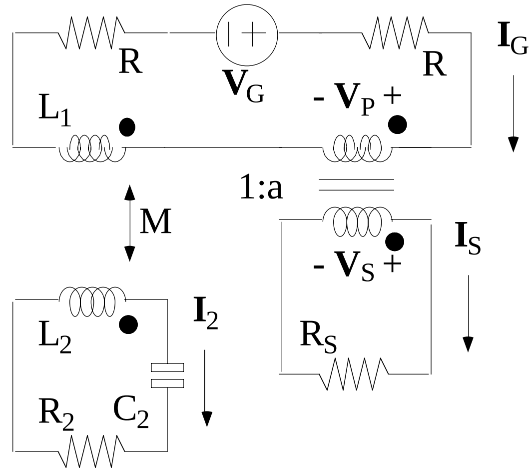
$$a = LC \qquad b = R_2 C \qquad c = 1$$

$$\alpha = \frac{b}{2a} = \frac{R_2}{2L} \qquad \omega_0 = \frac{c}{a} = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Utilizando las dos últimas expresiones y el valor de R_2 indicado en el enunciado, se tiene

$$\alpha = \frac{R_2}{2L} = \frac{1}{2\omega_0 LC} = \frac{1}{2\sqrt{LC}} < \frac{1}{\sqrt{LC}} = \omega_0 \Rightarrow \text{respuesta subcrítica}$$

Problema 2



El circuito de la figura, en cuya representación se ha utilizado notación fasorial, funciona en régimen sinusoidal permanente a una frecuencia angular ω.

$$a = 5$$

$$\omega L_1 = 4\ \Omega,\ \omega L_2 = 2\ \Omega,\ \omega M = 1\ \Omega,\ (\omega C_2)^{-1} = 2\ \Omega$$

$$R = 1\ \Omega,\ R_2 = 1\ \Omega,\ R_S = 25\ \Omega$$

A (1 punto) Formulad un sistema algebraico (sin utilizar los datos numéricos) de cinco ecuaciones a partir del cual sea posible obtener los valores de $\mathbf{I}_G$, $\mathbf{I}_S$, $\mathbf{I}_2$, $\mathbf{V}_P$ y $\mathbf{V}_S$.

B (1 punto) La excitación sinusoidal es sustituida por $v_g(t) = V_D + V_A\cos(\omega t + \varphi)$, siendo $V_D = 2$ V, $V_A = 4(2)^{0.5}$ V y $\varphi = 45º$. Para los restantes elementos son aplicables los datos anteriores. Obtened la expresión temporal de la potencia en R (cualquiera de ellas).

Apartado A

Mallas

$$\mathbf{V}_G = \mathbf{I}_G(R + R + j\omega L_1) + \mathbf{V}_P - \mathbf{I}_2 j\omega M$$

$$0 = -\mathbf{I}_G j\omega M + \mathbf{I}_2\left(j\omega L_2 + \frac{1}{j\omega C_2} + R_2\right)$$

$$\mathbf{V}_S = \mathbf{I}_S R_S$$

Ecuaciones del transformador ideal

$$\mathbf{V}_S = a\mathbf{V}_P$$

$$\mathbf{I}_S = a\mathbf{I}_P$$

Apartado B

El circuito está sometido a la combinación de dos excitaciones (una continua y otra sinusoidal), con lo que la expresión temporal de la potencia en R será

$$p_R(t) = i_g^2(t)R = [I_{GD} + \mathrm{Re}\{\mathbf{I}_{GA}e^{j\omega t}\}]^2 R \qquad \mathbf{I}_{GA} = I_{GA\angle\theta}$$

Considerando el régimen sinusoidal, reflejando impedancias y utilizando los datos del enunciado, se obtiene

$$\mathbf{I}_{GA} = \frac{\mathbf{V}_{A\angle\varphi}}{2R + j\omega L_1 + \dfrac{(\omega M)^2}{j\omega L_2 + \dfrac{1}{j\omega C_2} + R_2} + \dfrac{R_S}{a^2}} = 1\ \mathrm{A} \quad \Rightarrow \quad I_{GA} = 1\ \mathrm{A},\ \theta = 0^{\circ}$$

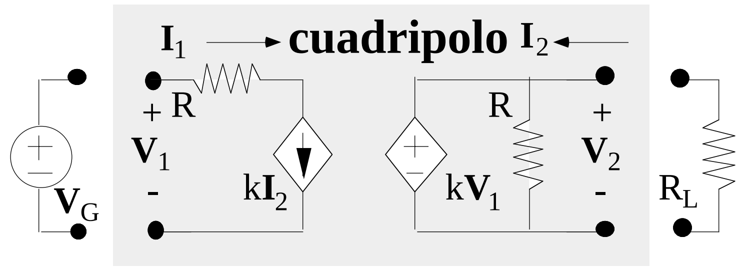
Por otro lado, en régimen continuo (las inductancias son cortocircuitos) se tiene

$$I_{GD} = \frac{V_D}{2R} = 1\ \mathrm{A}$$

En consecuencia, la expresión buscada es

$$p_R(t) = [1 + \cos(\omega t)]^2\ \mathrm{W}$$

Problema 3



El circuito de la figura,
en cuya representación se ha utilizado notación fasorial, funciona en régimen sinusoidal permanente
a una frecuencia angular ω.

A (0.5 puntos) Obtened los parámetros híbridos (h) del cuadripolo. A la vista de tales parámetros, indicad qué dispositivo eléctrico es representado por tal cuadripolo.

B (0.5 puntos) ¿Cuánto vale la tensión en la fuente dependiente de corriente cuando el circuito tiene la configuración indicada en la figura?

Apartado A

Los parámetros híbridos (h) se definen mediante las expresiones

Fasores en caso de régimen sinusoidal $\quad V_1 = I_1 h_{11} + V_2 h_{12} \qquad I_2 = I_1 h_{21} + V_2 h_{22} \qquad (1)$

En el circuito se cumplen las siguientes relaciones:

$$\mathbf{I}_1 = k\mathbf{I}_2 \Rightarrow \mathbf{I}_2 = \frac{\mathbf{I}_1}{k} \qquad \mathbf{V}_2 = k\mathbf{V}_1 \Rightarrow \mathbf{V}_1 = \frac{\mathbf{V}_2}{k}$$

de las que se deduce que el cuadripolo se comporta como un transformador ideal con una relación de transformación igual a k.

Por otro lado, comparando estas expresiones con (1), se obtiene

$$h_{11} = 0\ \Omega \qquad h_{12} = \frac{1}{k} \qquad h_{21} = \frac{1}{k} \qquad h_{22} = 0\ \mathrm{S}$$

Apartado B

En el circuito se cumplen las relaciones

$$\mathbf{V}_G = \mathbf{V}_1 \qquad \begin{aligned}\mathbf{V}_1 &= \mathbf{I}_1 h_{11} + \mathbf{V}_2 h_{12} = \\ &= \mathbf{V}_2 h_{12} = \frac{\mathbf{V}_2}{k}\end{aligned} \qquad \begin{aligned}\mathbf{I}_2 &= \mathbf{I}_1 h_{21} + \mathbf{V}_2 h_{22} = \\ &= \mathbf{I}_1 h_{21} = \frac{\mathbf{I}_1}{k}\end{aligned} \qquad \mathbf{V}_2 = -\mathbf{I}_2 R_L$$

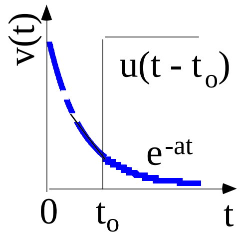
Utilizando estas relaciones y denominando $\mathbf{V}_D$ a la tensión en la fuente dependiente de corriente (negativa en el extremo por donde sale la corriente), se tiene

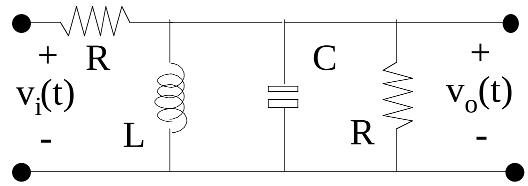
$$\mathbf{V}_G = \mathbf{I}_1 R + \mathbf{V}_D = k\mathbf{I}_2 R + \mathbf{V}_D = -\frac{kR\mathbf{V}_2}{R_L} + \mathbf{V}_D = -\frac{k^2R\mathbf{V}_1}{R_L} + \mathbf{V}_D = -\frac{k^2R\mathbf{V}_G}{R_L} + \mathbf{V}_D \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathbf{V}_D = \left(1 + \frac{k^2R}{R_L}\right)\mathbf{V}_G$$

Problema 4

El circuito de la derecha es sometido a la excitación representada a la izquierda.





A (0.75 puntos) Obtened la transformada de Laplace de la excitación, definida como $v_i(t) = e^{-at}u(t - t_o)$, y la función de transferencia, $H(s) = V_o(s)/V_i(s)$ ($V_o(s) = \mathcal{L}\{v_o(t)\}$, $V_i(s) = \mathcal{L}\{v_i(t)\}$), del circuito representado en la figura. Suponed $R = 2\ \Omega$, $L = 2$ mH y $C = 0.5$ mF.

B (1.25 puntos) Suponiendo que en un circuito

$$V_i(s) = \frac{1}{e}\,\frac{e^{-0.5\times 10^{-3}s}}{s + 2\times 10^3} \qquad\qquad H(s) = \frac{10^3 s}{s^2 + 2\times 10^3 s + 10^6}$$

hallad la expresión temporal de la tensión de salida.

C (0.5 puntos) La función de transferencia de un circuito en el dominio temporal es $-\mathrm{tg}(10^3 t)$. Si la entrada del circuito es $v_i(t) = \cos(10^3 t)$ V, obtened la expresión temporal de la salida en régimen sinusoidal permanente.

Apartado A

Matemáticamente, la excitación se caracteriza como

$$v_i(t) = e^{-at} \text{ para } t \geq t_o \qquad\qquad v_i(t) = 0 \text{ para cualquier otro valor de } t$$

con lo que, aplicando la definición de transformada de Laplace, se tiene

$$V_i(s) = \mathcal{L}\{v_i(t)\} = \int_{t_o}^{\infty} e^{-at}e^{-st}dt = \int_{t_o}^{\infty} e^{-(s + a)t}dt = \frac{e^{-(s + a)t_o}}{s + a} = e^{-at_o}\frac{e^{-st_o}}{s + a}$$

Expresando el circuito en términos de transformada de Laplace (las inductancias son sustituidas por sL y las capacidades por 1/(sC)), se tiene (tras agrupar los elementos en paralelo y observar que el circuito es un divisor de tensión), utilizando los datos del enunciado,

$$\frac{1}{Z(s)} = \frac{1}{sL} + sC + \frac{1}{R} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow H(s) = \frac{Z(s)}{R + Z(s)} = \frac{1}{\frac{R}{Z(s)} + 1} = \frac{\frac{s}{RC}}{s^2 + \frac{2s}{RC} + \frac{1}{LC}} = \frac{10^3 s}{s^2 + 2\times10^3 s + 10^6}$$

Apartado B

Haciendo $t_o = 0.5 \times 10^{-3}$ s y descomponiendo la transformada de salida en sus distintas partes, se tiene

$$V_o(s) = H(s)V_i(s) = \frac{1}{e}\,\frac{10^3 s \times e^{-st_o}}{(s + 2\times10^3)(s^2 + 2\times10^3 s + 10^6)} = \frac{1}{e}Y(s)e^{-st_o}$$

$$Y(s) = \frac{2\times10^3 s}{(s + 2\times10^3)(s^2 + 2\times10^3 s + 10^6)}$$

Es decir, la transformada es el producto de una constante, una segunda transformada y el coeficiente de desplazamiento temporal de esta segunda transformada.

Las raíces de Y(s) son $s_3 = -2\text{x}10^3\ s^{-1}$ y las que anulan el denominador de Y(s).

$$s^2 + 2\times10^3 s + 10^6 = 0 \quad \Rightarrow \quad s_{1,2} = \frac{-2\times10^3 \pm \sqrt{4\times10^6 - 4\times10^6}}{2} \;\Bigg|\; \Rightarrow \quad \begin{array}{c} s_1 = -10^3\ s^{-1} = s_2 \\ \text{raíz doble} \end{array}$$

$$Y(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{K_1}{s + 10^3} + \frac{K_2}{(s + 10^3)^2} + \frac{K_3}{s + 2\times10^3}$$

$$K_1 = \left\{\frac{d}{ds}[Y(s)(s + s_1)^2]\right\}_{s=s_1} = \left\{\frac{d}{ds}\left[\frac{10^3 s}{(s + 2\times10^3)}\right]\right\}_{s=-10^3} = \left\{\frac{10^3(s + 2\times10^3) - 10^3 s}{(s + 2\times10^3)^2}\right\}_{s=-10^3} = 2\ s^{-1}$$

$$K_2 = \left\{Y(s)(s + s_1)^2\right\}_{s=s_1} = \left\{\frac{10^3 s}{s + 2\times10^3}\right\}_{s=-10^3} = -10^3\ s^{-2}$$

$$K_3 = \left\{Y(s)(s + s_3)\right\}_{s=s_3} = \left\{\frac{10^3 s}{(s + 10^3)^2}\right\}_{s=-10^3} = -2\ s^{-1}$$

$$v_o(t) = \frac{1}{e}\mathcal{L}^{-1}\{e^{-st_o}Y(s)\} = \frac{1}{e}y(t - t_o) = \frac{1}{e}\mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\}_{t\to t-t_o} =$$

$$= \frac{1}{e}\left[2e^{-10^3(t-t_o)} - 10^3(t - t_o)e^{-10^3(t-t_o)} - 2e^{-2\times10^3(t-t_o)}\right]$$

Apartado C

La entrada del circuito puede escribirse como

$$v_i(t) = A\cos(\omega t + \varphi) \qquad \Rightarrow \qquad A = 1\text{ V},\ \omega = 10^3\text{ rad/s},\ \varphi = 0^{\circ}$$

La función de transferencia en el dominio s se obtiene como sigue.

$$H(s) = \mathcal{L}\{-\mathrm{tg}(10^3 t\} = -\frac{\mathcal{L}\{\mathrm{sen}(10^3 t\}}{\mathcal{L}\{\cos(10^3 t\}} = -\frac{\dfrac{\omega}{s^2+\omega^2}}{\dfrac{s}{s^2+\omega^2}} = -\frac{\omega}{s}$$

Particularizando esta función para s=jω, se tiene

$$H(j\omega) = \{H(s)\}_{s=j\omega} = -\frac{\omega}{j\omega} = j \qquad \Rightarrow \qquad |H(j\omega)| = 1,\ \varphi = 90^{\circ}$$

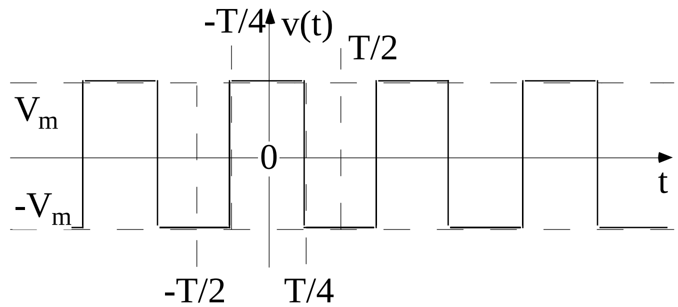
La expresión temporal de la salida es

$$v_o(t) = A|H(j\omega)|\cos[\omega t + \varphi + \theta(\omega)] = \cos(10^3 t + 90^{\circ})\text{ V}$$

Problema 5

A (0.75 puntos)

Obtened el desarrollo en serie de Fourier con formulación trigonométrica de la tensión periódica mostrada en la figura, en la que V_m=1 V y T=2 s.



B (0.75 puntos) Dada la función de transferencia

$$H(s) = \frac{s^2 + 10^{12}}{2s^2 + 4\times10^6 s + 2\times10^{12}}$$

obtened el módulo y la fase de la variación de H(s) con la frecuencia angular. ¿Hacia qué valores tienden ambas magnitudes cuando la frecuencia tiende a 0 y a ∞ rad/s? ¿Cuánto valen el módulo y la fase de la función cuando ω=1 Mrad/s?

Apartado A

Se trata de una función par [v(t)=-v(-t)], por lo que b_k=0. Además,

$$a_v = \frac{2}{T}\int_0^{T/2} v(t)dt = \frac{2}{T}\int_0^{T/4} V_m dt + \frac{2}{T}\int_{T/4}^{T/2} -V_m dt = 0 \text{ V}$$

$$a_k = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} v(t)\cos(k\omega t)dt = \frac{4}{T}\int_0^{T/4} V_m \cos\left(\frac{2\pi kt}{T}\right)dt + \frac{4}{T}\int_{T/4}^{T/2} -V_m \cos\left(\frac{2\pi kt}{T}\right)dt = \frac{4V_m}{k\pi}\text{sen}\left(\frac{k\pi}{2}\right)$$

con lo que el desarrollo en serie de Fourier buscado es

$$v(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{k\pi}\text{sen}\left(\frac{k\pi}{2}\right)\cos(k\pi t) \text{ V}$$

Apartado B

$$H(\omega) = \{H(s)\}_{s=j\omega} = \frac{10^{12} - \omega^2}{2(10^{12} - \omega^2) + j4\times10^6\omega} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |H(\omega)| = \frac{\mathrm{abs}(10^{12} - \omega^2)}{\sqrt{4(10^{12} - \omega^2)^2 + 16\times10^{12}\omega^2}} = \frac{\mathrm{abs}(10^{12} - \omega^2)}{2(10^{12} + \omega^2)}$$

$$\Rightarrow \theta(\omega) = -\mathrm{arctg}\left[\frac{4\times10^6\omega}{2(10^{12} - \omega^2)}\right]$$

En la expresión del módulo puede verse que éste tiende a 0.5 a frecuencias tanto muy altas como muy bajas, mientras que la fase tiende a 0º en ambos casos.

Sustituyendo el valor de ω=1 Mrad/s en las expresiones correspondientes puede observarse que el módulo es nulo y que la fase es $\pm$90º, dependiendo de si se llega a la frecuencia indicada desde valores bajos (valor positivo) o altos (valor negativo).

Problema 6

Se tiene un filtro cuya característica de transferencia es

$$H(s) = \frac{s + 1}{s^2 + 3s + 3}$$

A (0.5 puntos) Indicad justificadamente de qué tipo es el filtro.

B (0.5 puntos) Calculad la(s) frecuencia(s) que limita(n) la banda de paso del filtro.

Apartado A

$$H(j\omega) = \{H(s)\}_{s=j\omega} = \frac{1 + j\omega}{(3 - \omega^2) + j3\omega} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad |H(j\omega)| = \sqrt{\frac{1 + \omega^2}{(3 - \omega^2)^2 + (3\omega)^2}} = \sqrt{\frac{1 + \omega^2}{\omega^4 + 3\omega^2 + 9}}$$

$$\left.\begin{array}{l} \omega \to 0 \Rightarrow |H(j\omega)| \to 1/3 \\ \omega \to \infty \Rightarrow |H(j\omega)| \to 0 \\ 0 < \omega < \infty \Rightarrow |H(j\omega)| \neq 0 \end{array}\right| \Rightarrow \text{Características de un filtro paso bajo}$$

Apartado B

Aplicando la definición de frecuencia de corte, se tiene

$$\omega = \omega_c \Rightarrow \{|H(j\omega)|\}_{\omega=\omega_c} = \frac{\{|H(j\omega)|\}_{max}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{3\sqrt{2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{18} = \frac{1 + \omega_c^2}{\omega_c^4 + 3\omega_c^2 + 9} \Rightarrow \omega_c^4 - 15\omega_c^2 - 9 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \omega_c^2 = 15.58 \text{ (rad/s)}^2 \Rightarrow \omega_c = 3.95 \text{ rad/s}$$

En el cálculo de la frecuencia de corte se prescinde de los resultados negativos, ya que carecen de sentido físico.