Tema IV: Series de Fourier

1 Introducción

En este tema presentaremos la forma en la MatLab puede ser utilizado para obtener la representación gráfica de una señal periódica que ha sido expresada mediante una serie de Fourier. También indicaremos cómo representar los espectros de módulos y fases de la señal aludida.

Si bien los contenidos mencionados tienen relevancia por sí mismos, el interés de este tema radica fundamentalmente en el conocimiento y el manejo de determinadas instrucciones de MatLab. Tales instrucciones son de aplicación no sólo en los casos aludidos en este tema, sino también en muchos otros. Por ello se recomienda al lector que dedique un esfuerzo especial a la comprensión de las características de tales instrucciones.

En todos los casos se considera que la serie de Fourier está caracterizada en la forma resumida en la figura IV.1.

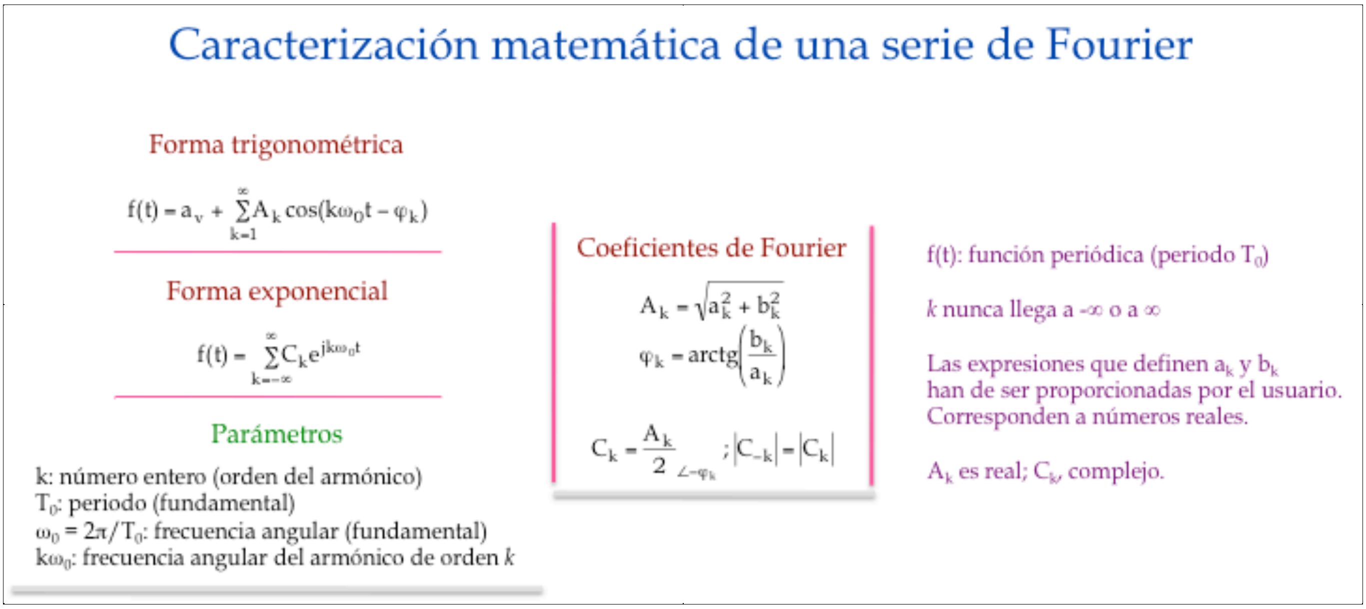

Figura IV.1. Caracterización de las series de Fourier.

2 Espectro de una función periódica

Un espectro es una representación gráfica que muestra la variación de su módulo o de su fase con la frecuencia. En consecuencia podemos hablar de espectros de módulos y de fases. A su vez, el espectro de módulos puede estar basado en la expresión trigonométrica o en la exponencial de la serie de Fourier.

En la figura IV.2 se considera un ejemplo en el que una función temporal periódica ha sido expresada mediante una serie de Fourier; las expresiones matemáticas que definen a_k y b_k tienen las formas indicadas en la figura.

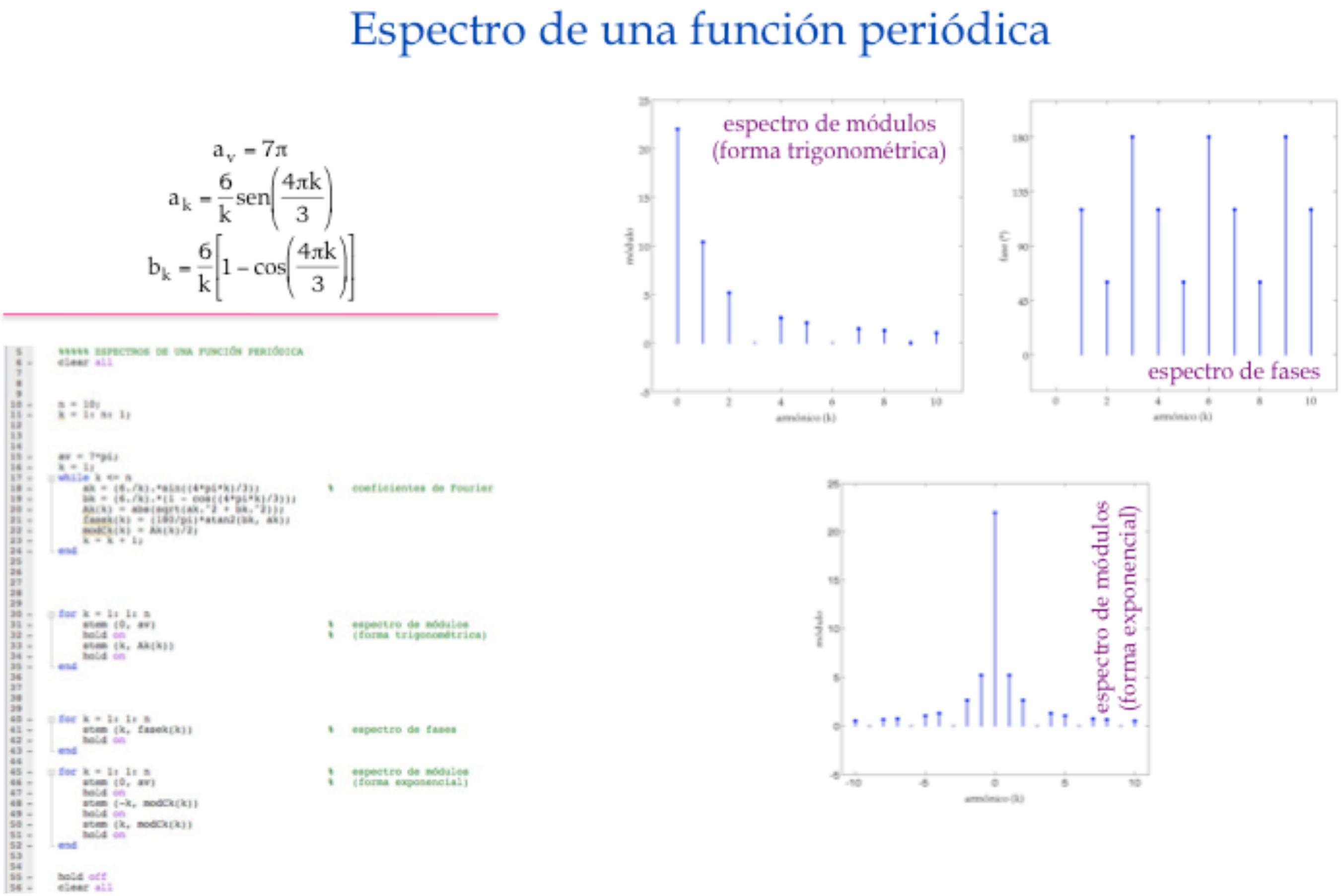

Figura IV.2. Representación de los distintos espectros de una función periódica del tiempo.

Obsérvese que, en definitiva, un espectro consiste en una representación discreta del valor de una magnitud en función del número del armónico para el que se obtiene dicho valor. La representación también podría hacerse eligiendo para el eje de abscisas los valores de las distintas frecuencias que corresponden a los diferentes armónicos[1].

Los distintos espectros representados en la figura IV.2 han sido obtenidos con el programa de MatLab incluido en aquélla. Para obtener cada espectro hay que anular los bloques de instrucciones correspondientes a las representaciones de los otros espectros. Obsérvese que el orden del armónico actúa como índice de los vectores que engloban los valores de las magnitudes constitutivas de los espectros. La componente continua que aparece explícitamente en la expresión trigonométrica de la serie puede ser tomada como un armónico de orden y fase nulos. Obsérvese que, de acuerdo con lo establecido en la figura IV.1, los módulos son siempre positivos; de ahí la presencia de la instrucción `abs` en la línea 20 del programa. También puede

[1] La representación en función de la frecuencia no es discreta sino continua cuando se hace referencia a la transformada directa de Fourier de una función no periódica del tiempo; en ese caso, además, no tiene sentido hablar de armónicos de la frecuencia fundamental.

notarse que los valores de las fases correspondientes a los armónicos 3, 6, 9, ... carecen de relevancia porque los módulos de tales armónicos son nulos.

Nótese que *k* empieza siendo definida como un vector y que luego es tomada como el índice de los vectores Ak(k), fasek(k) y modCk(k). La instrucción `while ... end` es utilizada para construir uno por uno los valores de los elementos de estos vectores correspondientes a las posiciones que ocupan tales elementos. Por su parte, la instrucción `for ... end` es utilizada para representar, uno por uno, los valores de los vectores correspondientes a los distintos índices.

La representación de la figura IV.2 ha sido realizada utilizando el orden de los armónicos como unidad del eje de abscisas. Podría haberse obtenido una representación equivalente en función de las frecuencias (ciclos por segundo o frecuencias angulares) de los armónicos. En ese caso, previamente habríamos tenido que conocer el valor de la frecuencia fundamental (ω_0).

3 Reconstrucción de una función periódica

El resultado final de lo expuesto en la sección precedente es que se tiene perfectamente caracterizada una serie de Fourier que representa una función temporal periódica desconocida. Sin embargo, en muchos casos prácticos lo que interesa es la representación de dicha función en el dominio del tiempo. A continuación indicamos cómo puede pasarse de la representación de la serie de Fourier a la caracterización temporal (véase la figura 4.3); ello constituye en definitiva una reconstrucción de una señal, lo cual justifica el título de esta sección.

El caso tratado en la figura IV.3 es el mismo que el considerado en la figura IV.2 en lo que se refiere a las expresiones que permiten obtener los coeficientes de Fourier. A esos datos se añade el correspondiente al periodo de la señal a la que corresponde el desarrollo en serie. Con todo esto ya es posible elaborar el programa de MatLab mostrado en la figura, en el que lo único de particular es la construcción de la función. Como puede verse, ésta es una función del tiempo que tiene la forma indicada en la figura IV.1; cada ciclo de la segunda instrucción `while ... end` añade un armónico a la señal que se tiene hasta ese momento. Se recomienda al lector que compruebe por sí mismo la influencia del número de armónicos elegidos en la representación de la señal (basta con modificar el valor de *n* en el programa). También puede comprobar la influencia del número de puntos considerados en el rango de valores del tiempo que se dispone en el eje de abscisas. Finalmente, es interesante comprobar la influencia de las fases de los armónicos (puede cambiarse el signo - por un signo + en la línea 33 o bien alterar ligeramente la expresión que permite obtener la fase correspondiente a cada armónico).

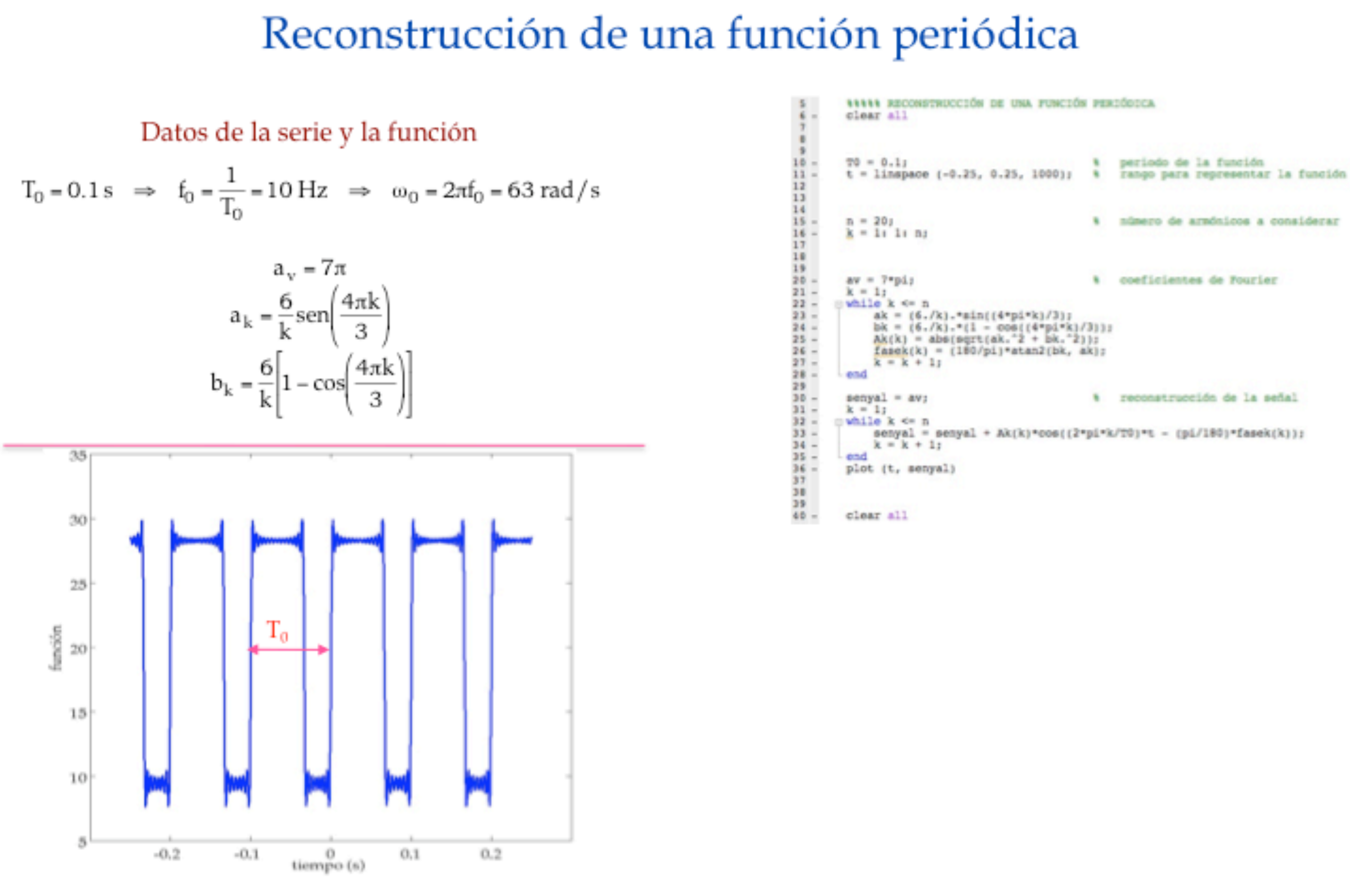

Figura IV.3. Representación en el dominio del tiempo de una función de la que se conoce su desarrollo en serie de Fourier.

4 Ejercicios propuestos

Para comprobar hasta qué punto se ha familiarizado con los procedimientos detallados en este tema el lector puede intentar resolver los ejercicios que se proponen seguidamente. Las soluciones de los mismos han sido incluidas en el apéndice 1.

Ejercicios propuestos

1 Dibujad la función temporal periódica a la que corresponden los siguientes datos:

Datos de la serie y la función

$$T_0 = 1\,\text{s} \;\Rightarrow\; f_0 = \frac{1}{T_0} = 1\,\text{Hz} \;\Rightarrow\; \omega_0 = 2\pi f_0 = 6.3\,\text{rad/s}$$

$$a_v = 0.5$$
$$a_k = \frac{2}{k\pi}\,\text{sen}\left(\frac{k\pi}{2}\right)$$
$$b_k = 0$$

2 Representad los espectros de módulos (forma trigonométrica) y fases de la serie considerada en el ejercicio anterior

Figura IV.4. Ejercicios propuestos relacionados con las series de Fourier.