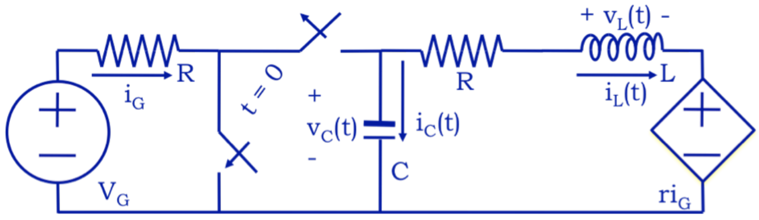
Análisis de redes. Examen de julio de 2011

PROBLEMA 1 (2.5 puntos).

En el circuito de la figura, la fuente independiente es continua. Sabiendo que

V_G = 1 V, r = 1 Ω, C = 1 F

¿qué relación han de tener los valores de R y L para que la respuesta del circuito sea sobreamortiguada?



Para t $\geq$ 0 s, el circuito se caracteriza por las ecuaciones

$$v_C = L\frac{di_L}{dt} + \frac{rV_G}{R} + Ri_L \quad (1) \qquad i_L = -C\frac{dv_C}{dt} \quad (2)$$

Sustituyendo (2) en (1),

$$LC\frac{d^2v_C}{dt^2} + RC\frac{dv_C}{dt} + v_C = \frac{rV_G}{R} \qquad (3)$$

Sustituyendo (1) en (2),

$$LC\frac{d^2i_L}{dt^2} + RC\frac{di_L}{dt} + i_L = 0 \qquad (4)$$

De (3) o (4) se obtienen los coeficientes de la ecuación característica.

$$a = LC \qquad b = RC \qquad c = 1$$

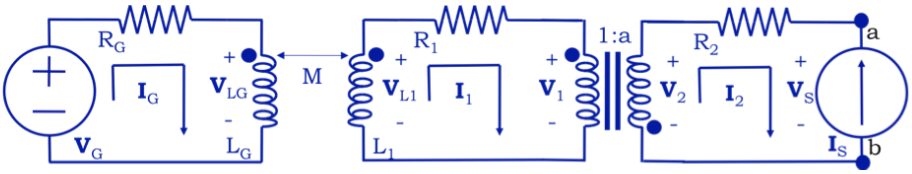
$$\left.\begin{aligned} \alpha &= \frac{b}{2a} = \frac{R}{2L} \\ \omega_0 &= \sqrt{\frac{c}{a}} = \sqrt{\frac{1}{LC}} \end{aligned}\right| \quad \Rightarrow \quad \left| \begin{aligned} &\text{respuesta sobreamortiguada si} \\ &\alpha > \omega_0 \quad \Rightarrow \quad R > 2\sqrt{L} \end{aligned}\right.$$

Enrique Sánchez. Dpto. Teoría Señal y Comunic. Escuela Ingeniería Telecomunicación. UNIVERSIDAD DE VIGO

PROBLEMA 2
(2.5 puntos).

a) Suponiendo conocidos los valores de $\mathbf{I}_G$, $\mathbf{I}_1$ e $\mathbf{I}_2$, escribid las expresiones necesarias para obtener $\mathbf{V}_{LG}$, $\mathbf{V}_{L1}$, $\mathbf{V}_1$, $\mathbf{V}_2$ y $\mathbf{V}_S$ (**1.5 puntos**).

b) Obtened las potencias media y reactiva en la fuente de corriente (**1 punto**).



$\mathbf{V}_G$ = 8 V, $\mathbf{I}_S$ = 1 A, a = 2, ωM = 0.5 Ω,

R_G = 1 Ω, R_1 = 0.2 Ω, R_2 = 0.7 Ω, ωL_G = 1 Ω, ωL_1 = 1.125 Ω

Apartado a

$$\mathbf{V}_{LG} = \mathbf{V}_G - \mathbf{I}_G R_G = \mathbf{I}_G j\omega L_G - \mathbf{I}_1 j\omega M \qquad \mathbf{V}_{L1} = -(\mathbf{I}_G j\omega M + \mathbf{I}_1 j\omega L_1)$$

$$\mathbf{V}_1 = \mathbf{V}_{L1} - \mathbf{I}_1 R_1 \qquad \mathbf{V}_2 = -a\mathbf{V}_1$$

$$\mathbf{V}_S = \mathbf{V}_2 - \mathbf{I}_2 R_2$$

Apartado b

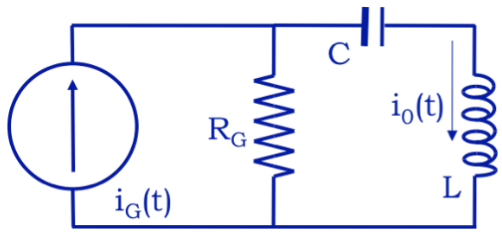
$$\mathbf{I}_2 = -\mathbf{I}_S = -1 \text{ A} \qquad \mathbf{I}_1 = -a\mathbf{I}_2 = 2 \text{ A} \qquad \mathbf{I}_G = \frac{\mathbf{V}_G + \mathbf{I}_1 j\omega M}{R_G + j\omega L_G} = 4.5 - j3.5 \text{ A}$$

$$\mathbf{V}_1 = \mathbf{I}_G j\omega M - \mathbf{I}_1(j\omega L_1 + R_1) = 1.35 \text{ V} \qquad \mathbf{V}_2 = -a\mathbf{V}_1 = -2.7 \text{ V} \qquad \mathbf{V}_S = \mathbf{V}_2 - \mathbf{I}_2 R_2 = -2 \text{ V}$$

$$S_S = \frac{\mathbf{V}_S \mathbf{I}_2^*}{2} = 1 \text{ VA} \Rightarrow \left| \begin{array}{l} P_S = \text{Re}\{S_S\} = 1 \text{ W} \\ Q_S = \text{Im}\{S_S\} = 0 \text{ VAR} \end{array} \right.$$

PROBLEMA 3 (1.5 puntos).

a) Siendo $I_G(s)$ e $I_0(s)$ las transformadas de Laplace, respectivamente, de $i_G(t)$ e $i_0(t)$, obtened la función de transferencia, $H(s) = I_0(s)/I_G(s)$, del circuito de la figura (**0.75 puntos**).



$R_G = 1\,\Omega$ $L = 0.1\,H$ $C = 10\,F$

b) Suponiendo que la función de transferencia es

$$H(s) = \frac{I_0(s)}{I_G(s)} = \frac{s}{s^2 + s + 1.25}$$

obtened la función de ponderación (**0.75 puntos**).

Apartado a

$$H(s) = \frac{I_0(s)}{I_G(s)} = \frac{R_G}{R_G + \frac{1}{sC} + sL} = \frac{sR_GC}{s^2LC + sR_GC + 1} = \frac{10s}{s^2 + 10s + 1}$$

Apartado b

$$D(s) = s^2 + s + 1.25 \quad \Rightarrow \quad D(s) = (s + 0.5 - j)(s + 0.5 + j) \quad \Rightarrow \quad \alpha = -0.5 \qquad \beta = 1$$

$$H(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{s}{s^2 + s + 1.25} = \frac{K}{s + 0.5 - j} + \frac{K^*}{s + 0.5 + j}$$

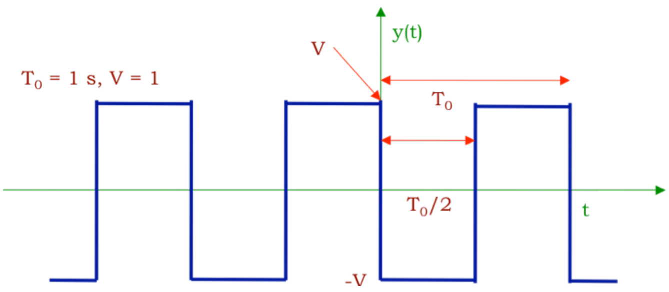
$$K = \left[\frac{(s + 0.5 - j)N(s)}{(s + 0.5 - j)(s + 0.5 + j)}\right]_{s=-0.5+j} = 0.5 + j0.25 \quad \Rightarrow \quad |K| = \sqrt{0.5^2 + 0.25^2} \qquad \theta = \mathrm{arctg}\left(\frac{0.25}{0.5}\right)$$

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H(s)\} = 2|K|e^{-0.5t}\cos(t + \theta)$$

PROBLEMA 4 (2 puntos).

a) Obtened la serie de Fourier (forma trignométrica alternativa) correspondiente a la función periódica mostrada en la figura (**1 punto**).

b) Suponiendo que la figura de queda reducida al pulso central entre $-T_0/2$ y $T_0/2$ (la función es nula para cualquier otro valor de t), obtened su transformada de Fourier (**1 punto**).



Apartado a

$$a_v = 0, \text{ porque } y(t) \text{ es una función impar}$$

$$a_k = 0, \text{ porque } y(t) \text{ es una función impar}$$

$$b_k = \frac{4}{T_0}\int_0^{T_0/2} y(t)\mathrm{sen}\left(\frac{2\pi kt}{T_0}\right)dt = -\frac{4}{T_0}\int_0^{T_0/2} V\mathrm{sen}\left(\frac{2\pi kt}{T_0}\right)dt = \frac{2V[\cos(k\pi)-1]}{k\pi}$$

$$y(t) = a_v + \sum_{k=1}^{\infty}\sqrt{a_k^2 + b_k^2}\cos\left[\frac{2\pi kt}{T_0} - \mathrm{arctg}\left(\frac{b_k}{a_k}\right)\right]$$

Apartado b

$$y(t) \text{ impar} \quad \Rightarrow \quad \left| \begin{array}{l} A(\omega) = 0 \\ B(\omega) = 2\int_0^{\infty} y(t)\mathrm{sen}(\omega t)dt = -2\int_0^{T_0/2} V\mathrm{sen}(\omega t)dt = \frac{2V}{\omega}\left[\cos\left(\frac{\omega T_0}{2}\right) - 1\right] \\ F(\omega) = A(\omega) - jB(\omega) = -jB(\omega) \end{array} \right.$$

PROBLEMA 5 (1.5 puntos).

a) Indicad de qué tipo es un filtro cuya característica de transferencia es (**0.5 puntos**)

$$H(s) = \frac{s}{s+4}$$

b) Indicad a qué valor tiende el módulo del filtro indicado en el apartado anterior cuando la frecuencia angular toma valores muy altos (**0.5 puntos**).

c) Indicad a qué valor tiende la fase del filtro indicado en el primer apartado cuando la frecuencia angular toma valores muy bajos (**0.5 puntos)**.

Apartado a

$$H(j\omega) = \{H(s)\}_{s=j\omega} = \frac{j\omega}{4+j\omega} \Rightarrow |H(j\omega)| = \frac{\omega}{\sqrt{16+\omega^2}} \Rightarrow \left|\begin{array}{c} \omega \to 0 \text{ rad/s} \Rightarrow |H(j\omega)| \to 0 \\ \omega \to \infty \text{ rad/s} \Rightarrow |H(j\omega)| \to 1 \\ \omega \text{ intermedia} \Rightarrow |H(j\omega)| \to \text{valor intermedio} \end{array}\right| \Rightarrow \text{filtro paso alto}$$

Apartado b

Como se indicó en el apartado anterior,

$$\omega \to \infty \text{ rad/s} \Rightarrow |H(j\omega)| \to 1$$

Apartado c

$$H(j\omega) = \{H(s)\}_{s=j\omega} = \frac{j\omega}{4+j\omega} \Rightarrow \angle H(j\omega) = 90 - \text{arctg}\left(\frac{\omega}{4}\right) \Rightarrow \omega \to 0 \text{ rad/s} \Rightarrow \angle H(j\omega) \to 90\ ^\circ$$