Apéndice 2: Selección de problemas propuestos en ejercicios puntuables

1 Consideraciones generales

Los problemas recogidos en esta sección fueron propuestos en ejercicios puntuables para la evaluación continua durante el curso 2012-13. En algunos casos se presentan los problemas tal y como fueron planteados a los alumnos; en otros, la redacción de tales problemas ha sido ligeramente alterada a fin de hacer la exposición más ilustrativa.

En algún caso para cada problema se ofrecen cuatro posibles respuestas; el lector ha de elegir una de ellas como la correcta. En otras situaciones se pide al lector que indique directamente la respuesta correcta al problema planteado.

2 Transformación de Laplace

Problema 01 (transformación de Laplace)

Dada la función $F(s) = \dfrac{s^3 + 5s^2 + 8s + 5}{s^2 + 4s + 4}$, señalad cuál de las expansiones en fracciones simples que se indican corresponde a dicha función

a : $F(s) = s + 1 + \dfrac{1}{s+1} + \dfrac{1}{s+2}$

b : $F(s) = s + 1 + \dfrac{1}{(s+2)^2}$

c : $F(s) = \dfrac{1}{s+2} + \dfrac{1}{(s+2)^2}$

d : $F(s) = 2 + \dfrac{1+j}{s+1-j2} + \dfrac{1-j}{s+1+j2}$

```
>> [num, raices, cociente] = residue ([[1 5 8 5], [1 4 4])
num =

     0
     1

raices =

    -2
    -2

cociente =

     1     1
```

Ejecutando en la ventana de comandos de MatLab la instrucción adjunta y comparando el resultado con las posibles expansiones se obtiene directamente el resultado de que la respuesta correcta es la **b**

En cualquier caso no es necesario realizar el cálculo (por lo menos, todo él) para obtener la respuesta correcta.
En efecto, las respuestas **a** y **d** no son correctas porque las raíces del denominador no son las indicadas.
La respuesta **c** no es factible porque, de serlo, ello implicaría que el denominador es de orden superior al numerador, lo cual no ocurre en la función propuesta; en otras palabras, si el orden del numerador es mayor que el del denominador, en la expansión han de figurar forzosamente términos independientes.

Problema 02 (transformación de Laplace)

Expresad como cociente de polinomios la función cuya expansión en serie de fracciones simples es

$$F(s) = 4s - \frac{j2}{s+1-j} + \frac{j2}{s+1+j}$$

```
>> num = [-2*1j; 2*1j]; raices = [-1+1j; -1-1j]; cociente = [4; 0]; [NUM, DEN] = residue (num, raices, cociente)
NUM =
     4     8     8     4

DEN =
     1     2     2
```

A partir del resultado indicado, obtenido en la ventana de comandos de MatLab, se llega a

$$F(s) = \frac{4s^3 + 8s^2 + 8s + 4}{s^2 + 2s + 2}$$

Notas sobre los problemas relacionados con la transformación de Laplace.

En ambos problemas se ha omitido la relación entre las fracciones simples y las correspondientes expresiones temporales; esta relación puede ser determinada a partir de las tablas de transformadas de Laplace que están a disposición del lector en numerosas fuentes bibliográficas.

Debe recalcarse la importancia de la nota contenida en la resolución del problema 1. La utilización de MatLab (o cualquier otra herramienta) para efectuar los cálculos correspondientes a un ejercicio es de gran interés. Pero más interés todavía reviste el hecho de que el lector comprenda la lógica que hay detrás de tales cálculos. Así, si el lector *sabe qué está haciendo*, puede llevar a cabo los cálculos de forma mucho más sencilla.

3 Respuesta en frecuencia

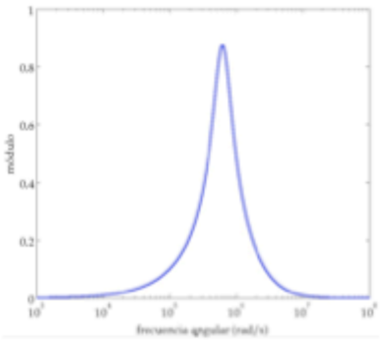
Problema 03 (respuesta en frecuencia)

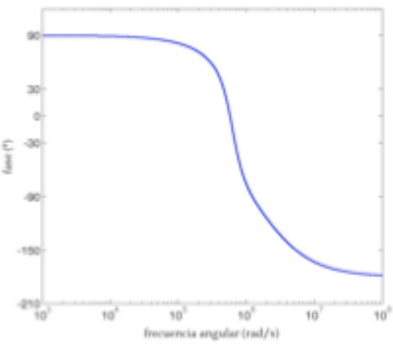
Dibujad la respuesta en frecuencia (módulo y fase) de un circuito cuya función de transferencia es

$$H(s) = \frac{2\times10^{12}s}{2s^3 + 6\times10^6 s^2 + 3\times10^{12}s + 2\times10^{18}}$$

Problema 03 (respuesta en frecuencia), continuación

```
%%%%% RESPUESTA EN FRECUENCIA
clear all

w = logspace (3, 9, 10000);
s = 1j*w;

Hs = 2e12*s./(2*s.^3 + 6e6*s.^2 + 3e12*s + 2e18);
moduloHs = abs(Hs); faseHs = (180/pi)*angle(Hs);

semilogx (w, moduloHs); %   cancelada cuando se representa la fase
semilogx (w, faseHs);   %   cancelada cuando se representa el módulo

clear all
```





Problema 04 (respuesta en frecuencia)

Con los datos del problema anterior:

- Determinad el valor máximo del módulo de la función de transferencia y la frecuencia para la que se obtiene.
- Determinad la frecuencia para la que la fase de la función de transferencia es nula y el valor del módulo para dicha frecuencia.

```
%%%%% MÁXIMO DEL MÓDULO
clear all

w = logspace (3, 9, 10000);
s = 1j*w;

Hs = 2e12*s./(2*s.^3 + 6e6*s.^2 + 3e12*s + 2e18);
moduloHs = abs(Hs); faseHs = (180/pi)*angle(Hs);


maxmoduloHs = max(moduloHs)
pmaxmoduloHs = find (moduloHs == maxmoduloHs)
wmaxmoduloHs = w (pmaxmoduloHs)


%%%%% FRECUENCIA DE FASE NULA

indfrecres = find (faseHs > 0); posfrecres = length (indfrecres)
frecres = w (length (indfrecres))
moduloHsres = moduloHs (length (indfrecres))

clear all
```

	Frecuencia central	Frecuencia de resonancia
Posición	4654	4602
Frecuencia angular (Mrad/s)	0.62	0.58
Módulo	0.88	0.86

<u>*Notas sobre los problemas de respuesta en frecuencia*</u>.

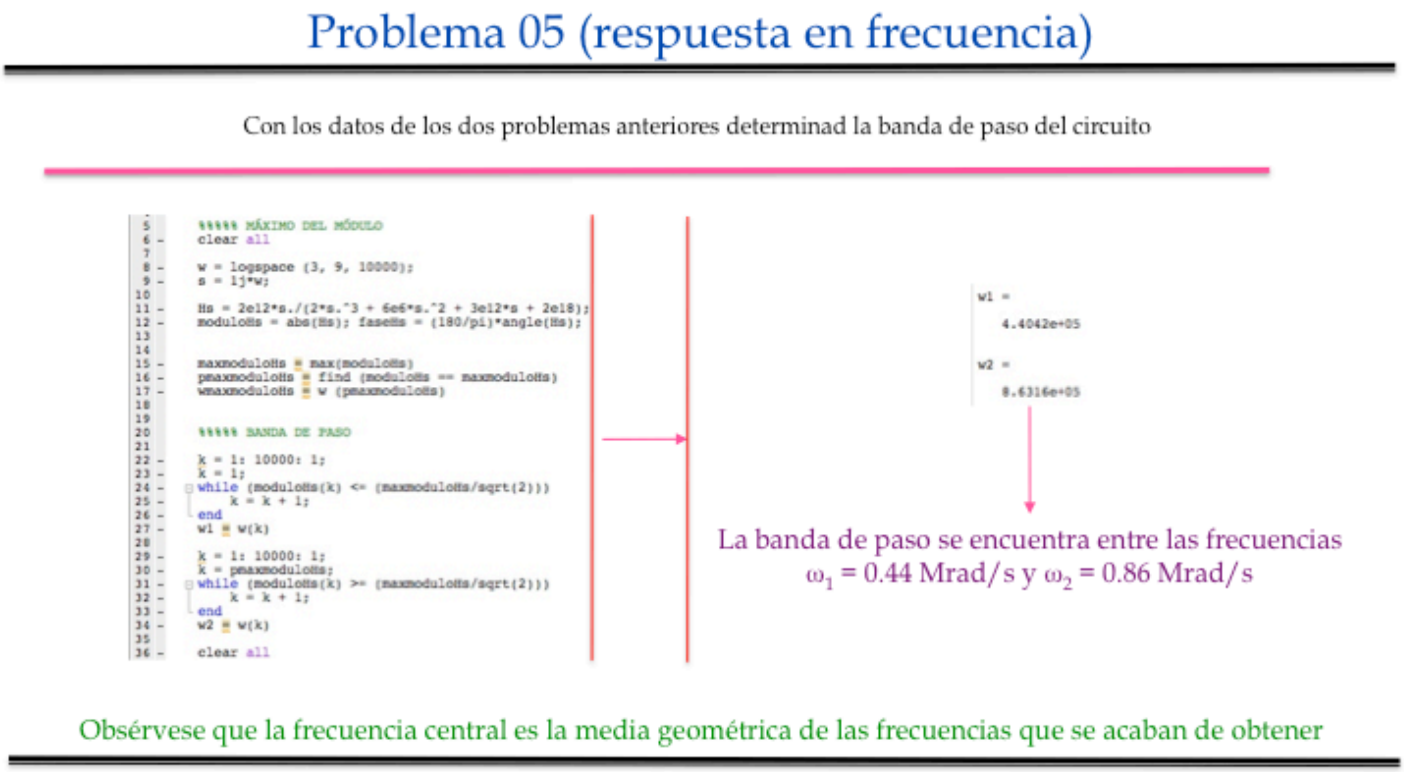
Es obvio que el resultado pedido en el problema 3 podría haber sido obtenido de forma más rápida y sencilla recurriendo a la instrucción `freqs`. Sin embargo, aquí hemos utilizado un planteamiento más convencional, y ello por dos motivos:

- Este tipo de problema aparece mucho en el tratamiento de circuitos mediante la teoría de sistemas lineales; por tal motivo, conviene que el lector esté familiarizado con los detalles concernientes a la elaboración de los programas que se usan en dicho tratamiento.

- La instrucción indicada es cerrada; es decir, no puede continuarse operando con el resultado de su aplicación. En este texto se pretendió seguir explotando los resultados obtenidos en el problema 3 y por ello se prefirió diseñar un programa abierto.

En el problema 4 el valor máximo del módulo se obtiene directamente utilizando la instrucción específica de MatLab para dicho propósito. La determinación de la frecuencia para la que se produce tal valor puede hacerse de manera aproximada de forma gráfica, o bien, tal y como se indica en la figura, recordando que el módulo es un vector y hallando la posición para la que se tiene el máximo. Teniendo en cuenta que los vectores de frecuencia angular y módulo tienen igual número de elementos, el cálculo de la frecuencia para la que se produce el máximo del módulo es inmediato.

Nótese que en la figura correspondiente al problema 4 también se obtiene la frecuencia de resonancia; es decir, aquélla para la que la fase de la función de transferencia del circuito es nula. Obsérvese que esta frecuencia (y, consiguientemente, la posición que ocupa en los vectores de frecuencias y módulos) no coincide con aquélla para la que se tiene el máximo del módulo de la función de transferencia (que hemos denominado frecuencia central).



En el problema 5 el cálculo de la banda de paso se efectúa tomando como referencia la frecuencia central, pero se procedería de la misma forma si se hubiera elegido la frecuencia para la que la fase es nula. Lo habitual es que el enunciado del ejercicio indique cuál de ellas ha de ser considerada.

En el mismo problema puede observarse que no se utiliza la instrucción `find` para hallar las posiciones en las que se ubican las frecuencias que delimitan la banda de paso. Ello se debe a que en ninguna posición se encuentra un valor del módulo exactamente igual al que define la condición de frecuencia límite; en otras palabras, si hubiéramos utilizado la instrucción `find`, habríamos obtenido como resultado un vector vacío. Por ello, observando que la función considerada define un filtro paso banda, se construyen dos vectores, de los cuales el primero corresponde a la banda rechazada inferior, mientras que el segundo define la banda de paso. Las últimas posiciones de ambos vectores definen las posiciones en las que se encuentran las frecuencias que limitan la banda de paso.

4 Series de Fourier

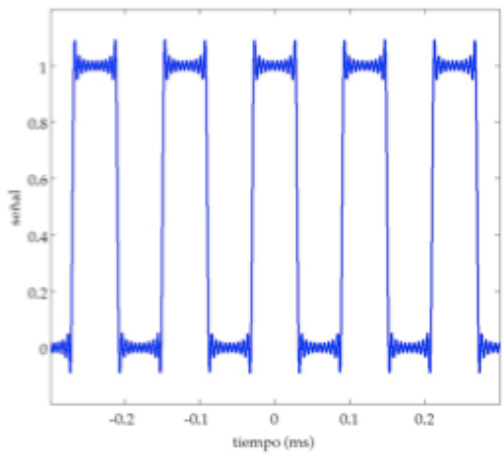
Problema 06 (series de Fourier)

Dibujad en el dominio temporal la función periódica a la que corresponde el siguiente desarrollo en serie de Fourier:

$$T_0 = 12\,\mu s$$

$$a_v = 0.5$$
$$a_k = \frac{2}{k\pi}\,\text{sen}\left(\frac{k\pi}{2}\right)$$
$$b_k = 0$$

```
%%%%% RECONSTRUCCIÓN DE UNA FUNCIÓN PERIÓDICA
clear all

T0 = 12e-5;
t = linspace (-1e-3, 1e-3, 10000);

n = 20;
k = 1: 1: n;

av = 0.5;
k = 1;
while k <= n
    ak = (2./(k*pi)).*sin(k*pi/2);
    bk = 0;
    Ak(k) = abs(sqrt(ak.^2 + bk.^2));
    fasek(k) = atan2 (bk, ak);
    k = k + 1;
end

senyal = av;
k = 1;
while k <= n
    senyal = senyal + Ak(k)*cos((2*k*pi/T0)*t - fasek(k));
    k = k + 1;
end

plot (t, senyal)

clear all
```



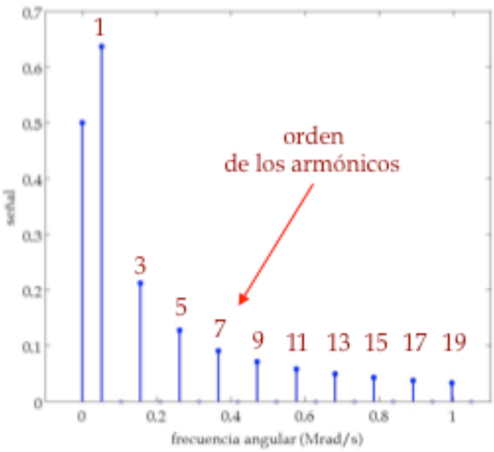
Notas sobre los problemas 6 y 7.

Los problemas 6 y 7 no presentan ninguna particularidad con relación a lo que ya se indicó en el tema IV al hablar de las series de Fourier. El único detalle que cabe mencionar es que en el segundo problema la representación no se hace en función del orden de los armónicos, sino en el de las frecuencias angulares correspondientes a éstos.

Problema 07 (series de Fourier)

Con los datos del problema anterior dibujad el espectro de módulos de la función (representación trigonométrica) en función de la frecuencia angular de cada armónico

```matlab
%%%%% ESPECTRO DE UNA FUNCIÓN PERIÓDICA
clear all

T0 = 12e-5;

n = 20;
k = 1: 1: n;

av = 0.5;
k = 1;
while k <= n
    ak = (2./(k*pi)).*sin(k*pi/2);
    bk = 0;
    Ak(k) = abs(sqrt(ak.^2 + bk.^2));
    k = k + 1;
end

for k = 1: 1: n;
    stem (0, av)
    hold on
    stem ((2*pi/T0)*k, Ak(k))
    hold on
end

hold off

clear all
```

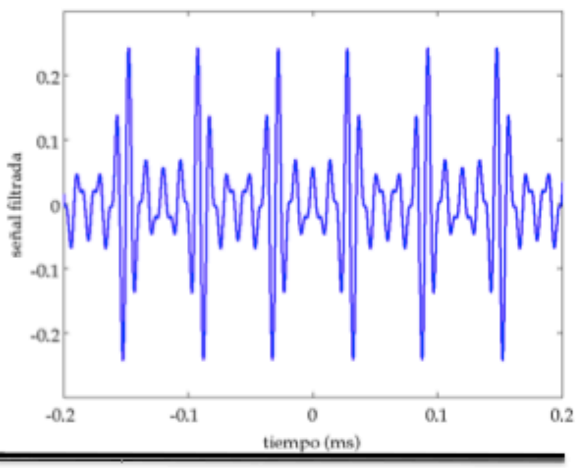


Problema 08 (series de Fourier)

La señal considerada en los problemas 6 y 7 es pasada por un filtro como el representado en los problemas 3-5.
Se supone que este filtro es ideal (pasa toda la señal incidente si tiene una frecuencia angular comprendida entre ω_1 y ω_2 y es totalmente rechazada cualquier otra señal).
Dibujad en el dominio temporal la señal que sale del filtro.

De acuerdo con las características del filtro éste sólo permite el paso de los armónicos de la señal que tienen frecuencias angulares comprendidas entre 0.44 y 0.86 Mrad/s.
Esto significa que sólo pueden pasar los armónicos de orden 9, 11, 13, 15 y 17
(los armónicos de orden par son nulos).

```matlab
%%%%% RECONSTRUCCIÓN DE UNA FUNCIÓN PERIÓDICA
clear all

T0 = 12e-5;
t = linspace (-1e-3, 1e-3, 10000);

n = 17;
k = 1: 1: n;

av = 0.5;
k = 1;
while k <= n
    ak = (2./(k*pi)).*sin(k*pi/2);
    bk = 0;
    Ak(k) = abs(sqrt(ak.^2 + bk.^2));
    fasek(k) = atan2 (bk, ak);
    k = k + 1;
end

senyal = 0;
k = 9;
while k <= n
    senyal = senyal + Ak(k)*cos((2*k*pi/T0)*t - fasek(k));
    k = k + 2;
end

plot (t, senyal)

clear all
```



Notas sobre el problema 8.

La única dificultad reseñable de este problema está en la determinación correcta de las frecuencias que han de ser tenidas en cuenta a la salida del filtro, o, lo que es equivalente, de los armónicos que están presentes en la señal después de haber pasado por el filtro (los restantes han sido eliminados por éste). Así, en el problema quedan sólo cinco armónicos no nulos que han de ser tomados en cuenta. La reconstrucción de la señal con estos armónicos provoca que la salida del filtro tenga la forma indicada en la figura correspondiente al problema 8. Como puede verse, la señal ha sido fuertemente distorsionada en su paso por el filtro. Obsérvese que la componente continua (a_v) no pasa por el filtro.

5 Transformada de Fourier

Problema 09 (transformada de Fourier)

La transformada de Fourier de una función puede caracterizarse como se indica en las expresiones adjuntas. Representad gráficamente las variaciones con la frecuencia de su módulo y su fase.

$$F(\omega) = A(\omega) - jB(\omega)$$

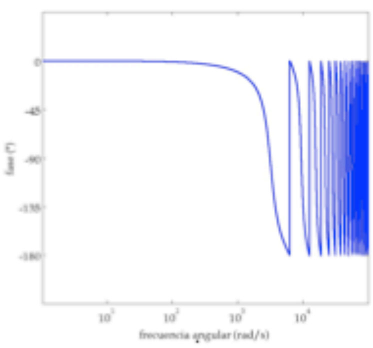
$$A(\omega) = \frac{-V_l + V_h}{\omega}\,\mathrm{sen}\left(\frac{\omega T}{2}\right)$$

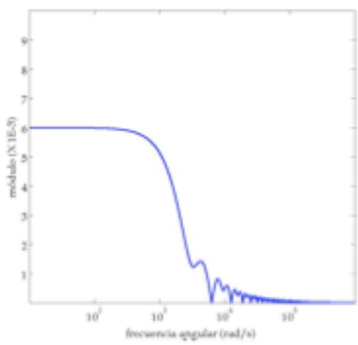
$$B(\omega) = \frac{-V_l + V_h}{\omega}\left[1 - \cos\left(\frac{\omega T}{2}\right)\right]$$

$$|F(\omega)| = \left|\sqrt{A^2(\omega) + B^2(\omega)}\right| = \left|\frac{V_l + V_h}{\omega}\sqrt{2 - 2\cos\left(\frac{\omega T}{2}\right)}\right|$$

$$\varphi(\omega) = \mathrm{arctg}\left[\frac{-B(\omega)}{A(\omega)}\right]$$

$$V_l = -2 \qquad V_h = 4 \qquad T = 2\ \mathrm{ms}$$






```
%%%%% TRANSFORMADA DE FOURIER
clear all

Vl = - 2; Vh = 4; T = 2e-3;

n = 10000;
w = logspace (0, 9, n);

k = 1;
while k <= n
    A = ((- Vl + Vh)./w(k)).*sin(w(k)*T/2);
    B = ((Vl + Vh)./w(k)).*(1 - cos(w(k)*T/2));
    moduloF(k) = abs(sqrt(A.^2 + B.^2));
    faseF(k) = (180/pi)*atan2(- B, A);
    k = k + 1;
end

semilogx (w, moduloF)       %   cancelada cuando se representa la fase
semilogx (w, faseF)         %   cancelada cuando se representa el módulo

clear all
```

El problema 9 no tiene nada de particular que mencionar. Es misión del lector obtener las funciones indicadas en el enunciado a partir de la función temporal cuya transformada de Fourier se desea determinar.